УДК 517.946

А. П. Громик, канд. техн. наук

Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам'янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПРОСТОРІ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) побудовано точні аналітичні розв'язки математичних моделей коливних процесів (гіперболічних початково-крайових задач спряження) в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі.

Ключові слова: *моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральне перетворення, матриця впливу, матриця Гріна.*

Вступ. Коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, суттєво впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме диференціальне рівняння коливань (хвильове рівняння, рівняння Д'аламбера) гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = f\left(t, P\right),$$

де Δ_3 — тривимірний оператор Лапласа у відповідній системі координат (декартовій, циліндричній, сферичній тощо) тривимірного евклідового простору, P — точка в цьому просторі.

Зрозуміло, що для адекватного моделювання коливного процесу до складу математичної моделі крім хвильового рівняння потрібно долучити ще певні початкові та крайові умови. Таким чином, математичною моделлю коливного процесу є гіперболічна крайова задача математичної фізики [1]. На цей час досить детально вивчено одновимірні, двовимірні та тривимірні гіперболічні крайові задачі математичної фізики однорідних середовищ. Але у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів (найпростіший композит має дві точки спряження) у будівництві, техніці, сучасних технологіях як математичні моделі певних процесів виникають крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти модельних рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних сердовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими [2–4].

Окрім методу відокремлення змінних [1] та його узагальнень [5], одним з важливих і ефективних методів дослідження лінійних математичних моделей (лінійних крайових задач математичної фізики) є метод інтегральних перетворень [6], який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших математичних моделей (крайових задач) через їх інтегральне зображення у випадку однорідних середовищ. У той же час, для досить широкого класу задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом їх дослідження виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [7–10].

У цій статті ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок узагальненої математичної моделі коливного процесу в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі, побудований методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D=\left\{\left(t,r,\varphi,z\right)\Big|\, t>0; r\in \mathrm{I}_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1}\left(R_{j-1};R_j\right), R_0=0, R_{n+1}=+\infty;\right.$$
$$\left.\varphi\in\left(0;\varphi_0\right), 0<\varphi_0<2\pi; z\ \in\left(-\infty;+\infty\right)\right\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j+ \\ +\chi_j^2 u_j=f_j\left(t,r,\varphi,z\right), r\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0}=g_j^1\left(r,\varphi,z\right);\ \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0}=g_j^2\ \left(r,\varphi,z\right); r\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\Bigg|_{z=-\infty}=0;\ \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\Bigg|_{z=+\infty}=0; s=0,1;\ j=\overline{1,n+1}; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0;\ \left.\frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0; s = 0,1, \qquad (4)$$

одними з крайових умов на гранях клина [7]

$$u_j\big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t,r,z);\ u_j\big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t,r,z);\ j = \overline{1,n+1}, \qquad (5)$$

$$u_j\big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t,r,z);\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t,r,z);\ j = \overline{1,n+1}, \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{3j}(t,r,z);\ u_j\big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t,r,z);\ j = \overline{1,n+1}, \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{4j}(t,r,z);\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t,r,z); j = \overline{1,n+1} \qquad (8)$$

та умовами спряження [11]

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right)u_k - \left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\right|_{r=R_k} = 0; j = 1,2; k = \overline{1,n}, \quad (9)$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k — деякі сталі;

$$c_{jk} \equiv \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k \neq 0;\ \ c_{1k}\cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t,r,\varphi,z) = \left\{f_1(t,r,\varphi,z), f_2(t,r,\varphi,z),..., f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\right\},$$

$$g^1(r,\varphi,z) = \left\{g_1^1(r,\varphi,z); g_2^1(r,\varphi,z),..., g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\};$$

$$g^2(r,\varphi,z) = \left\{g_1^2(r,\varphi,z); g_2^2(r,\varphi,z),..., g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\};$$

$$g_{pj}(t,r,z),\ \ \omega_{pj}(t,r,z);\ \left(p = \overline{1,4};\ j = \overline{1,n+1}\right)$$

