

УДК 550:531;681.51

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.48-65

Н. В. Ефименко, канд. техн. наукНаучно-производственное предприятие «Хартрон-ЮКОМ»,
г. Запорожье**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА-ГАМИЛЬТОНА
И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ
ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

В настоящее время наиболее эффективным способом получения данных о поверхности Земли является спутниковая съемка. При этом к динамическим характеристикам системы управления космическим аппаратом (КА) предъявляются очень жесткие требования. Разворот должен происходить из любого текущего положения в любое заданное, точность ориентации в развернутом положении должна составлять единицы угловых минут, а угловые скорости разворота могут достигать величины 2-3 градуса за секунду. Для обеспечения таких высоких динамических характеристик базовый такт системы управления должен быть не более 100 мс. Это ограничение накладывает ограничения и на алгоритмы переориентации. Они должны быть, с одной стороны, очень простыми, чтобы время, затрачиваемое на расчет управляющего воздействия, было минимальным. С другой стороны, они должны обеспечить высокие динамические характеристики, что невозможно обеспечить в классе простых алгоритмов. Решение задачи синтеза алгоритмов переориентации КА необходимо искать как решение оптимизационной задачи. При решении таких задач, как правило, используется математическая модель углового движения КА, в которой динамика описывается уравнением Эйлера, а кинематика — уравнением для кватерниона. В этом случае достаточно легко получить уравнения двухточечной краевой задачи, но найти аналитическое решение этой задачи не представляется возможным. Решение можно найти только с использованием численных методов, что не применимо при реализации алгоритмов на борту КА. Эти трудности можно обойти, если в качестве модели углового движения КА использовать модель, построенную на основе динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига-Гамильтона. В работе этот подход был использован для решения основных задач управления угловым движением КА: задачи стабилизации и задачи терминального управ-

ления. Статья может быть полезной разработчикам систем управления ориентацией КА.

Ключевые слова: *параметры Родрига-Гамильтона, космический аппарат, кватернион, ориентация, динамическое уравнение для кватерниона.*

Условные обозначения и системы координат. При изложении материала статьи использовались следующие обозначения и системы координат:

- ω_A^{AB} — вектор угловой скорости вращения базиса A относительно базиса B , заданный проекциями на оси базиса A ;
- $L_{AB} = \begin{pmatrix} \lambda_{AB}^0 \\ \lambda_{AB} \end{pmatrix}$ — векторное представление кватерниона со скалярной частью λ_{AB}^0 и векторной частью $\lambda_{AB} \in R^3$, задающего переход от базиса A к базису B ;
- C_{BA} — матрица перехода от базиса A к базису B ;
- I — инерциальная система координат;
- R — опорная система координат, относительно которой осуществляется требуемая ориентация КА, ее вращение относительно инерциальной системы координат I задается вектором программной угловой скорости, определённым в виде некоторой функции времени $\omega_R^{RI}(t)$, для которой существует производная по времени $\dot{\omega}_R^{RI}(t)$;
- B — жестко связанная с корпусом космического аппарата (КА) правая ортогональная система координат;
- J — тензор инерции КА;
- $M_u \in R^3$ — управляющий момент, создаваемый исполнительными органами системы управления КА;
- $M_\theta \in R^3$ — возмущающий момент;
- $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$ — линейный кососимметрический оператор векторного произведения, определяемый равенством $\Phi(x) \cdot y = x \times y$.
- I_n — единичная матрица $n \times n$.

Введение. Успех в решении задач управления движением КА относительно центра масс во многом зависит от выбранной модели движения КА. Математическая модель углового движения КА состоит из двух групп уравнений: динамических уравнений Эйлера и кинематических уравнений, записанных в тех или иных кинематических параметрах (углах Эйлера-Крылова, направляющих косинусах, параметрах Родрига-Гамильтона). В зависимости от того, какие используются кинематические параметры для описания угловой ориентации КА можно выделить следующие виды моделей углового движения:

- динамическое уравнение Эйлера и кинематическое уравнение в направляющих косинусах;
- динамическое уравнение Эйлера и кинематическое уравнение в углах Эйлера-Крылова;
- динамическое уравнение Эйлера и кинематическое уравнение в параметрах Родрига-Гамильтона.

Среди этих моделей самой распространенной является модель, в которой динамика описывается уравнением Эйлера, а кинематика — кинематическим уравнением в параметрах Родрига-Гамильтона. Уравнения этой модели, описывающие относительное движение связанной и опорной систем координат имеют следующий вид:

$$J\dot{\omega}_B^{BR} + (\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) \times J(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}) = M_u + M_e, \quad (1)$$

$$2\dot{\Lambda}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_B^{BR})^T \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}. \quad (2)$$

Достоинством модели является отсутствие вычислительных особенностей и минимальная избыточность вектора состояния, недостатком — нелинейность модели, что существенно затрудняет синтез законов управления.

