

discharges of water are carried out and only a 5.6% increase in rigidity in the Krasnopavliv reservoir during the first 12 days.

Key words: *neural networks, water exchange modeling, perceptron model, simulation scenarios, ecosystem approach, category and water quality class.*

Отримано: 28.05.2018

УДК 537.7

О. Д. Кожушко, молодший науковий співробітник,

П. М. Мартинюк, д-р техн. наук, професор

Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ РОЗЛИВУ ЗАБРУДНЮЮЧОЇ РЕЧОВИНИ НА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ В ҐРУНТІ ЗАСОБАМИ КОМП'ЮТЕРНОГО ТА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Комп'ютерне та математичне моделювання процесів вологоперенесення в ґрунтах займає чільне місце при проектуванні гідроспоруд, дослідженні стійкості зсувонебезпечних ґрунтових масивів, прогнозуванні врожайності тощо. Ці задачі є складовими забезпечення економічної безпеки держави.

Для формулювання задачі вологоперенесення в даній роботі використовувалася модель, що враховує взаємопов'язані процеси перенесення вологи, тепла та хімічних речовин. Розглянуто різні змінні параметри середовища та згаданих процесів, а також описано деякі залежності для їх знаходження. Дослідження даної моделі здійснено на прикладі двовимірної задачі для випадку розливу забруднюючої речовини на поверхні ґрунту. Особливістю такої задачі є забруднення ґрунту внаслідок адсорбції твердими частками ґрунту хімічної речовини. У цьому випадку, на нашу думку, особливо важливим стає врахування зміни пористості ґрунту, що відбувається внаслідок збільшення об'єму твердих часток. Також відіграють свою роль зміна густини порової рідини, що зростає при розчиненні у ній забруднюючих солей, та явище хімічного осмосу, що впливає на рух рідини.

Поставлена задача вологоперенесення в ґрунті з врахуванням змінної пористості була розв'язана чисельно методом скінченних елементів. Програмна реалізація відповідних алгоритмів здійснена в середовищі FreeFem++. Здійснено чисельні експерименти, в яких порівняно розв'язки класичної задачі вологоперенесення та поставленої задачі із врахуванням тепломасопере-

несення. У другому випадку в розподіл вологи у ґрунті спостерігалися значно більші перепади вологості. Це більш точно відображає умови розглянутої задачі та пояснюється впливом описаних вище змінних параметрів процесу. Результати чисельних експериментів свідчать про важливість врахування масоперенесення та пов'язаних із ним факторів для подібних задач.

Ключові слова: *математична модель, пористе середовище, вологоперенесення, масоперенесення, метод скінченних елементів.*

Вступ. Складність моделювання процесів вологоперенесення полягає у тому, що на їх перебіг впливає велика кількість інших факторів та процесів. Серед них — перенесення та дифузія розчинених речовин, масообмін між фазами ґрунту, теплоперенесення та сонячна активність, динаміка опадів, розвиток рослинності та відбір вологи їх кореневою системою, фільтраційне руйнування поверхневими та підземними водами тощо [14]. При цьому відбувається зміна вологості та параметрів пористого середовища, які, в свою чергу, здійснюють вплив на перелічені процеси. Наприклад, пористість ґрунту значною мірою залежить від ступеня його засоленості та динаміки масообмінних процесів; на коефіцієнт фільтрації чинять вплив тепловий стан порової рідини, її хімічний склад та рівень вологи у ґрунті [11]. Такі залежності є складними, і часто навіть неоднозначними, наприклад, явище гістерезису [17].

Математичне моделювання взаємозв'язаних процесів в гетерогенних пористих середовищах на даний час інтенсивно розвивається. Наприклад, математичні моделі для дослідження вказаних процесів в контексті прогнозування врожайності побудовані в [17]. У роботах [12, 16] запропоновано моделі, що описують переміщення вологи, водяної пари та повітря у ґрунті при неізотермічних умовах. У [2], [3] показано вплив температури та солеперенесення на перебіг процесу фільтраційної консолідації. Процеси тепло- та вологоперенесення у ґрунті під час пожеж розглянуто у [13]. Також вивчається вплив вказаних процесів на параметри ґрунту, наприклад у [7] досліджено вплив теплосолеперенесення на зміну коефіцієнта фільтрації. У роботі [6] проаналізовано залежності параметрів компонент ґрунту (коефіцієнта вологоперенесення, коефіцієнта дифузії ґрунтової вологи, пористості тощо) від впливу врахованих факторів. Вплив ще одного змінного параметру, густини порової рідини, розглянутий у роботі [5]. Крім того, вивчаються процеси вологоперенесення в інших середовищах. Зокрема, застосування існуючих моделей вологоперенесення до процесів сушіння зерна було здійснено у [4].