— задані обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z) = \left\{u_1(t,r,\varphi,z); u_2(t,r,\varphi,z),..., u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\right\}$$

— шукана двічі неперервно диференційовна функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j = 0$, рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням коливань (хвильовим рівнянням, рівнянням Д'аламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
2) якщо $\alpha_{11}^k = 0, \beta_{11}^k = 1; \alpha_{12}^k = 0, \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k, \beta_{21}^k = 0; \alpha_{22}^k = E_2^k,\ \ \beta_{22}^k = 0,$ де E_1^k, E_2^k — модулі Юнга $\left(k = \overline{1,n}\right)$, то умови спряження (9) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, гіперболічні початково-крайові задачі спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) можна розглядати як узагальнені математичні моделі коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі.

Основна частина. Припустимо, що розв'язки задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [11–13].

Визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F^{-1}_{m,ik}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi \in (0;\varphi_0)$ за формулами [12]:

$$F_{m,ik}\left[f(\varphi)\right] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi)U_{m,ik}(\varphi)d\varphi \equiv f_{m,ik}, \tag{10}$$

$$F^{-1}_{m,ik}\left[f_{m,ik}\right] = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{ik}_m f_{m,ik}U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \tag{11}$$

де

$$\beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}, \quad U_{m,11}(\varphi) = \sin\left(\beta_{m,11}\varphi\right);$$

$$\beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}, \; U_{m,12}(\varphi) = \sin\left(\beta_{m,12}\varphi\right);$$

$$\beta_{m,21} = \beta_{m,12}, \quad U_{m,21}(\varphi) = \cos\left(\beta_{m,21}\varphi\right);$$

$$\beta_{m,22} = \beta_{m,11}, \; U_{m,22}(\varphi) = \cos\left(\beta_{m,22}\varphi\right);$$

$$\varepsilon^{ik}_0 = 0, \; \varepsilon^{ik}_m = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21; \; m = 1, 2, 3, ... \;;$$

$$\varepsilon^{22}_0 = \frac{1}{2}, \; \varepsilon^{22}_m = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, ... \;.$$

Безпосередньо (інтегруванням частинами) перевіряється, що для оператора $F_{m,ik}$ виконується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального перетворення Фур'є $\dfrac{d^2}{d\varphi^2}$:

$$F_{m,ik}\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right] = -\beta^2_{m,ik}f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}; \; i,k = 1,2, \tag{12}$$

де

$$\Phi_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}\left[f(0) + (-1)^{m+1}f(\varphi_0)\right]; \; \Phi_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}f(0) + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21} = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0);$$

$$\Phi_{m,22}(f) = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10) внаслідок тотожності (12) тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D' = \left\{ (t,r,z) \middle| t > 0; r \in \mathrm{I}_n^+, z \in (-\infty;+\infty) \right\}$$

розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jm,ik}}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \tag{13}$$

$$+\chi_j^2 u_{jm,ik} = G_{jm,ik}(t,r,z),\ r \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$\left. u_{jm,ik} \right|_{t=0} = g_{jm,ik}^1(r,z);\ \left.\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t}\right|_{t=0} = g_{jm,ik}^2(r,z), \tag{14}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty} = 0;\ \left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty} = 0; s = 0,1;\ j = \overline{1,n+1}, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_{1m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0;\ \left.\frac{\partial^s u_{n+1,m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0; s = 0,1 \tag{16}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right]\right|_{r=R_p} = 0; j = 1,2; p = \overline{1,n}, \tag{17}$$

де

$$G_{jm,ik}(t,r,z) = f_{jm,ik}(t,r,z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t,r,z);\ \nu_{jm,ik} = a_{zj} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}.$$

До двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної z [13]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\sigma z} dz \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \tag{18}$$

$$F^{-1}\left[\tilde{g}\left(\sigma\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}\left(\sigma\right)e^{i\sigma z}d\sigma\equiv g\left(z\right), \tag{19}$$

$$F\left[\frac{d^2g}{dz^2}\right]=-\sigma^2F\left[g\left(z\right)\right]\equiv-\sigma^2\tilde{g}\left(\sigma\right). \tag{20}$$