Кроме перечисленных выше моделей углового движения КА, для построения управления можно использовать и модель движения, имеющую вид системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно параметров Родрига-Гамильтона (В. Н. Кошляков [1], Ю. Н. Челноков [2–4]). Однако в моделях, приведенных в этих работах, правые части динамического уравнения Эйлера выражаются непосредственно через параметры Родрига-Гамильтона, что приводит к тому, что модели становятся существенно нелинейными, и их затруднительно использовать для синтеза управления. Эти трудности можно обойти, если при построении модели использовать динамическое уравнение для кватерниона [5]

$$\ddot{\Lambda} = (I_4 - \Lambda \Lambda^T) U - \|\dot{\Lambda}\|^2 \Lambda$$

$$\Lambda \in \Sigma = \{ \Lambda : \|\Lambda\| = 1, \Lambda \in R^4 \},$$
(3)

описывающее множество всех допустимых управляемых перемещений точки на поверхности сферы с единичным радиусом в четырехмерном пространстве. Уравнение (3) представляет собой частный случай уравнения движения точки по сфере в пространстве R^n

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 \cdot X_0^T) \cdot f - X_0 \cdot |\dot{X}_0|^2,$$

которое описывает множество всех допустимых управляемых перемещений точки на поверхности сферы заданного радиуса в n -мерном пространстве. В работе [6] исследованы свойства этого уравнения и доказаны следующие утверждения:

Утверждение 1. Пусть задана нелинейная система дифференциальных уравнений $X^{(m)} = F(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(m-1)})$. Будем рассматривать компоненты вектора $X(t) \in R^n$ как координаты одноименной точки, которая движется в пространстве R^n по некоторой траектории, определяемой вектором $X(t)$. При этом вектор функция $X(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ удовлетворяет условию $\|X(t)\| \neq 0$. Тогда движение проекции этой точки на единичную сферу в пространстве R^n , определяемое ортом $X_0(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|}$ вектора $X(t)$, описывается уравнением

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 \cdot X_0^T) \cdot f - X_0 \cdot |\dot{X}_0|^2,$$

$$f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 + \alpha X_0,$$

$$\delta = \sqrt{\dot{X}^T \cdot X}, \quad \dot{\delta} = X_0^T \cdot \dot{X},$$

в котором переменная $\alpha(t)$ представляет собой произвольную скалярную функцию времени.

Утверждение 2. Пусть на единичной сфере в пространстве R^n задана точка $X_0(t)$, движение которой описывается уравнением $\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 \cdot X_0^T) \cdot f - X_0 \cdot |\dot{X}_0|^2$. Единичному вектору $X_0(t)$ можно поставить в соответствие вектор $X(t)$, изменение координат которого во времени описывается системой уравнений $\ddot{X}(t) = \Psi$, где со-

гласно утверждению 1, функция $\Psi(t)$ имеет вид $\Psi(t) = \delta f + 2\delta\dot{X}_0 + \alpha X_0$, $\delta = \sqrt{X^T \cdot X}$. Если в начальный момент времени выполняются соотношения $X(t_0) = X_0(t_0)$, $\dot{X}(t_0) = \dot{X}_0(t_0)$, то существует взаимно-однозначное соответствие между векторами $X_0(t)$ и $X(t)$, определяемое выражениями

$$X_0(t) = \frac{X(t)}{\delta}, \quad \dot{X}_0(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{X(t)}{\delta} \right) = (I_n - X_0(t) X_0^T(t)) \frac{\dot{X}(t)}{\delta},$$

$$X(t) = \delta X_0(t), \quad \dot{X}(t) = \delta \dot{X}_0(t) + \delta \dot{X}_0(t).$$

Утверждение 3. Пусть на единичной сфере в пространстве R^n задана точка $X_0(t)$, движение которой описывается уравнением $\ddot{X}_0 = \Theta$, где ускорение точки Θ определяется выражением $\Theta = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2$, а вектор f является вектором управления. Тогда векторы Θ и f связаны соотношением $f = \Theta + \alpha \cdot X_0$, где переменная α — произвольная скалярная функция.

В данной работе с использованием уравнения (3) предлагаются методы решения основных задач управления угловым движением КА: задача стабилизации и задача терминального управления.

Математическая модель углового движения КА в параметрах Родрига-Гамильтона. Рассмотрим уравнения (1–2), описывающие динамику относительного углового движения связанной и опорной систем координат. В этой модели в качестве вектора состояния используются вектор относительной угловой скорости ω_B^{BR} и кватернион Λ_{RB} , определяющий взаимное положение связанной и опорной систем координат. В работе [6] получена модель, в которой в качестве вектора состояния используется вектор параметров Родрига-Гамильтона (кватернион) и его производная. Уравнение модели имеет следующий вид

$$\dot{\Lambda}_{RB} = (I_4 - \Lambda_{RB} \cdot \Lambda_{RB}^T) \cdot U + \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} M_e - \Lambda_{RB} \cdot \|\dot{\Lambda}_{RB}\|^2, \quad (4)$$

В этом уравнении вектор $U \in R^4$ является свободной переменной, изменяя которую можно изменять характер углового движения КА. Между системой уравнений (1)–(2) и уравнением (4) существует взаимное соответствие, определяемое выражениями [6]

$$\omega_B^{BR} = 2A(\Lambda_{RB}) \dot{\Lambda}_{RB}, \quad (5)$$

$$M_u = 2JA(\Lambda_{RB}) U + \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}), \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\omega_B^{BI} &= \omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}, \\ \dot{\Lambda}_{BR} &= \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{BR}) \omega_B^{BR},\end{aligned}\quad (7)$$

$$U = \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} \cdot \left(M_u - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} - J \left(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI} \right) \right), \quad (8)$$

где матрица $A(\Lambda_{RB})$ имеет вид $A(\Lambda_{RB}) = \begin{pmatrix} -\lambda_{RB} & \lambda_{RB}^0 I_3 & -\Phi(\lambda_{RB}) \end{pmatrix}$.

