

and business organization model is the imitational business model of the enterprise. The Petri nets have been considered as a means to build and analyze system dynamic models. The analysis allows eliciting information on structure and dynamic behavior of the modeled system. This information is required to assess the modeled system and generate suggestions on its improvement. This allows flexible usage of the above mathematical apparatus to reflect and analyze cause-and-effect relations in different processes in discrete dynamic systems. Behavior of such systems is described by the execution of the event model and Petri nets are used to model structure and dynamics of its functioning. There have been described methods and elements of enterprise dynamic modeling based on Petri nets. Types and essential features of Petri nets are described. There has been given recommendation for process modeling in the Petri nets streams. There has been demonstrated that efficiency of Petri nets is significantly high.

Key words: *model, enterprise, business processes, business functions, classifications, rules, roles, Petri nets, structural component, structural block.*

Отримано: 14.05.2018

УДК 519.6

О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук, професор,

М. В. Артюх

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ТЕСТУВАННЯ МЕТОДУ ПОБУДОВИ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ (ВФЗКЕ)

В статті розглядається класична виробнича функція Кобба-Дугласа, яка є виробничою функцією зі сталими коефіцієнтами та використовується для дослідження економічних систем будь-якого масштабу. Наведено формулу класичної виробничої функції Кобба-Дугласа та дано пояснення, що її параметри α , β є частинними коефіцієнтами еластичності. Але при більш детальному дослідженні виявилось, що можливо побудувати виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності. Така виробнича функція зі змінними коефіцієнтами дозволяє отримати краще наближені дані. Наведено приклади побудови виробничої функції зі змінними коефіцієнтами та виробничої функції зі сталими коефіцієнтами, в яких порівнюється якість наближення виробничої функції Кобба-Дугласа та виробничої функції зі змінними коефіцієнтами. Розглянуто приклад виробничої функції зі змінними коефіцієнтами для дослідження економіки сільського господарства України. При проведенні досліджень, автори виявили, що очевидним є наступне твердження: середньоквадратичне відхилення σ , знайдене для наближення експериментальних даних за допомогою функцій зі

змінними коефіцієнтами еластичності, не може бути більшим, ніж середньоквадратичне відхилення, отримане для наближених функцій зі сталими коефіцієнтами еластичності.

Оскільки відслідковується ефективність використання виробничої функції зі змінними коефіцієнтами в дослідженні економічних задач, виникає необхідність провести тестування методу побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами. Сформульовано та доведено теорему про тестування методу побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами (ВФЗКЕ). Наводиться результат обчислювального експерименту з використанням виробничої функції зі змінними коефіцієнтами для ілюстрації доведеної теореми. В подальшому планується продовжити дослідження використання виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами в інших економічних системах.

Ключові слова: *виробнича функція зі сталими коефіцієнтами, виробнича функція зі змінними коефіцієнтами, коефіцієнт еластичності, виробнича функція Кобба-Дугласа, метод побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами ВФЗКЕ.*

Вступ. При проведенні досліджень економічних систем різного масштабу на практиці доволі часто використовується економіко-математичне моделювання за допомогою виробничих функцій. Зокрема, досить уживаною є виробнича функція Кобба-Дугласа, оскільки вона легко може бути застосована для аналізу різноманітних форм суб'єктів господарювання.

Класична виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд [1]:

$$Y = AL^\alpha K^\beta, \quad (1)$$

де K — основний капітал, L — робоча сила, A, α, β — параметри.

Параметри α, β функції Кобба-Дугласа є частинними коефіцієнтами еластичності:

1) частинний коефіцієнт еластичності продукту по фондах

$$E_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = A \beta L^\alpha K^{\beta-1} \frac{K}{AL^\alpha K^\beta} = \beta; \quad (2)$$

2) еластичність продукту по праці

$$E_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = A \alpha L^{\alpha-1} K^\beta \frac{L}{AL^\alpha K^\beta} = \alpha. \quad (3)$$

Ці коефіцієнти еластичності відображають відсоток приросту обсягу випуску продукції при збільшенні витрат ресурсу на 1%.

Для функції Кобба-Дугласа коефіцієнти α, β постійні й не залежать від обсягу факторів K, L .

Аналіз останніх досліджень. При більш детальному дослідженні виявилось, що можливо побудувати виробничу функцію зі змінними

коефіцієнтами еластичності. Така функція дозволяє отримати краще наближені дані [2–6].