Інтегральний оператор F, який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20), задачі (13)–(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D''=\left\{\left(t,r\right)\middle|\,t>0;r\in \mathrm{I}_n^+\right\}$$

розв’язку одновимірних диференціальних рівнянь B-гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t^2}-a_{rj}^2B_{\nu_{jm,ik}}\left[\tilde{u}_{jm,ik}\right]+ \\ +\left(a_{zj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_{jm,ik}=\tilde{G}_{jm,ik}\left(t,r,\sigma\right);\ r\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{21}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik}\Big|_{t=0}=\tilde{g}_{jm,ik}^1\left(r,\sigma\right);\ \frac{\partial\tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t}\Bigg|_{t=0}=\tilde{g}_{jm,ik}^2\left(r,\sigma\right),r\in I_j;\,j=\overline{1,n+1}, \tag{22}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s\tilde{u}_{1m,ik}}{\partial r^s}\Bigg|_{r=0}=0;\ \frac{\partial^s\tilde{u}_{n+1,m,ik}}{\partial r^s}\Bigg|_{r=+\infty}=0;s=0,1 \tag{23}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^p\right)\tilde{u}_{pm,ik}-\left(\alpha_{j2}^p\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^p\right)\tilde{u}_{p+1,m,ik}\right]\Bigg|_{r=R_p}=0; \\ j=1,2;\,p=\overline{1,n}, \tag{24}$$

де $B_{\nu_{jm,ik}}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Фур’є-Бесселя на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо змінної r [11]:

$$H_{(n)}\left[f(r)\right]=\int\limits_0^{+\infty}f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)rdr\equiv\tilde{f}(\lambda), \tag{25}$$

$$H_{(n)}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda)\right]=\int\limits_0^{+\infty}f(\lambda)V(r,\lambda)\Omega\left(\lambda\right)d\lambda\equiv f(r), \tag{26}$$

$$H_{(n)}\left[B_{(m,ik)}[f(r)]\right] = -\lambda_s^2 \tilde{f}(\lambda) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r,\lambda) \sigma_k r dr; \; R_0 = 0; \; R_{n+1} = +\infty. \tag{27}$$

У формулах (25)–(27) беруть участь величини і функції:

$$V(r,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} V_k(r,\lambda) \Theta\left(r - R_{k-1}\right) \Theta\left(R_k - r\right) + V_{n+1}(r,\lambda) \Theta\left(r - R_n\right);$$

$$V_1(r,\lambda) = \Delta_n J_{\nu_{1m}}\left(q_1 r\right) : \Delta_n = \prod_{k=1}^{n} \Delta^k \equiv \prod_{k=1}^{n} \frac{2c_{2k}}{\pi R_k} \neq 0;$$

$$V_{k+1}(r,\lambda) = \prod_{j=k+1}^{n} \Delta^j \left[\varpi_{(\nu_m);2}^{(k)}\left(\lambda\right) J_{\nu_{k+1,m}}\left(q_{k+1} r\right) - \varpi_{(\nu_m);1}^{(k)}\left(\lambda\right) N_{\nu_{k+1,m}}\left(q_{k+1} r\right)\right];$$

$$V_{n+1}(r,\lambda) = \varpi_{(\nu_m);2}^{(n)}\left(\lambda\right) J_{\nu_{n+1,m}}\left(q_{n+1} r\right) - \varpi_{(\nu_m);1}^{(n)}\left(\lambda\right) N_{\nu_{n+1,m}}\left(q_{n+1} r\right);$$