Уравнения (1-2) представляют собой модель углового движения, в которой уравнения динамики записаны в пространстве R^3 , а кинематические уравнения записаны в пространстве R^4 . Уравнение (4) представляет собой модель углового движения КА, в которой уравнения динамики и кинематики записаны в пространстве R^4 . Так, как между моделью, определяемой уравнениями (1)–(2) и моделью в виде уравнения (4) существует взаимно-однозначное соответствие, определяемое выражениями (5)–(8), то можно синтезировать законы управления, используя модель (4), а затем вернуться в пространство R^3 и по формуле (6) найти физически реализуемый управляющий момент M_u .

Особенности применения динамического уравнения в параметрах Родрига–Гамильтона в задачах управления ориентацией КА. Уравнение (4) является нелинейным уравнением, что существенно усложняет процедуру синтеза управления U . Нелинейность обусловлена тем, что Λ_{RB} представляет собой нормированный кватернион. Для того, чтобы избавиться от нелинейности, перейдем к ненормированному кватерниону. Представим кватернион Λ_{RB} в виде

$$\Lambda_{RB}(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|}, \quad (9)$$

где $X(t) \in R^4$ — векторное представление некоторого ненормированного кватерниона.

Пусть изменение во времени вектора $X(t)$ описывается уравнением

$$\ddot{X} = \Xi. \quad (10)$$

Согласно выражению (9), для производной по времени от вектора Λ_{RB} справедливо соотношение

$$\dot{\Lambda}_{RB}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{X(t)}{\|X(t)\|} \right) = \left(I_4 - \Lambda_{RB} \Lambda_{RB}^T \right) \frac{\dot{X}(t)}{\|X(t)\|}.$$

С учетом соотношения для производной $\dot{\Lambda}_{RB}(t)$ и формулы (5) вектор относительной угловой скорости $\omega_B^{BR}(t)$ можно представить следующим образом:

$$\omega_B^{BR} = \frac{2}{\|X\|^2} A(X) \cdot \dot{X}. \quad (11)$$

Из выражений (9)–(11) следует, что, формируя нужным образом управление $\Xi(t)$, можно формировать требуемый характер изменения угловой ориентации и скорости вращения КА. Пусть в начальный момент времени выполняются условия

$$X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0).$$

Тогда согласно утверждению 2 между векторами состояния систем (10) и (4) существует взаимное соответствие, определяемое формулами

$$\Lambda_{RB}(t) = \frac{X(t)}{\|X\|}, \quad \dot{\Lambda}_{RB}(t) = (I_4 - \Lambda_{RB}(t)\Lambda_{RB}^T(t)) \frac{\dot{X}(t)}{\|X\|},$$

$$X(t) = \|X\| \Lambda_{RB}(t), \quad \dot{X}(t) = \frac{d}{dt} (\|X\| \Lambda_{RB}(t) + \|X\| \dot{\Lambda}_{RB}(t)).$$

При этом уравнение (10) можно рассматривать как уравнение углового движения КА, записанное в виде дифференциального уравнения для ненормированного кватерниона. Продифференцировав m раз вектор X , дифференциальное уравнение (10) можно записать следующим образом:

$$X^{(m)} = \Psi,$$

где вектор Ψ — новый вектор управления. При этом вектора Ψ и Ξ связаны соотношением $\Psi = \Xi^{(m-2)}$.

Методы управления ориентацией космического аппарата с использованием уравнения вращательного движения КА в параметрах Родрига-Гамильтона.

Задача стабилизации. Под стабилизацией углового движения КА относительно опорной системы координат будем понимать такое угловое движение КА, при котором положение равновесия $\Lambda_{RB}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ является асимптотически устойчивым. Сформулируем следующую задачу управления: для системы уравнений

$$J \dot{\omega}_B^{BR} + (\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) \times J (\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) + J (\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}) = M_u$$

$$2\dot{\Lambda}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BRT} \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}$$

найти закон управления M_u , обеспечивающий асимптотическую устойчивость положению равновесия $\Lambda_{RB}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$.

Решение задачи стабилизации. Рассмотрим уравнение относительного движения в параметрах Родрига-Гамильтона

$$\ddot{\Lambda}_{RB} = \left(I_4 - \Lambda_{RB} \cdot \Lambda_{RB}^T \right) \cdot U - \Lambda_{RB} \cdot \left| \dot{\Lambda}_{RB} \right|^2,$$

Согласно утверждению 3 это уравнение можно представить следующим образом:

$$\ddot{\Lambda}_{RB} = U(t) + \alpha(t) \Lambda_{RB},$$

где α — произвольная скалярная функция. Положим ее равной нулю. В результате получим следующее уравнение:

$$\ddot{\Lambda}_{RB} = U(t). \quad (12)$$

Система (12) представляет собой интегратор второго порядка. Для такого вида уравнений закон управления

$$U = -K_1 E - K_2 \dot{E},$$

$$E = \Lambda_{RB} - \Lambda_{RB}^*, \quad \dot{E} = \dot{\Lambda}_{RB},$$

$$K_1 = \text{diag}(k_{1i}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{2i}), \quad k_{1i} > 0, \quad k_{2i} > 0,$$

$$A_{RB}^* = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость положению равновесия $A_{RB}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Используя формулу (8), находим физически реализуемый управляющий момент M_u .