В роботі [6] побудовано математичну модель вологоперенесення в умовах впливу техногенних факторів при змінній пористості ґрунту. Зміна пористості впливає на зміну насиченості пористого середовища, що

опосередковано впливає і на вологість. Однак, числових досліджень відповідних нелінійних крайових задач проведено ще не було. Це і становить мету даної роботи. В якості конкретизації для числових експериментів розглянемо двовимірну задачу у випадку розливу забруднюючої речовини на поверхні ґрунту. Задача є актуальною з точки зору екосистем, сільського господарства, водного господарства.

Чисельне розв'язування нелінійної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних у двовимірному випадку вимагає складних обчислювальних алгоритмів та затрат ресурсів ЕОМ. З метою спрощення програмної реалізації таких задач часто використовуються вже існуючі пакети прикладних програм. При розв'язуванні поставленої в даній роботі задачі використаємо програмне середовище FreeFem++, яке реалізує розв'язування крайових задач математичної фізики методом скінченних елементів [10].

Математична модель. Дослідимо модель вологоперенесення в обмеженій двовимірній області Ω з межею Γ для випадку однокомпонентного хімічного розчину. Маємо нелінійну математичну модель, яка містить наступні рівняння (1)–(3):

1. Рівняння вологоперенесення

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} (s(\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) + \rho_p (\sigma - \theta_{\min}) \frac{\partial s}{\partial t} + \\ & + \rho_p s \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\rho_p D((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s + s \nabla \sigma)) + \\ & + \nabla \cdot (\rho_p (K_p \nabla y - K_c \nabla c)), X \in \Omega, t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Рівняння солеперенесення

$$\theta \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_c \nabla c) - q_p \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c - \frac{\partial N}{\partial t}, X \in \Omega, t > 0. \quad (2)$$

3. Рівняння кінетики масообмінного процесу вигляду

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N), X \in \bar{\Omega}, t > 0. \quad (3)$$

У вищенаведених рівняннях використані наступні позначення:

θ — об'ємна вологість ґрунту; $s = \frac{\theta(X, t) - \theta_{\min}}{\sigma(X, t) - \theta_{\min}}$ — функція насичення

(відносна вологість); σ — пористість ґрунту; σ_0 — пористість «скелету» ґрунту із твердих водонерозчинних частинок; θ_{\min} — залишкова (мінімальна) вологість; c — концентрація хімічної речовини в поровій рідині; N — концентрація хімічної речовини в твердих частках ґрунту;

ρ_p — густина порової рідини; $q_p = -D_p \nabla \theta - K_p \nabla x_2 + K_c \nabla c$ — вектор швидкості руху порової рідини; D_p — коефіцієнт дифузії ґрунтової вологи; K_p — коефіцієнт вологоперенесення; K_c — коефіцієнт хімічного осмосу; D_c — коефіцієнт конвективної дифузії; ρ_c — густина хімічної речовини в твердій компоненті.

Рівняння кінетики масообмінних процесів подано у загальному вигляді (3). Існують різні способи конкретизації цього рівняння. В даній роботі використано рівняння нерівноважної оборотної адсорбції і десорбції розчинених речовин при ізотермі Генрі [1, с. 175]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (c\sigma - \alpha N), \quad (4)$$

де γ_1 — стала швидкості адсорбції та десорбції, $\alpha = 1/\Gamma$ — коефіцієнт розподілу, $\Gamma = N_0/\sigma c_0$ — коефіцієнт Генрі, N_0, c_0 — рівноважні концентрації речовини в твердій та рідкій фазах ґрунту.

