differential evolution is not worse than using much more complicated deterministic algorithms of the best uniform approximation. This testifies about the effectiveness of the differential evolution algorithm. It can be used as an alternative for known deterministic algorithms of spline approximation.

Key words: *spline, fixed knots, best uniform approximation, differential evolution, stochastic method.*

Одержано 27.01.2019

УДК 004.94
DOI: 10.32626/2308-5916.2019-19.24-30

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,
В. А. Федорчук,** д-р техн. наук, професор,
В. А. Іванюк,** канд. техн. наук, доцент

*Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ,
**Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ІНТЕГРАЛЬНІ МОДЕЛІ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ТЕПЛОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Розглядається підхід до побудови інтегральних моделей нестаціонарних задач теплопровідності на основі застосування методу теплових потенціалів. Можливість побудови інтегральних моделей розглядається на конкретних прикладах із використанням різних теплових потенціалів: одновимірна задача теплопровідності із різною постановкою крайової задачі (умови першого та другого роду), двовимірна задача теплообміну, задача теплообміну із рухомою границею. Пропонується застосування комбінації точних та чисельних методів, що дає змогу враховувати переваги різних підходів. Застосування методу теплових потенціалів до моделей у формі диференціальних рівнянь із частинними похідними дозволило отримати загальний розв'язок у вигляді оператора Вольтерри, який залежить від функцій, що визначаються із крайових умов, тобто поставлена задача зводиться до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри II роду або їх систем. Особливістю отриманих моделей є те, що ядра інтегральних моделей є сингулярними у кінцевій точці інтегрування. Розв'язування таких рівнянь пропонується здійснювати за допомогою обчислювальних методів, основаних на методі квадратур. Для уникнення особливостей в ядрі застосовується метод зсуву. Врахувавши властивості ядр, пропонується застосовувати метод лівих прямокутників, що дозволить уникнути сингулярності. Для підвищення точності побудови розв'язку пропонується застосовувати адаптивний алгоритм ущільнення кроку моделювання в околі сингулярної точки. Запропонований підхід до розв'язування нестаціонарних задач теплопровідності враховує переваги точних (метод теплових потенціалів) і обчислювальних методів (метод квадратур) та дає змогу підвищити ефективність обчислень на основі розпаралелення задачі.

Ключові слова: *нестаціонарна задача теплопровідності, метод потенціалів, інтегральні рівняння, метод квадратур, сингулярні інтегральні рівняння.*

Вступ. При розв'язуванні прикладних задач теплообміну виникають труднощі ефективного застосування стандартних методів, які можна розділити на чисельні, аналітичні та наближені аналітичні.

Сучасні чисельні методи (скінченних різниць, скінченних елементів, граничних елементів та ін.) не завжди можуть ефективно використовуватись в силу складності і великих часових затрат, які збільшуються при зменшенні кроку сітки [5, 6]. Точні аналітичні методи (метод інтегральних перетворень, метод функції Гріна, метод інтегральних представлень, теплових потенціалів та ін. [1, 2, 4, 5, 8]) потребують від дослідника високої математичної підготовки та можуть бути застосовані до обмеженого числа крайових задач. Одним із основних недоліків наближених методів (методи Рітца, Треффтца, Канторовича, Гальоркіна, зважених нев'язок, колокацій та ін.) є те, що при малих значеннях кроку дискретизації часової координати отримуються великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь, матриці коефіцієнтів яких, зазвичай, погано обумовлені [4]. Тому вдосконалення методів моделювання процесів теплообміну шляхом комбінування аналітичних, наближених та обчислювальних методів, які можна реалізувати в сучасних засобах комп'ютерного моделювання є актуальною задачею.

Пропонується підхід, який дозволяє розв'язувати нестаціонарні задачі теплопровідності при застосуванні методу теплових потенціалів та методу квадратур, що дає змогу підвищити ефективність обчислень за рахунок можливості розпаралелення задачі.

Розглянемо методи отримання інтегральних моделей на основі методу теплових потенціалів.

Одновимірний випадок. Методику отримання математичних моделей у формі інтегральних операторів на основі методу теплових потенціалів розглянемо на конкретних прикладах [2]. Розглянемо одновимірне рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{1}$$

і покладемо, що для проміжку $0 \le x \le l$ поставлена крайова задача з умовами

$$u\big|_{x=0} = \omega_1(t),\ u\big|_{x=l} = \omega_2(t) \tag{2}$$

і початковою умовою

$$u\big|_{t=0} = 0\ \ (0 \le x \le l). \tag{3}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді суми двох потенціалів, заданих у точці $x = 0$ і в точці $x = l$ (шукану інтенсивність у першій точці позначимо $\varphi(\tau)$, у другій — $\psi(\tau)$):

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau) e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} x d\tau + \int_0^t \frac{\psi(\tau) e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} (x-l) d\tau. \tag{4}$$

Крайові умови (2), в силу (4), запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \varphi(t) - l\displaystyle\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = \omega_1(t), \\ -\psi(t) + l\displaystyle\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = \omega_2(t). \end{cases} \tag{5}$$

Таким чином, для визначення інтенсивності потенціалів отримано систему інтегральних рівнянь.