$$M_u = 2JA(\Lambda_{RB})U + \left(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) \times J \left(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) + J \left(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI} \right).$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Для системы уравнений

$$J \dot{\omega}_B^{BR} + \left(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) \times J \left(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) + J \left(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI} \right) = M_u$$

$$2\dot{\Lambda}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BRT} \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}$$

закон управления

$$M_u = 2JA(\Lambda_{RB})U + \left(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) \times J \left(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) + J \left(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI} \right),$$

где вектор U определяется следующим образом

$$U = -K_1 E - K_2 \dot{E}, \quad E = \Lambda_{RB} - \Lambda_{RB}^*, \quad \dot{E} = \dot{\Lambda}_{RB},$$

$$K_1 = \text{diag}(k_{1i}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{2i}), \quad k_{1i} > 0, \quad k_{2i} > 0,$$

$$A_{RB}^* = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость положению равновесия $A_{RB}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$.

Пример. Для КА, находящегося на круговой орбите, моделировался процесс построения инерциальной ориентации. На рис. 1 изображены зависимости от времени углов ориентации. Соответствующие угловые скорости изображены на рис. 2. Как видно из приведенных графиков, параметры углового движения в конце переходного процесса соответствуют режиму инерциальной ориентации. Это подтверждает работоспособность разработанных алгоритмов.

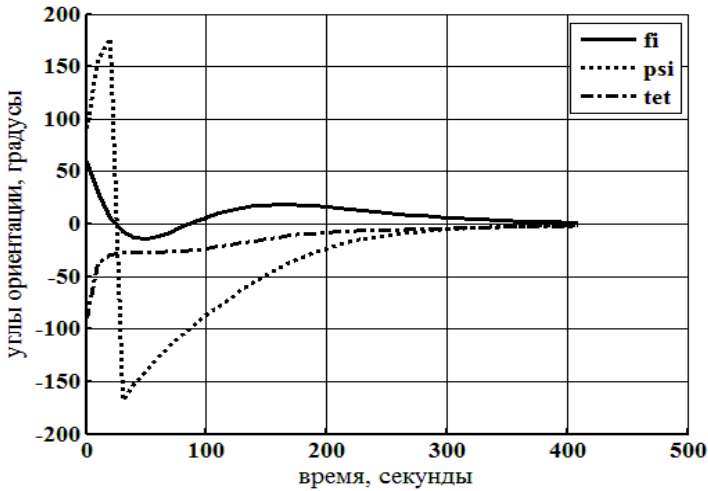


Рис. 1. Углы ориентации

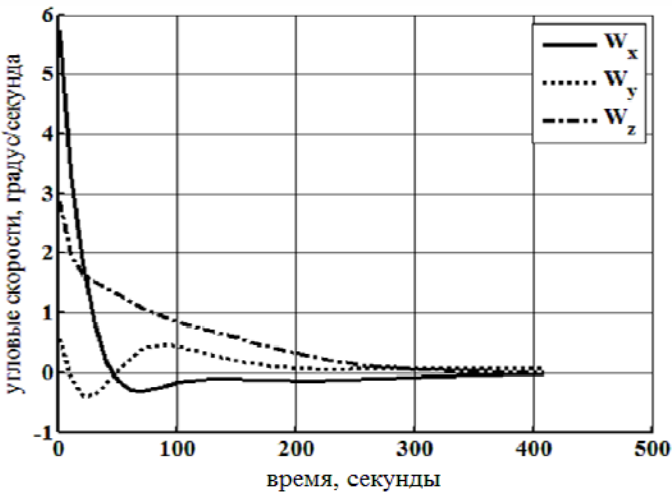


Рис. 2. Угловые скорости

Задача терминального управления: для системы уравнений

$$J\dot{\omega}_B^{BR} + (\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) \times J(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}) = M_u$$

$$2\dot{\Lambda}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BRT} \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}$$

найти закон управления $M_u(t)$, обеспечивающий переориентацию КА из текущего углового положения $\Lambda_{RB}(t_0)$, $\dot{\Lambda}_{RB}(t_0)$ в момент времени t_0 в требуемое угловое положение $\Lambda_{RB}(t_1)$, $\dot{\Lambda}_{RB}(t_1)$ в момент времени t_1 . Моменты времени t_0 и t_1 заданы.

Решение поставленной задачи. Для решения задачи воспользуемся моделью углового движения КА в виде динамического уравнения для ненормированного кватерниона

$$X^{(m)} = \Psi. \quad (13)$$

Будем полагать, что для вектора X и его производных до $m-1$ порядка включительно заданы граничные условия для фиксированных моментов времени t_0 и t_1 . Причем,

$$X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0).$$

Для заданных граничных условий найдено решение задачи оптимального управления: найти закон управления $\Psi(t)$, переводящий систему $X^{(m)} = \Psi$ из текущего состояния в момент времени t_0 в требуемое состояние в момент времени t_1 и обеспечивающий минимум функционалу $L(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \|\Psi\|^2 dt$. Определим программную траекторию разворота (кватернион Λ_{RB^*}) следующим образом:

$$\Lambda_{RB^*}(t) = \frac{X(t)}{\|X\|}.$$

В этом случае, согласно утверждению 1, для кватерниона Λ_{RB^*} справедливо уравнение

$$\ddot{\Lambda}_{RB^*} = (I_4 - \Lambda_{RB^*} \cdot \Lambda_{RB^*}^T) \cdot U^* - \Lambda_{RB^*} \cdot \|\dot{\Lambda}_{RB^*}\|^2,$$

где $U^* = \frac{\ddot{X}}{\|X\|} - 2 \frac{1}{\|X\|} \frac{d}{dt} (\|X\|) \dot{\Lambda}_{RB^*}$.