Коефіцієнти D_p, K_p, K_c, K_T, D_c в рівняннях (1), (2) в загальному випадку є тензорами. Надалі приймемо, що ґрунт є ізотропним, і вважатимемо дані коефіцієнти скалярними функціями. Це не зменшує загальності подальших викладок. В статті використано нижченаведені способи отримання деяких змінних характеристик середовища та параметрів процесу вологоперенесення.

Густина порової рідини $\rho_p(c, T)$. В якості забруднюючої речовини для даної задачі прийнято концентрований розчин кам'яної солі (NaCl), адже характеристики його розчинів є добре вивченими. Зокрема, формулу залежності густини водного розчину від концентрації солі та температури T наведено в роботі [15]

$$\rho_p(c, T) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} c^{j-1} T^{i-1}.$$

Зауважимо, що концентрація солей c у даній формулі вимірюється у відсотках від маси, а не у $\text{кг}/\text{м}^3$, як у решті формул. За допомогою визначень концентрації та густини отримана наступна формула для переходу від c ($\text{кг}/\text{м}^3$) до $c_{\%}$:

$$c_{\%} = \frac{c}{\rho_p}.$$

Пористість $\sigma(N)$. Згідно [6], та враховуючи той факт, що розглядаємо вплив лише одного хімічного елемента, маємо наступну залежність для пористості:

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{N}{\rho_c}$$

Вважаємо пористість скелету ґрунту σ_0 та густину солі ρ_c сталими. В такому випадку отримуємо похідну від пористості за N у вигляді $\frac{\partial \sigma}{\partial N} = \frac{1}{\rho_c}$ — тобто можемо вважати залежність динаміки зміни пористості від концентрації солей в твердій компоненті ґрунту сталою.

Коефіцієнти вологоперенесення та дифузії. Існує велика кількість емпіричних формул для визначення коефіцієнтів вологоперенесення та дифузії. Для розв'язування даної задачі використаємо, наприклад, одну із поширених моделей, що має назву модель ВС (Brooks — Corey model) [9]:

$$K_p(c, T, s, \sigma) = K_0(c, T, \sigma) s^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}},$$

$$D(c, T, s, \sigma) = D_0(c, T, \sigma) s^{2+\frac{1}{\lambda}}, D_0 = \frac{K_0(c, T, \sigma) \psi_b}{\lambda(\sigma - \theta_{\min})},$$
(5)

де $K_0(c, T, \sigma)$ — коефіцієнт фільтрації, λ — характеристичний параметр розподілу розміру пор ґрунту; ψ_b — тиск повітря у ґрунті.

Коефіцієнт фільтрації K_0 . Коефіцієнт фільтрації входить як складова частина залежностей для коефіцієнтів вологоперенесення та дифузії ґрунтової вологи. Він залежить від великої кількості фізико-механічних та хімічних факторів, в тому числі від температури та хімічного складу порової рідини. Також значною мірою він залежить від коефіцієнта пористості ґрунту e — величини, що пов'язана з пористістю σ рівністю

$$e = \frac{\sigma}{1 - \sigma}$$

Однією із найпростіших емпіричних формул для залежності коефіцієнта фільтрації від e є формула Козені-Кармана

$$K_0 = k_0 \frac{1 - e_0}{1 - e} \left(\frac{e}{e_0} \right)^3,$$

де k_0, e_0 — початкові значення коефіцієнтів фільтрації та пористості. Початкові значення коефіцієнта фільтрації обчислювалося залежно від концентрації речовини в поровій рідині згідно емпіричної формули [2] (значення коефіцієнтів $a_i, i = 0, 5$ наведено в [2, с. 163])

$$k_0(c) = a_5 c^5 + a_4 c^4 + a_3 c^3 + a_2 c^2 + a_1 c + a_0.$$

Решта коефіцієнтів (коефіцієнти осмосу, конвективної дифузії, теплоємності та ін.) вважаємо сталими.

Постановка задачі. Нехай маємо масив ґрунту шириною L м та глибиною H м. Припустимо, що ґрунтовий масив настільки довгий, що цією довжиною можна знехтувати і розглянути профільну двовимірну задачу. Верхня межа шару ґрунту контактує з атмосферою. Нижня межа ґрунту з певних причин є непроникною — або лежить на кам'яній основі, або на слабопроникних глинистих ґрунтах. Дослідимо процеси вологоперенесення в заданому масиві ґрунту у випадку розливу на поверхні рідини з високою концентрацією хімічної речовини.