Розглянемо випадок, коли крайові умови мають вигляд

$$u\big|_{x=0} = \omega_1(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \omega_2(t) \tag{6}$$

і початкові умови, як і вище, мають вигляд (3). Тоді розв'язок можна записати у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \int_0^t \frac{a\psi(\tau)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \tag{7}$$

Використавши умови (6) та розв'язок (7), матимемо

$$\begin{cases} \varphi(t) + \displaystyle\int_0^t \frac{a}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} \psi(\tau) e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = \omega_1(t), \\ \psi(t) + \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \varphi(t) d\tau - l^2 \int_0^t \frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{4a^3(t-\tau)^{5/2}} \varphi(\tau) d\tau = \omega_2(t). \end{cases} \tag{8}$$

В результаті знову отримується система інтегральних рівнянь відносно $\varphi(t)$ і $\psi(t)$.

Двовимірний випадок. Ідея потенціалу може застосовуватись і до багатовимірних задач теплопровідності [2]. Розглянемо двовимірний випадок, тобто рівняння

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) \,. \tag{9}$$

Аналог потенціалу простого шару визначається формулою:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_l \frac{a(\sigma,\tau)}{(t-\tau)} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma \,, \tag{10}$$

де σ — довжина дуги контуру l і $a(\sigma,\tau)$ — функція змінної контуру σ і часового параметра τ, $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$, r — відстань від точки (x, y) до змінної σ контуру l. Тепловий потенціал подвійного шару представляється формулою

$$v(x,y,t) = \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma,\tau)}{4\pi a^2 (t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r,n) \, d\sigma \,, \tag{11}$$

де n — напрям зовнішньої нормалі в точці інтегрування.

Шукана функція $v(x, y,t)$ задовольняє рівняння (9), яке має на контурі l задані крайові умови:

$$v\big|_l = \omega(s,t) \,, \tag{12}$$

де s — координата точки контуру, що визначається довжиною дуги s, яка відраховується від деякої точки. Початкові умови вважаються рівними нулю. Шукаючи розв'язок у вигляді подвійного шару (11) отримуємо інтегральні рівняння для функції $b(\sigma,\tau)$:

$$-b(s,t) + \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma,\tau)}{4\pi a^2 (t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r,n) \, d\sigma = \omega(s,t) \,. \tag{13}$$

У даному рівнянні інтегрування по σ здійснюється за фіксованим проміжком $(0, L)$, де L — довжина контуру l, і по τ, де верхня границя є змінною. Іншими словами, отримане інтегральне рівняння має характер рівнянь Фредгольма за відношенням до змінної σ і характер рівнянь Вольтерри за відношенням до змінної τ.

Задача теплопровідності з рухомою границею. Розглянемо на прикладі застосування методу теплових потенціалів до задач із рухомою границею. Задача формулюється наступним чином: знайти розв'язок рівнянь

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < a\sqrt{t}, \quad t > 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad a\sqrt{t} < x < \infty, \quad t > 0, \tag{15}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u_1(0,t) = \varphi(t), \quad 0 < t < \infty, \\ u_1(a\sqrt{t},t) = u_2(a\sqrt{t},t) = \psi(t), \quad 0 < t < \infty, \\ u_2(\infty,t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \\ u_2(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \end{cases} \tag{16}$$

та умовою узгодження

$$\varphi(0) = \psi(0). \tag{17}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді теплових потенціалів подвійного шару:

$$u_1(x,t) = \int_0^t \frac{x e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} \mu_1(\tau)}{2a_1\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} d\tau + \int_0^t \frac{\left(x - a\sqrt{\tau}\right) e^{-\frac{\left(x-a\sqrt{\tau}\right)^2}{4a_2^2(t-\tau)}} \mu_2(\tau)}{2a_1\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} d\tau, \tag{18}$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t \frac{x - a\sqrt{\tau}}{2a_2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\left(x-a\sqrt{\tau}\right)^2}{4a_2^2(t-\tau)}} v(\tau)\, d\tau. \tag{19}$$

Для виконання граничних умов отримуємо систему двох інтегральних рівнянь відносно $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$ та одне рівняння відносно $v(t)$:

$$\begin{cases} \varphi(t) = -\dfrac{k_1}{\pi} \displaystyle\int_0^t \frac{\tau^{1/2}}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{k_1^2 \tau}{t-\tau}} \mu_2(\tau)\, d\tau + \mu_1(t), \\ \psi(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{k_1 \zeta \mu_2(\tau) e^{-\frac{k_1^2 \zeta^2}{t-\tau}}}{\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} d\tau + \int_0^t \frac{k_1 \sqrt{t} e^{-\frac{k_1^2 t}{t-\tau}} \mu_1(\tau)}{\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} d\tau - \mu_2(t), \end{cases} \tag{20}$$

$$\psi(t) = v(t) + \frac{k_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\zeta}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{k_2^2 \zeta^2}{t-\tau}} v(\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

де $k_1 = \alpha / 2a_l$, $l = 1,2$, $\zeta = \left(\sqrt{t} - \sqrt{\tau}\right)$.