Управление Ψ выбрано таким образом, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} X(t_0) &= \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0), \\ X(t_1) &= \Lambda_{RB}(t_1), \quad \dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_1). \end{aligned}$$

Так как вектор $\Lambda_{RB^*}(t)$ является ортом вектора X , то в момент времени t_1 вектор $\Lambda_{RB^*}(t)$ и его производная $\dot{\Lambda}_{RB^*}(t)$ примут заданное значение $\Lambda_{RB}(t_1)$, $\dot{\Lambda}_{RB}(t_1)$. Следовательно, управление $U^* = \frac{\ddot{X}}{\|X\|} - 2\frac{1}{\|X\|} \frac{d}{dt}(\|X\|) \dot{\Lambda}_{RB^*}$ обеспечивает переориентацию КА из текущего углового положения $\Lambda_{RB}(t_0)$, $\dot{\Lambda}_{RB}(t_0)$ в момент времени t_0 в требуемое угловое положение $\Lambda_{RB}(t_1)$, $\dot{\Lambda}_{RB}(t_1)$ в момент времени t_1 . Так как задача минимизации функционала $L(t)$ при ограничении (13) имеет аналитическое решение [7], то расчет вектора U^* не представляет никаких сложностей.

Управление U^* , построенное таким образом, является программным. При таком управлении КА будет двигаться по некоторой траектории Λ_{RB} , отличной от программной траектории Λ_{RB^*} . Это обусловлено ошибками реализации программного управления и наличием возмущающих моментов, действующих на КА. Для стабилизации углового движения КА относительно программной траектории необходимо управление в виде обратной связи по состоянию. Для нахождения этого управления рассмотрим относительное движение связанной с КА системы координат B относительно программной системы координат B^* , положение осей которой относительно опорного базиса R определяется кватернионом Λ_{RB^*} . В соответствии с уравнением (1–2) система уравнений, описывающая динамику движения базиса B относительно базиса B^* , имеет вид

$$J\dot{\omega}_B^{BB^*} + (\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) \times J(\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) + J(\omega_B^{B^*I} \times \omega_B^{BB^*} + \dot{\omega}_B^{B^*I}) = M_u,$$

$$2\dot{\Lambda}_{B^*B} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BB^*T} \\ \omega_B^{BB^*} & -\Phi(\omega_B^{BB^*}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{B^*B},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_B^{B^*I} &= \omega_B^{RI} + \omega_B^{B^*R}, \quad \omega_B^{B^*R} = 2A(\Lambda_{RB^*})\dot{\Lambda}_{RB^*}, \\ \dot{\omega}_B^{B^*I} &= \dot{\omega}_B^{RI} + \dot{\omega}_B^{B^*R}, \quad \dot{\omega}_B^{B^*R} = 2A(\Lambda_{RB^*})U^*. \end{aligned}$$

Представим эту систему в виде дифференциального уравнения второго порядка относительно параметров Родрига-Гамильтона

$$\ddot{\Lambda}_{B^*B} = (I_4 - \Lambda_{B^*B} \cdot \Lambda_{B^*B}^T) \cdot U - \Lambda_{B^*B} \cdot \|\dot{\Lambda}_{B^*B}\|^2,$$

где U — стабилизирующее управление.

Для нахождения стабилизирующего управления U воспользуемся утверждением 4. Согласно этому утверждению, закон управления

$$\begin{aligned} U &= -K_1 E - K_2 \dot{E}, \\ E &= \Lambda_{B^*B} - \Lambda_{RB}^*, \quad \dot{E} = \dot{\Lambda}_{B^*B}, \\ \Lambda_{B^*B}^*(t) &= (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \end{aligned}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость положению равновесия

$$\Lambda_{B^*B}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

При этом момент управления, действующий на КА, в соответствии с выражением (6) можно рассчитать по формуле

$$\begin{aligned} M_u &= 2JA(\Lambda_{B^*B})U + (\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) \times \\ &\times J(\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) + J(\omega_{B^*}^{B^*I} \times \omega_B^{BB^*} + \dot{\omega}_{B^*}^{B^*I}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. Пусть вращательное движение КА описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_B^{BB^*} + (\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) \times J(\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) + J(\omega_B^{B^*I} \times \omega_B^{BB^*} + \dot{\omega}_B^{B^*I}) &= M_u, \\ 2\dot{\Lambda}_{B^*B} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BB^*T} \\ \omega_B^{BB^*} & -\Phi(\omega_B^{BB^*}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{B^*B}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение вектор $X \in R^4$, движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{X}^{(m)} = \Psi.$$

Для вектора X и его производных до $m-1$ порядка включительно определены граничные условия для фиксированных моментов времени t_0 и t_1 . Причем,

$$\begin{aligned} X(t_0) &= \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0), \\ X(t_1) &= \Lambda_{RB}(t_1), \quad \dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_1), \end{aligned}$$