На нижній межі Γ_1 встановлено граничні умови, що відповідають непроникності

$$\left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad X \in \Gamma_1, t \geq 0.$$

На бічних межах встановлюємо умови симетричності, що математично аналогічні умовам непроникності

$$\left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0, \quad X \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, t \geq 0.$$

Згідно поставленої задачі, на верхній межі Γ_3 маємо граничні умови першого роду, що відповідають повній насиченості ґрунту та концентрації солі у поровій рідині такої, як і в розлитому розчині C_2

$$s(X, t)|_{\Gamma_3} = 1, \quad c(X, t)|_{\Gamma_3} = C_2, \quad X \in \Gamma_3, 0 \leq t \leq t_1.$$

Проте, коли розлита рідина випарується або вбереться ґрунтом (позначимо цей момент часу t_1) межа Γ_3 стане межею контакту з атмосферою. Для цього випадку встановлено умову Данквертса для рівняння солеперенесення та граничну умову другого роду, що відповідає випаровуванню, для рівняння вологоперенесення [8, с. 47]

$$\left[D_c \frac{\partial c}{\partial n} - (q_p, n)(c - C_1) \right] \Big|_{\Gamma_3} = 0,$$

$$-D_p \frac{\partial s}{\partial n} (\sigma - \theta_{\min}) \Big|_{\Gamma_3} = q_E, \quad X \in \Gamma_3, t > t_1,$$

де q_E — обсяг випаровування вологи з поверхні ґрунту.

Момент часу t_1 , до якого розлита речовина знаходиться на поверхні ґрунту, визначено з наступних міркувань. Нехай маємо Q — об'єм рідини, що знаходиться на поверхні. Рідина просочується у ґрунт зі швидкістю q_p , та випарується зі швидкістю q_E . Маємо наступну формулу для визначення залишку рідини на поверхні:

$$Q^i = Q^{i-1} + \left((q_p, n) - q_E \right) \cdot \Delta t,$$

де Q^i — залишок рідини на поверхні на i -му часовому кроці, Δt — величина часового кроку, n — вектор зовнішньої нормалі до межі Γ_3 . Таке значення часового кроку i , при якому Q^i досягне нуля, тобто вичерпаються поверхневі запаси рідини, і буде відповідати моменту часу t_1 .

При розв'язуванні поставлених задач виділено два основні випадки та порівняно їх результати:

1. Класична задача вологоперенесення — враховані лише рівняння вологоперенесення у вигляді рівняння Річардса та зміна коефіцієнтів вологоперенесення та дифузії згідно (5).
2. Вологоперенесення із врахуванням солеперенесення з усіма переліченими вище змінними параметрами.

Слабка постановка задачі. Домножуємо обидві частини рівняння (1) на довільну функцію $v \in H_0$, $H_0 = \left\{ v(x) : v(x) \in W_2^1, v(x)|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$ та інтегруємо по області Ω . Маємо

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} (s(\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) v d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} \left(\rho_p (\sigma - \theta_{\min}) \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_p s \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} \right) \right) v d\Omega = \\ & = \iint_{\Omega} \left(\nabla \cdot (\rho_p D((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s + s \nabla \sigma)) + \nabla \cdot (\rho_p (K_p \nabla y - K_c \nabla c)) \right) v d\Omega. \end{aligned}$$

До тих доданків, що містять оператор дивергенції, застосовуємо формулу Остроградського-Гаусса та використовуємо відповідні граничні умови. Дискретизацію задачі здійснюємо у вигляді неявної схеми. Отримуємо слабку постановку рівняння (1)