$J_\nu\left(x\right)$ — циліндрична функція Бесселя 1-го роду ν-го порядку; N_ν — циліндрична функція Бесселя 2-го роду ν-го порядку;

$$a_k \equiv a_{rk}, \; q_k \equiv q_k\left(\lambda^2\right) = a_k^{-1}\left(\lambda^2 + \gamma_k^2\right)^{\frac{1}{2}}; \; \gamma_k \geq 0; \; k = \overline{1, n+1},$$

$$\left(\nu_m\right) \equiv \left(\nu_m\right)_{n+1} = \left(\nu_{1m}, \nu_{2m}, \ldots, \nu_{n+1,m}\right);$$

$$\sigma(r) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \Theta\left(r - R_{k-1}\right) \Theta\left(R_k - r\right) + \sigma_{n+1} \Theta\left(r - R_n\right);$$

$$\sigma_k = \frac{1}{a_k^2} \frac{c_{1k} \cdot c_{1,k+1} \cdots c_{1n}}{c_{2k} \cdot c_{2,k+1} \cdots c_{2n}}; \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}^2}; J_{\nu,\alpha}\left(x\right) = x^{-\alpha} J_\nu\left(x\right); N_{\nu,\alpha}\left(x\right) = x^{-\alpha} N_\nu\left(x\right);$$

$$u_{\nu_{km;ij}}^{k1}\left(q_p R_k\right) = \left(\frac{\nu_{km}}{R_k} a_{ij}^k + \beta_{ij}^k\right) J_{\nu_{km},0}\left(q_p R_k\right) - R_k^2 q_p^2 a_{ij}^k J_{\nu_{km+1},1}\left(q_p R_k\right);$$

$$u_{\nu_{km;ij}}^{k2}\left(q_p R_k\right) = \left(\frac{\nu_{km}}{R_k} a_{ij}^k + \beta_{ij}^k\right) N_{\nu_{km},0}\left(q_p R_k\right) - R_k^2 q_p^2 a_{ij}^k N_{\nu_{km+1},1}\left(q_p R_k\right);$$

$$i, j = 1, 2; \; k = \overline{1, n}; \; p = \overline{1, n+1};$$

$$\Psi_{\left(\nu_{km}, \nu_{k+1,m}\right);ij}^{k}\left(q_k R_k, q_{k+1} R_k\right) = u_{\nu_{km;11}}^{ki}\left(q_k R_k\right) u_{\nu_{k+1,m;22}}^{kj}\left(q_{k+1} R_k\right) -$$

$$-u_{\nu_{km;21}}^{ki}\left(q_k R_k\right) u_{\nu_{k+1,m;12}}^{kj}\left(q_{k+1} R_k\right); \; k = \overline{1, n};$$

$$\varpi_{\left(\nu_m\right)2;p}^{(1)}\left(q_1 R_1, q_2 R_1\right) \equiv \Psi_{\left(\nu_{1m}, \nu_{2m}\right);1p}^{1}\left(q_1 R_1, q_2 R_1\right) \equiv \varpi_{\left(\nu_m\right)2;p}^{(1)}\left(\lambda\right); \; p = 1, 2;$$

$$\varpi_{(\nu_m)k+1;j}^{(k)}(\lambda)=\varpi_{(\nu_m)k+1;j}^{(k)}\left(q_1R_1,q_2R_1,...,q_kR_k,q_{k+1}R_k\right)=$$

$$=\Psi_{(\nu_{km},\nu_{k+1,m});1j}^{k}\left(q_kR_k,q_{k+1}R_k\right)\varpi_{(\nu_m)k;2}^{(k-1)}\left(q_1R_1,q_2R_1,...,q_{k-1}R_{k-1},q_kR_{k-1}\right)-$$

$$-\Psi_{(\nu_{km},\nu_{k+1,m});2j}^{k}\left(q_kR_k,q_{k+1}R_k\right)\varpi_{(\nu_m)k;1}^{(k-1)}\left(q_1R_1,q_2R_1,...,q_{k-1}R_{k-1},q_kR_{k-1}\right);$$

$$k=\overline{2,n};\ j=1,2;\ (k)=123...k;\ (\nu_m)k=(\nu_{1m},\nu_{2m},...,\nu_{km}).$$

$$\Omega(\lambda)=\lambda\left\{\left[\varpi_{(\nu_m);1}^{(n)}(\lambda)\right]^2+\left[\varpi_{(\nu_m);2}^{(n)}(\lambda)\right]^2\right\}^{-1}.$$

$$B_{(m,ik)}=\sum_{j=1}^{n+1}a_j^2\Theta(r-R_{j-1})\Theta(R_j-r)B_{\nu_{jm,ik}}+a_{n+1}^2\Theta(r-R_n)B_{\nu_{n+1,m,ik}}$$