Наприклад, було побудовано функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності у вигляді:

$$Y(L, K, A, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}, \quad (4)$$

$$f(L, K, a) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N a_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K), \quad (5)$$

$$g(L, K, b) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N b_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K). \quad (6)$$

При проведенні обчислювального експерименту на основі даних Кобба-Дугласа була отримана така виробнича функція [4]:

$$Y = e^{48,021} \times L^{-15,515+0,074L+0,06K-2,244 \cdot 10^{-4} L \cdot K} \times K^{3,399-0,059L-0,43K+1,866 \cdot 10^{-4} L \cdot K}. \quad (7)$$

Для функції (7) середньоквадратичне відхилення $\sigma_1 = 0,034$, в той час, як для класичної виробничої функції Кобба-Дугласа

$$Y = 1,01 \cdot L^{0,75} \cdot K^{0,25} \quad (8)$$

$\sigma_2 = 0,054$. Це підтверджує, що виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності краще наближується до фактичних значень.

Також було побудовано виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності для дослідження економіки сільського господарства України [6]:

$$Y_z = e^{29,089} \times L^{-23,818-7,391 \cdot L+0,046K} \times K^{-12,302+5,69 \cdot L+0,014 \cdot K} \quad (9)$$

та виробничу функцію зі сталими коефіцієнтами:

$$Y_c = 2,374 \times L^{-0,779} \times K^{0,91}. \quad (10)$$

Для функції (9) середньоквадратичне відхилення $\sigma_3 = 0,047$, а для функції (10) — $\sigma_4 = 0,057$, що також доводить краще наближення до фактичних значень саме виробничої функції зі змінними коефіцієнтами. Інші приклади див. у [4–6].

Очевидним є наступне твердження: середньоквадратичне відхилення σ , знайдене для наближення експериментальних даних за допомогою функцій із змінними коефіцієнтами еластичності, не може бути більшим, ніж середньоквадратичне відхилення, отримане для наближуваних функцій зі сталими коефіцієнтами еластичності. Для доведення цього твердження достатньо відмітити, що випадок зі сталими коефіцієнтами еластичності отримується із загального випадку для рівних 0 всіх інших коефіцієнтів, що входять у вирази для функцій $f(L, K, a)$, $g(L, K, b)$.

Постановка задачі. Оскільки відслідковується ефективність використання виробничої функції зі змінними коефіцієнтами в дослідженні економічних задач, виникає необхідність провести тестування методу побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами (ВФЗКЕ).

Теорема 1. Якщо у формулі (4) всі коефіцієнти поліномів $f(L, K, a)$, $g(L, K, b)$ та коефіцієнт A відомі, то метод ВФЗКЕ точно їх відновлює.

Доведення. В методі ВФЗКЕ для знаходження невідомих коефіцієнтів A , a_{im} , b_{im} , $i = \overline{0, M}$, $m = \overline{0, N}$ на практиці зручно знаходити мінімум функціонала

$$j(C) = \sum_{p=1}^Q \left(A \cdot L_p^{f(L_p, K_p, a)} \cdot K_p^{g(L_p, K_p, b)} - Y_p \right)^2 \rightarrow \min_{A, a_{im}, b_{im}},$$

який отримується шляхом логарифмування функціоналу $Y(L, K, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}$. Отримаємо

$$\ln Y = \ln A + (\ln L) \cdot f(L, K, a) + (\ln K) \cdot g(L, K, b), \quad (11)$$

звідки знаходимо невідомі A , a_{im} , b_{im} , $i = \overline{0, M}$, $m = \overline{0, N}$ [4]. Після знаходження невідомих A , a_{im} , b_{im} , $i = \overline{0, M}$, $m = \overline{0, N}$ підставляємо їх у функцію (4), отримавши таким чином конкретну функцію вже з відомими коефіцієнтами

$$Y(L, K, A, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}. \quad (12)$$

Після цього у функцію (12) з відомими коефіцієнтами підставляємо вихідні дані K , L і знову відновлюємо функціонал $Y(L, K, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}$. В результаті отримуємо матрицю з 0 (з урахуванням похибки).

Теорему доведено.

Було проведено обчислювальний експеримент з допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad, що підтверджує дану теорему. Для відновлення функції використовували дані економіки США за 1899–1922рр., які наведено в статті Кобба-Дугласа (табл.1) [1].

Спочатку за цими даними було знайдено виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами (7), після цього в цю функцію з відомими коефіцієнтами підставили вихідні дані з табл. 1 (робоча сила L та капітал K) і відновили функцію.

Таблиця 1

Рік	Обсяг виробництва	Робоча сила (L)	Капітал (K)
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	118	122
1903	124	123	131
1904	122	116	138
1905	143	125	149
1906	152	133	163
1907	151	138	176
1908	126	121	185
1909	155	140	198
1910	159	144	208
1911	153	145	216
1912	177	152	226
1913	184	154	236
1914	169	149	244
1915	189	154	266
1916	225	182	298
1917	227	196	335
1918	223	200	366
1919	218	193	387
1920	231	193	407
1921	179	147	417
1922	240	161	431

В результаті проведення обчислювального експерименту отримано матрицю значень, наближених до 0. Похибка обчислень склала від $-1,496 \cdot 10^{-5}$ до $-8,427 \cdot 10^{-7}$.