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{c^{k+1} - c^k}{\Delta t} (s^{k+1} (\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) v d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} \rho_p s^{k+1} \left(\frac{\sigma^{k+1} - \sigma^k}{\Delta t} + \frac{1}{\rho_c} \frac{N^{k+1} - N^k}{\Delta t} \right) v d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \rho_p (\sigma - \theta_{\min}) \frac{s^{k+1} - s^k}{\Delta t} v + \rho_p (K_p \nabla y - K_c \nabla c^{k+1}) \cdot \nabla v d\Omega - \\ & - \iint_{\Omega} \left(\rho_p D((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s^{k+1} + s^{k+1} \nabla \sigma) \right) \cdot \nabla v d\Omega = 0, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Виконавши аналогічні операції над рівнянням (2), отримуємо

$$\iint_{\Omega} \theta \left(1 - \frac{c^k}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{c^{k+1} - c^k}{\Delta t} v d\Omega + \iint_{\Omega} (D_c \nabla c^{k+1}) \cdot \nabla v d\Omega + \\ + \iint_{\Omega} \left(1 - \frac{c^k}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c^{k+1} \cdot q_p v d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{N^{k+1} - N^k}{\Delta t} v d\Omega = 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Рівняння (4) достатньо лише дискретизувати за часом

$$\frac{N^{k+1} - N^k}{\Delta t} = -\gamma_1 (c^{k+1} \sigma - \alpha N^{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots$$

Його розв'язок шукаємо ітераційно у вигляді

$$N^{k+1} = \frac{N^k - \gamma_1 c^{k+1} \sigma \Delta t}{1 - \gamma_1 \alpha \Delta t}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Результати числових експериментів та їх аналіз. При проведенні числових модельних експериментів використано такі значення коефіцієнтів:

$$K_c = 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^5}{\text{кг} \times \text{доба}}, D_c = 0.01 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, C_m = 365 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \\ \rho_c = 2165 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \Delta t = 1 \text{ доба}, \gamma_1 = 0.1 \text{ доба}^{-1}, T = 20^\circ \text{C}, \\ \alpha = 0.33, \lambda_1 = 3, \psi_b = 100 \text{ кПа}, \theta_{\min} = 0.065.$$

У тих випадках задачі, коли зміна описаних вище параметрів не враховувалася, вони приймалися рівними наступним значенням:

$$\rho_p = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, k_0 = 0.013 \frac{\text{м}}{\text{доба}}, K_p = 0.013 \frac{\text{м}}{\text{доба}}, \\ D_p = 0.02 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}.$$

Розміри області — $L = 1 \text{ м}$, $H = 4 \text{ м}$. Функції, що визначають початкові та граничні умови задачі, вибрані наступним чином:

$$S_0 = 0.5, C_0 = 8 \frac{\Gamma}{\text{л}}, N_0 = 10 \frac{\Gamma}{\text{л}}, \sigma_0 = 0.4, Q^0 = 0.01 \text{ м}, \\ C_1 = C_{\min} = 8 \frac{\Gamma}{\text{л}}, C_2 = C_{\max} = 250 \frac{\Gamma}{\text{л}}, q_E = 0.007.$$

Розв'язок задачі знайдено у програмному середовищі FreeFem++. Це — безкоштовне програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних методом скінченних елементів. Воно містить засоби для аналітичного опису областей, граничних умов, автоматичного генерування сіток скінченних елементів, розв'язування крайових задач у слабкій постановці та побудови дво- та тривимірних графіків. FreeFem++ має власну C-подібну мову, що дозволяє програмувати алгоритми розв'язування задач, зокрема методи дискретизації та лінеаризації [10].

Поставлена задача розв'язана на 30-денному проміжку часу з кроком в 1 день. Як вже сказано вище, у статті порівняно розв'язки задачі вологоперенесення у її класичному випадку (s) та із врахуванням масоперенесення (s^*). На рис. 1 зображені графіки зміни розподілу вологи з часом (отримані за допомогою утиліти gnuplot).