— гібридний диференціальний оператор Бесселя, $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [14].

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_1^2B_{\nu_{1m,ik}}+q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_2^2B_{\nu_{2m,ik}}+q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{n+1}^2B_{\nu_{n+1,m,ik}}+q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{G}_{1m,ik}(t,r,\sigma)\\ \tilde{G}_{2m,ik}(t,r,\sigma)\\ \dots\dots\dots\\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma)\end{bmatrix},\quad (28)$$

$$\left.\begin{bmatrix}\tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma)\\ \tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma)\\ \dots\dots\\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\tilde{g}_{1m,ik}^1(r,\sigma)\\ \tilde{g}_{2m,ik}^1(r,\sigma)\\ \dots\dots\\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}^1(r,\sigma)\end{bmatrix},$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma)\\ \tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma)\\ \dots\dots\\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\tilde{g}_{1m,ik}^2(r,\sigma)\\ \tilde{g}_{2m,ik}^2(r,\sigma)\\ \dots\dots\\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}^2(r,\sigma)\end{bmatrix},\quad (29)$$

де

$$q_j^2(\sigma)=a_{zj}^2\sigma^2+\chi_j^2;\quad j=\overline{1,n+1}.$$

Інтегральний оператор H_n, який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{(n)}[\cdots]=\Bigg[\int\limits_0^{R_1}\cdots V_1(r,\lambda)\sigma_1 rdr \quad \int\limits_{R_1}^{R_2}\cdots V_2(r,\lambda)\sigma_2 rdr \quad \cdots \int\limits_{R_{n-1}}^{R_n}\cdots V_n(r,\lambda)\sigma_n rdr \quad \int\limits_{R_n}^{+\infty}\cdots V_{n+1}(r,\lambda)\sigma_{n+1} rdr\Bigg] \tag{30}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda^2+\gamma_j^2+q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma), \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma)\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^1_{jm,ik}(\lambda,\sigma);\\ &\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma)\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^2_{jm,ik}(\lambda,\sigma),\end{aligned} \tag{32}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma)=\int\limits_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j rdr;\ j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma)=\int\limits_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{G}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j rdr,\ j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{\tilde{g}}^s_{jm,ik}(\lambda,\sigma)=\int\limits_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{g}^s_{jm,ik}(r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j rdr;\ j=\overline{1,n+1},\ s=1,2.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_1^2(\sigma),\ q_2^2(\sigma),\ \ldots,\ q_{n+1}^2(\sigma)\right\}=q_1^2(\sigma)$ і покладемо всюди $\gamma_j^2=$ $=q_1^2(\sigma)-q_j^2(\sigma);\ j=\overline{1,n+1}.$ Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}}{dt^2}+\Delta^2(\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}=\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma), \tag{33}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}^1_{m,ik}(\lambda,\sigma);\ \ \frac{d}{dt}\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}^2_{m,ik}(\lambda,\sigma), \tag{34}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma);\;\; \tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma),$$

$$\tilde{\tilde{g}}^{s}_{m,ik}(\lambda,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^{s}_{jm,ik}(\lambda_s,\sigma);\;\; \Delta^2(\lambda,\sigma)=\lambda^2+a_{z1}^2\sigma^2+\chi_1^2;\; s=1,2.$$

