УДК 517.946
DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.26-39

А. П. Громик, канд. техн. наук

Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам’янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Актуальність теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка інтенсивно розвивається, обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при математичному моделюванні різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки, техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь та геометрії області в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв’язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв’язних областях.

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними.

У пропонованій роботі методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (матриць впливу та матриць Гріна) за найбільш загальних припущень побудовано точні аналітичні розв’язки математичних моделей коливних процесів (гіперболічних початково-крайових задач спряження) в необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Одержані розв’язки мають алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних еволюційних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем), які описуються циліндричною системою координат.

Ключові слова: *математичне моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні та гібридні інтегральні перетворення, матриця впливу, матриця Гріна.*

Вступ. Коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, новітніх технологіях, суттєво впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів, будівельних конструкцій при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме лінійне диференціальне рівняння коливань (хвильове рівняння, рівняння Д'аламбера) гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = f(t, P),$$

де Δ_3 — тривимірний оператор Лапласа у відповідній системі координат (декартовій, циліндричній, сферичній тощо) тривимірного евклідового простору, $a = const$, f — деяка наперед задана функція, P — точка простору.

Зрозуміло, що для адекватного моделювання коливного процесу до складу математичної моделі крім хвильового рівняння потрібно долучити ще певні початкові та крайові умови, а у випадку кусково-однорідних середовищ — умови контакту на поверхнях спряження. Таким чином, математичною моделлю коливного процесу є гіперболічна крайова задача математичної фізики [1]. На цей час досить детально вивчено одновимірні, двовимірні та тривимірні гіперболічні крайові задачі математичної фізики однорідних середовищ. Але у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів (найпростіший композит має дві точки спряження) у будівництві, техніці, сучасних технологіях як математичні моделі певних процесів виникають крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти модельних рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних сердовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими [2–4].

Крім методу відокремлення змінних [1, 6] та його узагальнень [5], одним з важливих і ефективних методів дослідження лінійних математичних моделей (лінійних крайових задач математичної фізики) є метод інтегральних перетворень [6], який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших математичних моделей (крайових задач) через їх інтегральне зображення у випадку однорідних середовищ. У той же час, для досить широкого класу задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом їх дослідження виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [7–11].

У цій статті, яка є логічним продовженням [12-14], ми пропонуємо точний аналітичний розв’язок узагальненої математичної моделі коливного процесу в необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі, побудований методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень при найбільш загальних обмеженнях на вихідні дані задачі.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ \left(t, r, \varphi, z\right) \middle| t > 0; r \in \mathrm{I}_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathrm{I}_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} \left(R_{j-1}; R_j\right), R_0 > 0, \right.$$

$$\left. R_{n+1} \equiv R < +\infty;\ \varphi \in \left(0; \varphi_0\right),\ 0 < \varphi_0 < 2\pi;\ z \in \left(-\infty; +\infty\right) \right\}$$

класичного розв’язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1, 6]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \tag{1}$$

$$+ \chi_j^2 u_j = f_j\left(t, r, \varphi, z\right),\ r \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0} = g_j^1\left(r, \varphi, z\right); \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0} = g_j^2\ \left(r, \varphi, z\right); r \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty} = 0; \left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty} = 0; s = 0,1;\ j = \overline{1, n+1}; \tag{3}$$

$$\left.\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \right|_{r=R_0} = g_0\left(t, \varphi, z\right); \left.\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \right|_{r=R} = g\left(t, \varphi, z\right); \tag{4}$$

$$\alpha_{11}^0 \le 0, \beta_{11}^0 \ge 0;\ \left|\alpha_{11}^0\right| + \beta_{11}^0 \ne 0;\ \alpha_{22}^{n+1} \ge 0, \beta_{22}^{n+1} \ge 0;\ \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \ne 0,$$

одними з крайових умов на гранях клина [7]

$$u_j\Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z);\ u_j\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z);\ j = \overline{1, n+1}, \tag{5}$$

$$u_j\Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z);\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z);\ j = \overline{1, n+1}, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z);\ u_j\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z);\ j = \overline{1, n+1}, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z);\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z);\ j = \overline{1, n+1} \tag{8}$$