Для заданных граничных условий найден вектор управления Ψ , переводящий точку X и ее производные до $m-1$ порядка включительно из положения в момент времени t_0 в положение в момент времени t_1 . Тогда программная траектория разворота (кватернион Λ_{RB^*}) и программное управление U^* определяется выражением

$$\Lambda_{RB^*}(t) = \frac{X(t)}{\|X\|}, \quad U^* = \frac{\ddot{X}}{\|X\|} - 2 \frac{1}{\|X\|} \frac{d}{dt} (\|X\|) \dot{\Lambda}_{RB^*}$$

а момент управления

$$M_u = 2JA(\Lambda_{B^*B})U + (\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) \times J(\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) + J(\omega_{B^*}^{B^*I} \times \omega_B^{BB^*} + \dot{\omega}_B^{B^*I}),$$

где

$$U = -K_1 E - K_2 \dot{E},$$

$$E = \Lambda_{B^*B} - \Lambda_{B^*B}^*, \quad \Lambda_{B^*B}^* = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

обеспечивает приведение за фиксированное время $\tau = t_1 - t_0$ спутника из положения $\Lambda_{RB}(t_0)$, $\dot{\Lambda}_{RB}(t_0)$ в заданное положение $\Lambda_{RB}(t_1)$, $\dot{\Lambda}_{RB}(t_1)$. При этом положение равновесия $\Lambda_{B^*B}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ асимптотически устойчиво.

На основе предложенного способа построения алгоритмов переориентации были реализованы режимы программных поворотов космических аппаратов «Egypstsat-1» и «Січ-2». В КА «Egypstsat-1» для этого использовался алгоритм второго порядка ($m = 2$), а в КА «Січ-2» — алгоритм третьего порядка ($m = 3$). Ниже приводятся результаты летных испытаний этих режимов.

Результаты летных испытаний режима программных поворотов (РПП) КА «Egypstsat-1». Приведенные результаты получены при выполнении РПП на витке №443. Полетное задание РПП для этого витка было следующим: развернуться по каналу крена на угол $+35^\circ$, по каналу рыскания на угол -3° , произвести съемку и вернуться в режим орбитальной ориентации. На рис. 3, 4 приведены графики изменения углов ориентации и угловых скоростей в процессе маневров. На рис. 5 приведен график изменения управляющих моментов.