Висновки. Протестовано метод побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами (ВФЗКЕ). Доведено теорему про точне відновлення методом ВФЗКЕ коефіцієнтів для виробничої функції зі змінними коефіцієнтами (4).

В подальшому планується дослідити використання виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами в різних економічних системах.

Список використаних джерел:

1. Cobb C. W. A Theory of Production / C. W. Cobb, P. H. Douglas // American Economic Review. — 1928. — December. — P. 139–165.
2. Артюх М. В. Загальне представлення функції двох змінних зі змінними дивідендами першого роду по X та по Y / М. В. Артюх // Праці міжнародної молодіжної математичної школи «Питання оптимізації обчислень (ПОО-

- XXXVII)». — К. : Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2011. — С. 14–15.
3. Литвин О. М. Деякі теореми про виробничі функції від двох змінних зі змінними коефіцієнтами еластичності та їх застосування / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» : збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХПІ», 2012. — № 2. — С. 23–29.
 4. Литвин О. М. Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності, побудована на основі даних Кобба-Дугласа / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» : збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХПІ», 2012. — № 27. — С. 124–129.
 5. Артюх М. В. Математична модель виробничої функції, яка явно залежить від капіталоозброєності та обсягів ресурсів / М. В. Артюх, О. М. Литвин // Інформатика та системні науки (ІСН-2014) : матеріали V Всеукр. наук.-практ. конф., (м. Полтава, 13-15 березня 2014 р.) / за ред. О. О. Ємця. — Полтава : ПУЕТ, 2014. — С. 34–37.
 6. Артюх М. В. Застосування дивідіріального та мультигратального числень в дослідженні економіки сільського господарства України / М. В. Артюх, О. М. Литвин // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. — Вип. 13. — С. 16–26.

TESTING THE METHOD OF CONSTRUCTING PRODUCTION FUNCTIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS (PFVCE)

In the article we consider the classical Cobb-Douglas production function, which is a production function with constant coefficients and is used for the study of economical systems of any scale. The formula for the classical production function of Cobb-Douglas is given and it is explained that its parameters α , β are partial elasticity coefficients. But with a more detailed study it turned out that it is possible to construct a production function with variable elasticity factors. Such a production function with variable coefficients allows for better approximation of data. Examples are given of construction of a production function with variable coefficients and a production function with constant coefficients in which the quality of the approximation of the Cobb-Douglas production function and the production function with variable coefficients are compared. An example of a production function with variable coefficients for the study of the economy of agriculture in Ukraine is considered. In the course of the research, the authors found that the following is evident: the mean square deviation σ found for the approximation of experimental data by means of functions with variable elasticity coefficients can not be greater than the mean square deviation obtained for approximating functions with stable elasticity coefficients.

Since the effectiveness of using the production function with variable coefficients in the study of economic problems is monitored, it is necessary

to test the method of constructing production functions with variable coefficients. A theorem on the testing of the method for constructing production functions with variable coefficients (PFVCE) is formulated and proved. The result of a computational experiment using a production function with variable coefficients for illustrating the proved theorem is given. In the future, it is planned to continue research on the use of production functions with variable coefficients in other economic systems.

Key words: *production function with constant coefficients, production function with variable coefficients, coefficient of elasticity, production function of Cobb-Douglas, method of constructing production functions with variable coefficients PFVCE.*

Отримано: 23.05.2018

УДК 539.3

Р. С. Мусій, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Н. Б. Мельник, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Андрусяк, канд. фіз.-мат. наук,
О. Я. Бродяк, канд. фіз.-мат. наук,
Л. В. Гошко, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ТЕРМОПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРА З ТОНКИМ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМ ПОКРИТТЯМ ЗА ІМПУЛЬСНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ

Побудовано математичну модель визначення термонапруженого стану довгого суцільного електропровідного циліндра з тонким електропровідним покриттям та запропоновано критерії оцінки його роботоздатності і збереження властивостей контактної з'єднання залежно від параметрів зовнішньої нестационарної електромагнітної дії. Вибрано розрахункову модель задачі для розглядуваного електропровідного циліндра, що складається з трьох етапів.

На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначається відмінна від нуля осьова компонента вектора напруженості магнітного поля в циліндрі і покритті та відповідні їй питомі густини джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил. На другому етапі з рівняння теплопровідності за відомими джоулевими тепловиділеннями знаходять розподіл температури в циліндрі і покритті. На третьому етапі за відомими пондеромоторними силами і температурою зі співвідношень плоскої осесиметричної задачі термопружності в переміщеннях визначаються радіальна компонента вектора переміщень та радіальна, колова і осьова