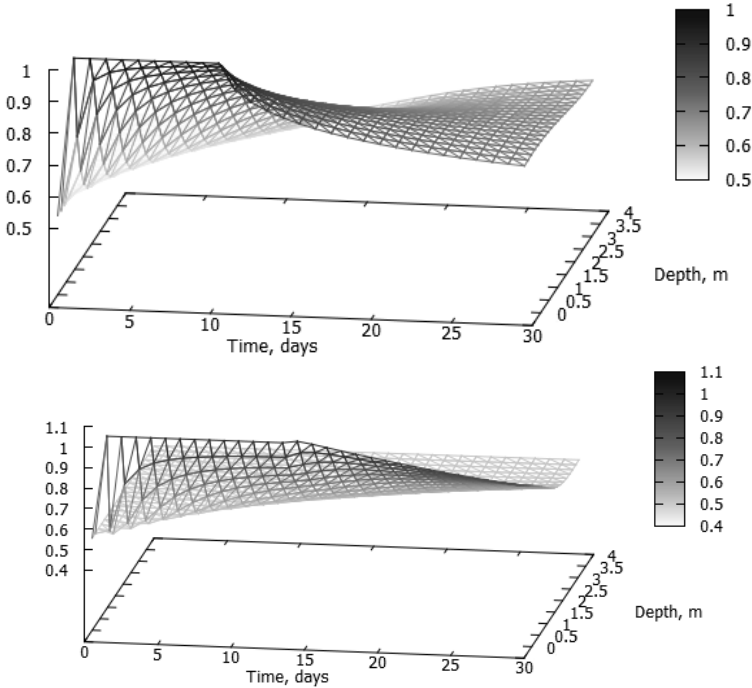


Рис. 1. Графіки розподілу вологи з часом на бічній межі Γ_4 у класичній задачі q_E (зверху) та у задачі із врахуванням масоперенесення s^* (знизу)

З рис. 1 видно, що у класичній задачі розлита речовина швидше просочується у ґрунт. Для класичної задачі кількість днів, які речовина затримувалася на поверхні ґрунту, становить $t_1 = 10$, а у випадку врахування масоперенесення — $t_1 = 13$ днів. Також помітно, що у класичній задачі швидше спадає рівень вологи на верхній межі.

Розглянемо також побудовані у FreeFem++ графіки розподілу вологи на останньому часовому кроці $t = 30$ для обох задач, а також графік відносної різниці між ними, що обчислюється у вигляді (при умові $s \neq 0$)

$$\Delta_s = \frac{|s^* - s|}{s} \cdot 100\%.$$

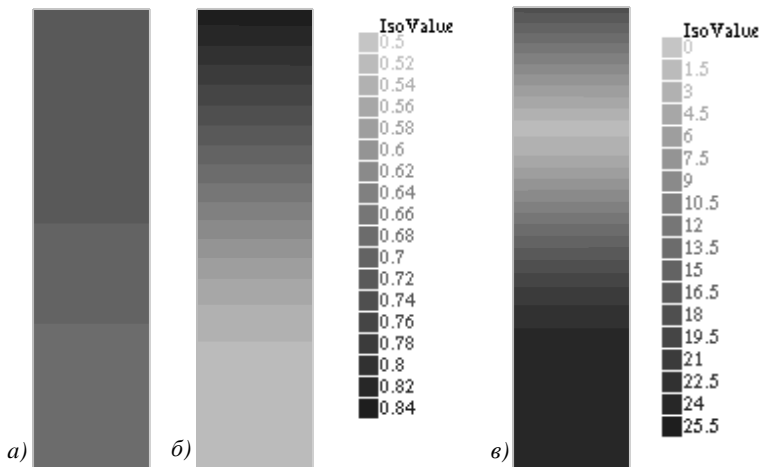


Рис. 2. Розв'язки класичної задачі вологоперенесення q_E (а), поставленої в роботі задачі q_E (б) та їх різниця Δ_s , % (в)

З рис. 2 бачимо, що у класичній задачі волога просочується на всю глибини ґрунту та встановлюється на рівні 0,66–0,72. В той же час при врахуванні масопереносу розлита волога не досягає нижньої межі, де значення вологості залишається рівним початковій умові. Відносна різниця вологостей як розв'язків цих задач досягає 25% біля нижньої межі. Така різниця зумовлюється насиченістю розлитого розчину: концентрований розчин має більшу густину та в'язкість, що сповільнює рух рідини. Також присутнє явище хімічного осмосу, що змушує порову рідини рухатися у напрямку зростання градієнта концентрації, тобто до верхньої межі. Крім того, адсорбція солі твердими частками призводить до збільшення їх об'єму та зменшення пористості ґрунту. Всі ці фактори призводять до сповільнення швидкості вологоперенесення.