Відомо [11], що єдиним розв'язком задачі (33), (34) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)=N\left(t,\lambda,\sigma\right)\tilde{\tilde{g}}^{2}_{m,ik}(\lambda,\sigma)+\frac{d}{dt}N\left(t,\lambda,\sigma\right)\tilde{\tilde{g}}^{1}_{m,ik}(\lambda,\sigma)+$$
$$+\int_0^t N\left(t-\tau,\lambda,\sigma\right)\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\tau,\lambda,\sigma)d\tau, \tag{35}$$

де функція Коші (розв'язуюча функція)

$$N\left(t,\lambda,\sigma\right)=\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}.$$

Оскільки суперпозиція операторів $H_{(n)}$ та $H_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором $\left(H_{(n)}\circ H_{(n)}^{-1}=H_{(n)}^{-1}\circ H_{(n)}=\mathrm{I}\right)$, то оператор $H_{(n)}^{-1}$, як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{(n)}^{-1}\left[\cdots\right]=\begin{bmatrix}\int_0^{+\infty}\cdots V_1(r,\lambda)\Omega\left(\lambda\right)d\lambda\\ \int_0^{+\infty}\cdots V_2(r,\lambda)\Omega\left(\lambda\right)d\lambda\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int_0^{+\infty}\cdots V_{n+1}(r,\lambda)\Omega\left(\lambda\right)d\lambda\end{bmatrix} \tag{36}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)$ визначена формулою (35). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (21)–(24):

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)=\int_0^{+\infty}N\left(t,\lambda,\sigma\right)\tilde{\tilde{g}}^{2}_{m,ik}(\lambda,\sigma)V_j\left(r,\lambda\right)\Omega\left(\lambda\right)d\lambda+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{+\infty}N\left(t,\lambda,\sigma\right)\tilde{\tilde{g}}^{1}_{m,ik}(\lambda,\sigma)V_j\left(r,\lambda\right)\Omega\left(\lambda\right)d\lambda+ \tag{37}$$
$$+\int_0^t\int_0^{+\infty}N\left(t-\tau,\lambda,\sigma\right)\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)V_j\left(r,\lambda\right)\Omega\left(\lambda\right)d\lambda d\tau;\; j=\overline{1,n+1}.$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)$, визначених формулами (37), обернені оператори F^{-1} та $F^{-1}_{m,ik}$, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_{j,ik}(t,r,\varphi,z)=$$

$$=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+ \quad (38)$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_{-\infty}^{+\infty}Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau;\ j=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдині розв'язки гіперболічних початково-крайових задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}K_{jp}^{m,ik}\left(t,r,\rho,z\right)U_{m,ik}\left(\varphi\right)U_{m,ik}\left(\alpha\right) \quad (39)$$

матриці впливу (функції впливу) та функції

$$Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=$$

$$=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}K_{jp}^{m,ik}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\Phi_{m,ik}\left(\tau,\rho,\xi\right)U_{m,ik}\left(\varphi\right) \quad (40)$$

відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$K_{jp}^{m,ik}\left(t,r,\rho,z\right)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}N\left(t,\lambda,\sigma\right)V_j\left(r,\lambda\right)V_p\left(\rho,\lambda\right)\Omega\left(\lambda\right)\cos\left(\sigma z\right)d\lambda d\sigma.$$

Проаналізуємо формули (38) в залежності від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного циліндрично-кругового простору.

1^0. Нехай на гранях $\varphi=0$ та $\varphi=\varphi_0$ задано крайові умови (5). У цьому випадку функції

$$Q_{jp}^{11}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty} mK_{jp}^{m,11}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\times$$
$$\times\left[g_{1p}\left(\tau,\rho,\xi\right)+\left(-1\right)^{m+1}\varpi_{1p}\left(\tau,\rho,\xi\right)\right]\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.$$

Визначимо тангенціальні функції Гріна, породжені крайовими умовами (5), за формулами:

$$W_{jp,1}^{11}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)=\frac{2}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty} mK_{jp}^{m,11}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{11}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)=\frac{2}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-1\right)^{m+1} mK_{jp}^{m,11}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.$$