Розглянуті вище приклади показали, що розв'язок поставленої задачі задається у вигляді інтегральних операторів Вольтерри або їх сум (4), (7), (11), (18), (19) в яких присутня невідома функція, що визначається із крайових умов, які задаються інтегральними рівняннями Вольтерри II роду або їх системами (5), (8), (13), (20), (21) відповідно.

Підхід до розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь і їх систем може полягати в наступному. Для розв'язування даних рівнянь пропонується застосовувати чисельні методи, основані на методі квадратур [3]. При побудові алгоритмів розв'язування таких систем необхідно враховувати сингулярність ядер інтегральних моделей у точці $\tau = t$. Застосування методу зсуву сітки на $h/2$ (h — крок моделювання) дозволяє уникнути сингулярності [7]. Оскільки в даних моделях особливою є кінцева точка інтегрування, то для апроксимації інтегралів квадратурними сумами доцільно застосовувати метод лівих прямокутників. Компенсувати втрату точності методу квадратур можна шляхом застосування адаптивного методу зміни кроку моделювання в околі особливої точки.

Висновки. Запропонований метод розв'язування нестаціонарних задач теплопровідності дає змогу враховувати особливість та використати переваги як аналітичного методу теплових потенціалів, так і обчислювальних квадратурних методів. Така постановка задачі дозволяє знаходити розв'язки в необхідних точках, не шукаючи розв'язки у всіх точках просторової координати. Крім того, оскільки розв'язки в кожній точці є незалежними один від одного і можуть обчислюватись у різних потоках, то є можливість підвищення ефективності обчислень на основі застосування паралельних алгоритмів.

Список використаних джерел:

1. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of Haet in Solids. *Oxford Science Publications*. Oxford University Press, 1986. 520 p.
2. Белоносов С. М., Овсиенко В. Г., Карачун В. Я. Применение интегральных представлений к решениям задач теплопроводности и динамики вязкой жидкости. Київ : Вища школа, 1989. 163 с.
3. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев : Наук. думка, 1986. 542 с.
4. Карташов Э. М., Кудинов В. А., Калашников В. В. Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций : учеб. пособ. для бакалавриата, специалитета и магистратуры. М. : Издательство Юрайт, 2018. 435 с.
5. Пилипенко Н. В. Методы и приборы нестационарной теплометрии на основе решения задач теплопроводности. Санкт-Петербург : СПбГУ ИТМО, 2011. 180 с.
6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М. : Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
7. Сизиков В. С., Смирнов А. В., Федоров Б. А. Численное решение сингулярного интегрального уравнения Абеля обобщенным методом квадратур. *Изв. вузов. Матем.* 2004. № 8. С. 62–70.
8. Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. Київ : Наукова думка, 2002. 361 с.

INTEGRAL MODELS OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEMS BASED ON THE METHOD OF THERMAL POTENTIALS

The article discusses the approach to the construction of integral models of non-stationary problems of heat conduction based on the application of the method of thermal potentials. The possibility of constructing integral models is considered on specific examples using different thermal potentials: a one-dimensional heat conduction problem with different formulation of a boundary value problem (conditions of the first and second kind), the two-dimensional problem of heat exchange, the problem of heat exchange with a moving boundary. It is proposed to use a combination of exact and numerical methods, which allows to take into account the advantages of various approaches. The application of the method of thermal potentials to models in the form of partial differential equations allowed us to obtain a general solution in the form of the Volterra operator, which depends on the functions that are determined from the boundary conditions. That is, the task is reduced to solving the Volterra integral equations of the second kind or their systems. A feature of the models obtained is that the cores of integral models are singular at the end point of integration. It is proposed to solve such equations using computational methods that are based on the quadrature method. To avoid features in the kernel, the offset method is used. Taking into account the properties of the core, it is proposed to apply the method of left rectangles, which will avoid the singularity. To improve the accuracy of building a solution, it is proposed to apply the adaptive algorithm for compaction of simulation step in the vicinity of a singular point. The proposed approach to solving non-stationary problems of heat conduction takes into account the advantages of exact (thermal potential method) and computational methods (quadrature method) and allows to increase the efficiency of calculations based on the parallelization of the problem.

Key words: *nonstationary heat conduction problem, potential method, integral equations, quadrature method, singular integral equations.*

Одержано 15.02.2019