Висновки. У статті досліджено математичну модель задачі вологоперенесення в умовах змінної пористості. Розглянуто деякі, пов'язані з впливом солеперенесення, змінні параметри процесу вологоперенесення та деякі, описані в науковій літературі, способи їх отримання. Сформовано математичну постановку задачі вологоперенесення у випадку розливу на поверхні рідини з високою концентрацією забрудника. Програмну реалізацію розв'язування відповідної задачі здійснено із застосуванням пакету FreeFem++. Під час проведення числових експериментів для модельних випадків порівнювалися розв'язки класичної задачі та задачі з врахуванням солеперенесення в умовах змінної пористості. В результаті встановлено, що у задачі із врахуванням солеперенесення рух вологи відбувався повільніше, забруднююча речовина довше знаходилася на

поверхні ґрунту (13 днів у порівнянні з 10). Відносна різниця розв'язків цих задач досягає 25% на глибині більше 3 м.

Подальші дослідження за даною темою можуть стосуватися ускладнення області задачі, зокрема розгляду її тривимірного випадку. Також варто розглянути вплив теплоперенесення.

Список використаних джерел:

1. Веригин Н. Н. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян и др. — М. : Недра, 1977. — 271 с.
2. Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації зростаючого шару ґрунту за наявності солепереносу в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2006. — Вип. 49. — № 4. — С. 157–166.
3. Власюк А. П. Числове розв'язування двовимірної задачі фільтраційної когнідації ґрунтового масиву за наявності тепло-масоперенесення в деформівній області / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, М. В. Каленик // Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика. — 2007. — Вип. 13. — С. 78–89.
4. Гайвась Б. Конвективно-теплове сушіння шару зерна / Б. Гайвась, Є. Чапля, Д. Чаплаєв // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2015. — Вип. 21. — С. 39–51.
5. Герус В. А. Узагальнення рівнянь фільтрації та тепломасоперенесення на випадок суфозійних процесів / В. А. Герус, Т. В. Кутя, П. М. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — 2016. — Вип. 14. — С. 48–63.
6. Кутя Т. В. Рівняння вологоперенесення в ґрунтах з урахуванням теплових та хімічних чинників / Т. В. Кутя, В. А. Герус, П. М. Мартинюк // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2017. — Т. 60, № 1. — С. 169–177.
7. Медвідь Н. В. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача) / Н. В. Медвідь, П. М. Мартинюк // Вісник Тернопільського національного технічного університету. — 2015. — Вип. 4 (80). — С. 172–181.
8. Мічута О. Р. Математичне моделювання процесів хімічної та контактної суфозії в ґрунтах / О. Р. Мічута, П. М. Мартинюк, В. А. Герус. — Рівне : Вид-во НУВГП, 2016. — 207 с.
9. Study and comparison the efficiency of Mualem-Van Genuchten and Brooks-Corey models in predicting unsaturated hydraulic conductivity in compacted soils / Н. Abbaspour, М. Sorafa, R. Daneshfaraz et al. // Journal Civil Engineering and Urbanism. — 2012. — Vol. 2 (2). — P. 56–62.
10. FreeFem++. Third Edition. Laboratoire Jacques-Louis Lions / F. Hecht, S. Auliac, O. Pironneau et al. — Paris : Universite Pierre et Marie Curie. — 378 p. — URL: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++.doc.pdf>.
11. Modeling coupled water flow, solute transport and geochemical reactions affecting heavy metal migration in a podzol soil / D. Jacques, J. Simunek, D. Mallants et al. // Geoderma. — 2008. — Vol. 145 (3–4). — P. 449–461.