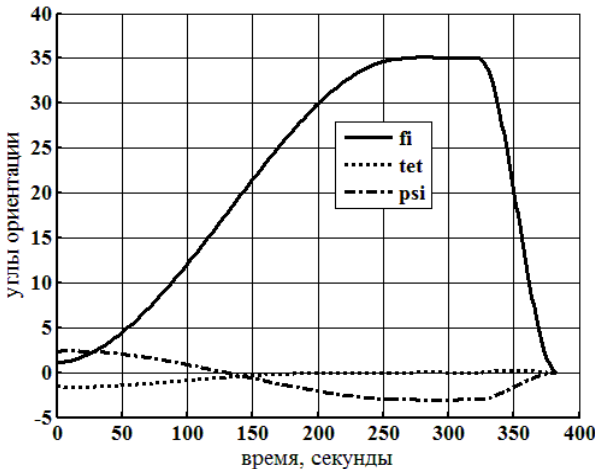


Рис. 3. КА «Egypstsat-1». Виток 443. Трассовая съемка. Углы ориентации

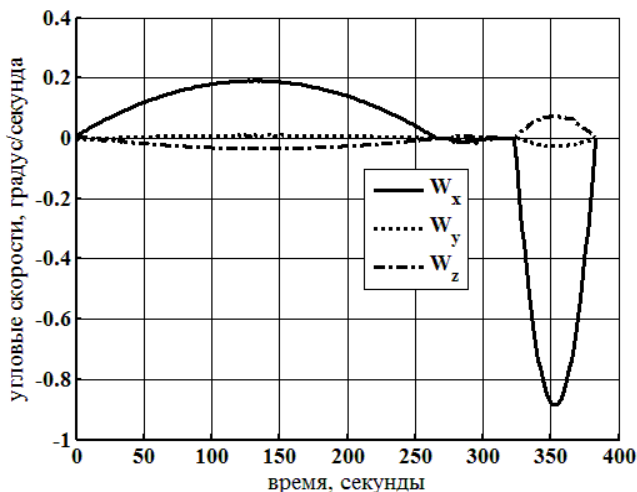


Рис. 4. КА «Egypstsat-1». Виток 443. Трасовая съемка. Угловые скорости

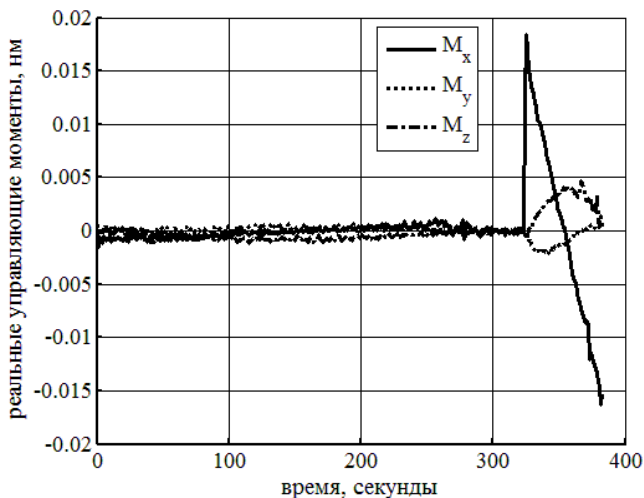


Рис. 5. КА «Egypstsat-1». Виток 443. Трасовая съемка. Управляющие моменты

Результати летних испытаний режима программных поворотов КА «Січ-2». Результаты приведены для витка № 630 (рис. 6–8). Полетное задание при этом было следующим: угол крена $+1.44882^\circ$, угол тангажа $+34.5079^\circ$, угол рыскания -2.01134° . На рис. 6,7 приведены графики изменения углов ориентации и угловых скоростей в процессе маневров. На рис. 8 приведен график изменения управляющих моментов.

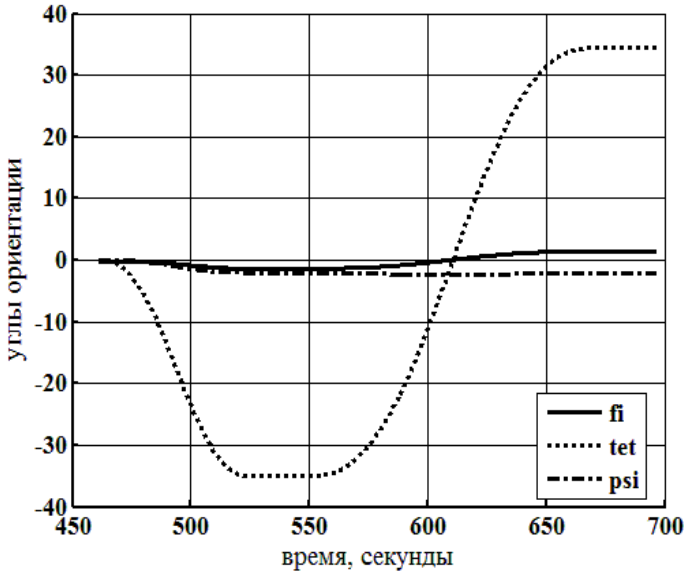


Рис. 6. КА «Січ-2». Виток 630, стереосъемка. Углы ориентации

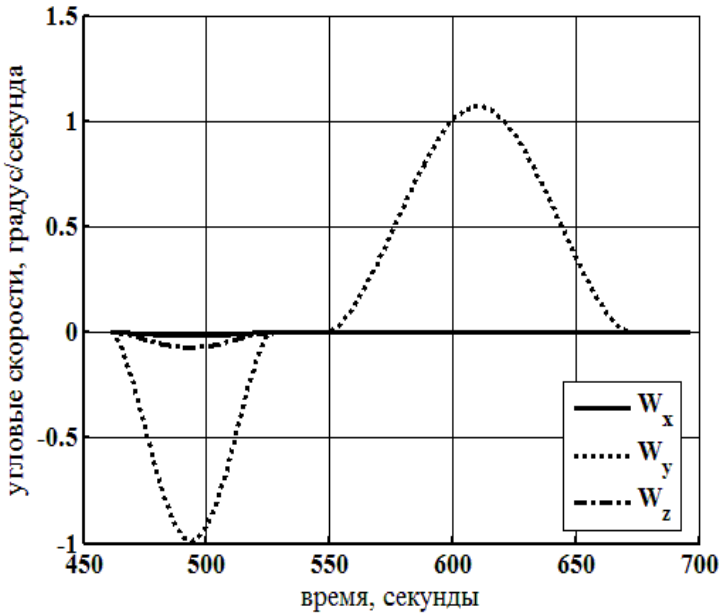


Рис. 7. КА «Січ-2». Виток 630, стереосъемка. Угловые скорости

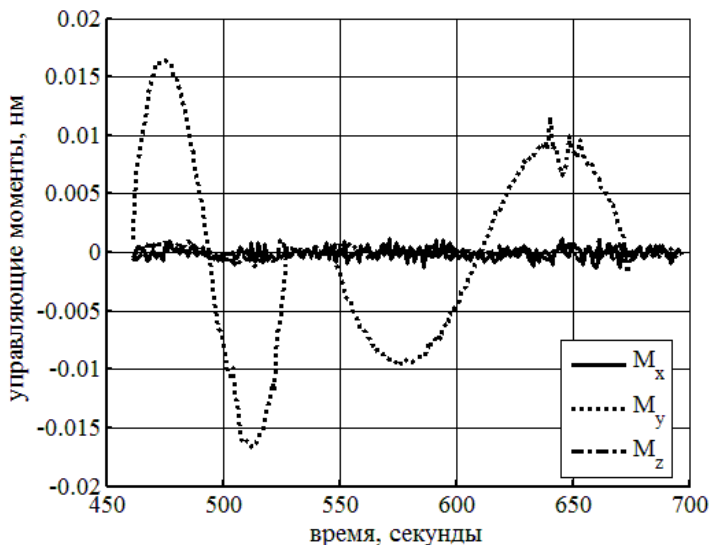


Рис. 8. КА «Січ-2». Виток 630, стереосъемка. Управляющие моменты

Выводы. С использованием уравнения движения точки по сфере найдены решения основных задач управления угловым движением КА: задачи стабилизации и задачи терминального управления. При решении задачи терминального управления предложена методика синтеза алгоритмов пространственной переориентации КА за заданный интервал времени которая не накладывает никаких ограничений на класс угловых движений КА. Предлагаемый подход на основе принципа максимума позволяет получить аналитическое решение задачи пространственной оптимальной переориентации космического аппарата. Методика прошла экспериментальную проверку. На базе предложенного подхода были реализованы режимы программных поворотов космических аппаратов «Egypstat-1» и «Січ-2». Лётно-конструкторские испытания этих космических аппаратов показали высокую эффективность предложенной методики. Методика может быть полезной разработчикам систем ориентации КА.