Тоді розв’язок задачі (1)–(4), (5), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,11}(t,r,\varphi,z)=$$
$$=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{11}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{11}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+$$
$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{11}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+ \qquad (41)$$
$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[W_{jp,1}^{11}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)g_{1p}\left(\tau,\rho,\xi\right)+$$
$$+W_{jp,2}^{11}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)\varpi_{1p}\left(\tau,\rho,\xi\right)\Big]\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau;\; j=\overline{1,n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jp}^{11}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$ і функцій Гріна $W_{jp,s}^{11}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)$, $\left(s=1,2\right)$, безпосередньо перевіряється, що функції $u_{j,11}(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (41), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3)–(5) та умови спряження (9) в сенсі теорії узагальнених функцій [14].

Єдиність розв’язку (41) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв’язків (функцій впливу та функцій Гріна) задачі (1)–(4), (5), (9).

Методами з [15, 16] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (41) визначають обмежений класичний розв’язок гіперболічної початково-крайової задачі (1)–(4), (5), (9).

Справедливою є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f(t,r,\varphi,z)$, $g^s(r,\varphi,z)$, $g_{1j}(t,r,z)$, $\varpi_{1j}(t,r,z)$, $j=\overline{1,n+1}$, $s=1,2$ задовольняють умови:

1) двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;
2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
3) абсолютно сумовні за змінною z на осі $(-\infty;+\infty)$;
4) абсолютно сумовні з ваговою функцією $\rho(r)=r\sigma(r)$ за змінною r на кусково-однорідній полярній осі I_n^+;
5) справджують умови спряження, то задача (1)–(4), (5), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається формулами (41).

2^0. Нехай на гранях $\varphi=0$ та $\varphi=\varphi_0$ задано крайові умови (5). У цьому випадку функції

$$Q_{jp}^{12}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}mK_{jp}^{m,12}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\pi\left(2m+1\right)}{2\varphi_0}g_{2p}\left(\tau,\rho,\xi\right)+\left(-1\right)^{m+1}\varpi_{2p}\left(\tau,\rho,\xi\right)\right]\sin\frac{\pi\left(2m+1\right)\varphi}{2\varphi_0}.$$

Визначимо тангенціальні функції Гріна, породжені крайовими умовами (6), за формулами:

$$W_{jp,1}^{12}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)=\frac{2}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(2m+1\right)K_{jp}^{m,12}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\sin\frac{\pi\left(2m+1\right)\varphi}{2\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{12}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-1\right)^{m+1}mK_{jp}^{m,12}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\sin\frac{\pi\left(2m+1\right)\varphi}{2\varphi_0}.$$

Тоді розв'язок задачі (1)–(4), (6), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,12}(t,r,\varphi,z)=$$

$$=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{12}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{12}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{12}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+ \qquad (42)$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[W_{jp,1}^{12}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right) g_{2p}\left(\tau,\rho,\xi\right) +$$

$$+ W_{jp,2}^{12}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right) \varpi_{2p}\left(\tau,\rho,\xi\right) \Big] \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Для розв'язку (42) справедлива теорема, аналогічна до теореми з пункту 1^0.

3^0. Нехай на гранях $\varphi = 0$ та $\varphi = \varphi_0$ задано крайові умови (7). У цьому випадку функції

$$Q_{jp}^{21}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=1}^{\infty} K_{jp}^{m,21}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right) \times$$

$$\times \left[-g_{3p}\left(\tau,\rho,\xi\right) + \left(-1\right)^{m+1} \frac{\pi\left(2m+1\right)}{2\varphi_0} \varpi_{3p}\left(\tau,\rho,\xi\right) \right] \cos\frac{\pi\left(2m+1\right)\varphi}{2\varphi_0}.$$