12. Mathematical model of nonisothermal moisture referrence in the form of water and vapor in soils in the case of chemical internal erosion / P. M. Martyniuk, M. T. Kuzlo, S. K. Matus et al. // Far East Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 102 (12). — P. 3211–3221.
13. Massman W. J. Modeling soil heating and moisture transport under extreme conditions: Forest fires and slash pile burns / W. J. Massman // Water Resources Research. — 2012. — Vol. 48. — W10548. — P. 1–12.
14. Saifadeen, A., Gladneyva, R. Modeling of solute transport in the unsaturated zone using HYDRUS-1D. Division of Water Resources Engineering / A. Saifadeen, R. Gladneyva. — Lund University. — 74 p. — URL: <https://lup.lub.lu.se/student-papers/search/publication/3051081> (дата звернення: 14.04.2018)
15. Mathematical modeling of density and viscosity of NaCl aqueous solutions / A. I. Simion, C.-G. Grigoras, A.-M. Rosu et al. // Journal of Agroalimentary Processes and Technologies. — 2015. — Vol. 21 (1). — P. 41–52.
16. Shao W. Simulations of coupled non-isothermal soil moisture transport and evaporation fluxes in a forest area / W. Shao, Y. Su, J. Langhammer // Journal of Hydrology and Hydromechanics. — 2017. — Vol. 65 (4). — P. 410–425.
17. Theory of SWAP version 2.0. Simulation of water flow, solute transport and plant growth in the Soil-Water-Atmosphere-Plant environment / J. C. Van Dam, J. Hyugen, J. G. Wesseling et al. — Wageningen Agricultural University and DLO Winand Staring Centre, 1997. — 168 p.

INVESTIGATING THE INFLUENCE OF SPILLED CONTAMINANT ON SOIL MOISTURE TRANSPORT BY THE MEANS OF COMPUTER AND MATHEMATICAL MODELLING

Computer and mathematical modelling of moisture transport processes holds a prominent place in designing hydraulic structures, evaluating strength of potential slide soils, modelling crop growth etc. Such problems are among those constituting economic security of the country.

For the purpose of formulating moisture transport problem the model including interconnected processes of moisture, heat and mass transfer has been used in this paper. Different variable environmental and process parameters have been considered, as well as some relations for their calculating. Investigation of the given model has been conducted for the instance of the two-dimensional problem in the case of contaminant spillage on the soil surface. The characteristic feature of this problem is contamination of the soil in consequence of contaminant adsorption by the solid soil particles. In this case, we believe that accounting for porosity changes, which occur due to expansion of soil particles, is highly important. Moreover, other factors are making difference, such as variable pore solute density, which is increasing on dissolving contaminant salts, and the chemical osmosis, which influences soil water flow.

The set moisture transport problem including variable porosity has been solved numerically using the finite element method. Program implementation of the corresponding algorithms has been conducted in FreeFem++ environment. A series of numerical experiments has been done, and solutions of the classical moisture transport problem and the one considering mass and heat

transport have been compared. In the second case moisture distribution in the soil is much more irregular. It reflects more accurately the setting of the problem and is explained by the impact of mentioned above variable parameters. The results of the numerical experiments attest the importance of considering mass transfer and accompanying factors for that kind of problems.

Key words: *mathematical model, porous medium, moisture transport, mass transfer, finite element method.*

Отримано: 18.05.2018

УДК 004.942+681.62

Я. Ю. Коляно*, канд. фіз.-мат. наук,

Є. Г. Іваник**, канд. фіз.-мат. наук,

О. В. Сікора***, канд. техн. наук,

М. В. Дорошенко***, канд. фіз.-мат. наук

*Українська Академія друкарства, м. Львів,

**Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів,

***Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка, м. Дрогобич

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В КОМПОЗИТНИХ ПОЛІГРАФІЧНИХ СТРУКТУРАХ

Сформульовано математичну модель процесу кондуктивного нагрівання композитних поліграфічних систем, яка зводиться до розв'язування початково-крайової задачі для однорідного нестационарного рівняння теплопровідності для двошарової пластини з несиметричними граничними умовами. Отриману початково-крайову задачу для нестационарного рівняння теплопровідності розв'язано методом інтегральних перетворень Лапласа, а саме: методом інтегральних перетворень Лапласа в аналітичному вигляді отримано трансформанти розподілів температури в спряжених шарах. Трансформанти розподілів температури представляються у вигляді лінійних комбінацій гіперболічних тригонометричних функцій. Проведено чисельні обрахунки стаціонарної задачі теплопровідності для двошарової нескінченної пластини щодо кондуктивного сушіння; для дослідження взято композитні структури полімер-картон і полімер-папір. Визначено теплофізичні параметри картону, паперу і поліуретану, що дає змогу моделювати процес кондуктивного нагрівання картону різної товщини на основі встановленого стаціонарного розподілу температури в двошарових композитах типу поліуретан-папір, поліуретан-картон, внаслідок чого виникає можливість удосконалення процесу кондуктивного нагрівання двоша-