Список использованной литературы:

1. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов / В. Н. Кошляков. — Москва : Наука, 1985. — 286 с.
2. Челноков Ю. Н. Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения ошибок, законы и алгоритмы коррекции (стабилизации) / Ю. Н. Челноков // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1994. — № 4. — С. 3–12.

3. Челноков Ю. Н. Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы / Ю. Н. Челноков // Космические исследования. — 1994. — Т. 32, вып. 3. — С. 21–32.
4. Челноков Ю. Н. Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов / Ю. Н. Челноков // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2002. — №1. — С. 3–17; 2002. — №2. — С. 3–17.
5. Кириченко Н. Ф. Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела / Н. Ф. Кириченко, В. Т. Матвиенко // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — С. 5–15.
6. Ефименко Н. В. Математическая модель углового движения КА в параметрах Родрига-Гамильтона и ее свойства / Н. В. Ефименко // Электронное моделирование. — 2018. — Т. 40. — №6. — С. 21–36.
7. Ефименко Н. В. Синтез алгоритмов управления пространственной перориентацией космического аппарата с использованием динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига-Гамильтона / Н. В. Ефименко // Проблемы управления и информатика. — 2015. — №3. — С. 145–155.

MATHEMATICAL MODEL OF AN THE ANGULAR MOTION OF A SOLID BODY IN THE PARAMETERS OF THE RODRIG-HAMILTON AND ITS USE IN THE TASKS OF CONTROL SPACECRAFT ORIENTATION

Currently, the most effective way to obtain data on the Earth's surface is satellite imagery. In this case, the dynamic characteristics of the control system are very stringent requirements. The turn should occur from any current position to any given position, the orientation accuracy in the unfolded position should be units of angular minutes, and the angular rates of turn can reach a value of 2-3 degrees per second. To ensure such high dynamic characteristics, the base clock of the control system should be no more than 100 ms. This restriction imposes restrictions on reorientation algorithms. On the one hand, they should be very simple so that the time spent on calculating the control action is minimal. On the other hand, they must provide high dynamic characteristics, which is impossible to provide in the class of simple algorithms. The solution to the problem of the synthesis of reorientation algorithms for spacecraft must be sought as a solution to the optimization problem. When solving such problems, as a rule, a mathematical model of the angular motion of the spacecraft is used, in which the dynamics are described by the Euler equation and the kinematics by the equation for the quaternion. In this case, it is easy enough to obtain the equations of the two-point boundary value problem, but it is not possible to find an analytical solution of this problem. The solution can only be found using numerical methods, which is not applicable when implementing algorithms onboard the spacecraft. These difficulties can be circumvented using the spacecraft model, built on the basis of the dynamic equa-

tions of the rotational motion of a rigid body in the Rodrigues Hamilton parameters. In this paper, this approach was used to solve the main problems of controlling the angular motion of a spacecraft: stabilization problems and terminal control problems. The article may be useful to developers of spacecraft attitude control systems.

Key words: *Rodrig-Hamilton parameters, spacecraft, quaternion, orientation, dynamical equation for the quaternion.*

Отримано: 28.11.2018

UDC 004.94

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.65-73

V. Ivaniuk, Cand. of Eng. Sciences,

V. Ponedilok

Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University

METHOD OF RESTORATION OF INPUT SIGNALS OF NONLINEAR DYNAMIC OBJECT WITH DESTRIIBUTED PARAMETERS

The article deals with the method of signal restoration at the input of a nonlinear dynamic object with distributed parameters. To describe these objects, a universal mathematical model in the form of a Volterra integro-degree series has been chosen. The problem of signal restoration is reduced to the problem of solving the Volterra polynomial equation of the first kind. The numerical implementation of such models is suggested to be carried out using quadrature methods, in particular, the method of trapezoids. In order to increase the stability of the solution in the presence of noise interference in the input data, it is suggested to use the differential regularization operator, which allows the incorrectly set task to be transformed into a class of correct ones. The possibility of applying such an approach is studied in solving the Volterra polynomial integral equation of the second order type, which describes nonlinear dynamic objects with quadratic nonlinearity. The computational formulas for solving this type of equations are given in the article. The received nonlinear second-order algebraic equations after approximation of the initial equation by integral sums are solved by iterative methods with initial approximation in the form of a pre-calculated radical. The developed algorithms are implemented as software modules in the Matlab, with the help of which a number of computational experiments have been carried out. As an example, non-linear dynamic objects that contain static non-linearity of the second order and dynamic links that are typical for objects with distributed parameters have been chosen. Such links are: a semi-integral link, an attenuation link (semi-delay) and a semi-inertial