Визначимо тангенціальні функції Гріна, породжені крайовими умовами (7), за формулами:

$$W_{jp,1}^{21}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right) = -\frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=1}^{\infty} K_{jp}^{m,21}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right) \cos\frac{\pi\left(2m+1\right)\varphi}{2\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{21}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right) =$$

$$= \frac{2}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(-1\right)^{m+1} \left(2m+1\right) K_{jp}^{m,21}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right) \cos\frac{\pi\left(2m+1\right)\varphi}{2\varphi_0}.$$

Тоді розв'язок задачі (1)–(4), (7), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,21}(t,r,\varphi,z) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{21}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi) f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{21}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi) g_p^1(\rho,\alpha,\xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{21}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi) g_p^2(\rho,\alpha,\xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \tag{43}$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[W_{jp,1}^{21}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right) g_{3p}\left(\tau,\rho,\xi\right) +$$

$$+ W_{jp,2}^{21}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right) \varpi_{3p}\left(\tau,\rho,\xi\right) \Big] \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Для розв'язку (43) справедлива теорема, аналогічна до теореми з пункту 1^0.

4^0. Нехай на гранях $\varphi = 0$ та $\varphi = \varphi_0$ задано крайові умови (8). У цьому випадку функції

$$Q_{jp}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi) = \frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_m^{22}K_{jp}^{m,22}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\times$$

$$\times\left[-g_{4p}\left(\tau,\rho,\xi\right)+\left(-1\right)^{m+1}\varpi_{4p}\left(\tau,\rho,\xi\right)\right]\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.$$

Визначимо тангенціальні функції Гріна, породжені крайовими умовами (8), за формулами:

$$W_{jp,1}^{22}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right) = -\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{22}K_{jp}^{m,22}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{22}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right) = \frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{22}\left(-1\right)^{m+1}K_{jp}^{m,22}\left(t-\tau,r,\rho,z-\xi\right)\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.$$

Тоді розв'язок задачі (1)–(4), (8), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,22}(t,r,\varphi,z) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{22}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho\, d\xi\, d\alpha\, d\rho\, d\tau +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{22}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho\, d\xi\, d\alpha\, d\rho +$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{22}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho\, d\xi\, d\alpha\, d\rho + \tag{44}$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[W_{jp,1}^{22}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)g_{4p}\left(\tau,\rho,\xi\right)+\right.$$

$$\left.+W_{jp,2}^{22}\left(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)\varpi_{4p}\left(\tau,\rho,\xi\right)\right]\sigma_p\rho^{-1}d\xi\, d\rho\, d\tau;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Для розв'язку (44) також справедлива теорема, аналогічна до теореми з пункту 1^0.

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі.

Зауваження 2. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ зводиться до розглянутого нами заміною $\varphi' = \varphi - \varphi_1$ $\left(\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1\right)$.

Зауваження 3. Аналіз розв’язків (38) в залежності від аналітичного виду функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^s(r,\varphi,z)$, $g_{kj}(t,r,z)$, $\varpi_{kj}(t,r,z)$, $j = \overline{1,n+1}$, $s = 1,2$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв’язки узагальнених математичних моделей коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі. Одержані розв’язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків.

Список використаних джерел:

1. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
2. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2001. — 606 с.
3. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
4. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
5. Каленюк П. И. Обобщенный метод разделения переменных / П. И. Каленюк, Я. Е. Баранецкий, З. Н. Нитребич. — К. : Наук. думка, 1993. — 232 с.
6. Самойленко В. Г. Рівняння математичної фізики / В. Г. Самойленко, І. М. Конет. — К. : ВПЦ «Київський університет», 2014. — 283 с.
7. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
8. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. — 244 с.

11. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. — 84 с.
12. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
13. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
14. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965. — 408 с.
15. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 247 с.
16. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

By means of method integral transforms and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (matrix influence and Green's matrix) built an exact analytical solution of a generalized mathematical model of oscillatory processes (hyperbolic initial-boundary value problems conjugation) in wedge-shaped piecewise homogeneous cylindrical-circular space.

Key words: *modelling, oscillating, hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transformation, the influence matrix, Green's matrix.*

Отримано: 13.10.2017