та умовами спряження [12]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\ j=1,2;k=\overline{1,n}, \quad (9)$$

де

$$a_{rj}\,,a_{\varphi j}\,,\ a_{zj}\,,\ \chi_j\,,\ \alpha_{js}^{k},\ \beta_{js}^{k}\ \text{— деякі сталі;}$$

$$c_{jk}\equiv\alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k}-\alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}\neq 0;\ \ c_{1k}\cdot c_{2k}>0;$$

$$f(t,r,\varphi,z)=\{\,f_1(t,r,\varphi,z),\,f_2(t,r,\varphi,z),...,\,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\},$$

$$g^1(r,\varphi,z)=\left\{g_1^1(r,\varphi,z);g_2^1(r,\varphi,z),...,g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\};$$

$$g^2(r,\varphi,z)=\left\{g_1^2(r,\varphi,z);g_2^2(r,\varphi,z),...,g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\};$$

$$g_{pj}(t,r,z),\ \ \omega_{pj}(t,r,z);\ \left(p=\overline{1,4};\ j=\overline{1,n+1}\right),g_0(t,\varphi,z),g(t,\varphi,z)\ \text{—}$$

задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z);u_2(t,r,\varphi,z),...,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}\ \text{—}$$

шукана дійсна двічі неперервно диференційовна функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j=0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням коливань (хвильовим рівнянням, рівнянням Д'аламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
2) якщо $\alpha_{11}^k=0,\beta_{11}^k=1;\alpha_{12}^k=0,\beta_{12}^k=1;\alpha_{21}^k=E_1^k,\beta_{21}^k=0;\alpha_{22}^k=E_2^k,\ \ \beta_{22}^k=0$, де E_1^k,E_2^k — модулі Юнга $(k=\overline{1,n})$, то умови спряження (9) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Отже, гіперболічні початково-крайові задачі спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) можна розглядати як узагальнені математичні моделі коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Основна частина. Припустимо, що розв'язки задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [11, 15, 16].

Визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi\in(0;\varphi_0)$ за формулами [15]:

$$F_{m,ik}\left[f(\varphi)\right]=\int_0^{\varphi_0}f(\varphi)U_{m,ik}(\varphi)d\varphi\equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1}\left[f_{m,ik}\right]=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik} f_{m,ik}U_{m,ik}(\varphi)\equiv f(\varphi), \qquad (11)$$

де

$$\beta_{m,11}=\frac{\pi m}{\varphi_0},\ U_{m,11}(\varphi)=\sin\left(\beta_{m,11}\varphi\right);\beta_{m,12}=\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0},U_{m,12}(\varphi)=\sin\left(\beta_{m,12}\varphi\right);$$

$$\beta_{m,21}=\beta_{m,12},\ U_{m,21}(\varphi)=\cos\left(\beta_{m,21}\varphi\right);\beta_{m,22}=\beta_{m,11},\ U_{m,22}(\varphi)=\cos\left(\beta_{m,22}\varphi\right);$$

$$\varepsilon_0^{ik}=0,\ \varepsilon_m^{ik}=1 \text{ при } ik=11,12,21;\ m=1,2,3,\ldots.\ ;$$

$$\varepsilon_0^{22}=\frac{1}{2},\ \varepsilon_m^{22}=1 \text{ при } m=1,2,3,\ldots..\ .$$

Безпосередньо (інтегруванням частинами) перевіряється, що для оператора $F_{m,ik}$ виконується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального перетворення Фур'є:

$$F_{m,ik}\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right]=-\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik}+\Phi_{m,ik};\ i,k=1,2, \qquad (12)$$

де

$$\Phi_{m,11}=\frac{\pi m}{\varphi_0}\left[f(0)+(-1)^{m+1}f(\varphi_0)\right];\Phi_{m,12}=\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}f(0)+(-1)^m\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21}=-\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}+(-1)^m\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}f(\varphi_0);\Phi_{m,22}=-\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}+(-1)^m\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10) внаслідок тотожності (12) тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D'=\left\{(t,r,z)\middle|\, t>0;\ r\in \mathrm{I}_n^+,\ z\in(-\infty;+\infty)\right\}$$

розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jm,ik}}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}\right)+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm,ik}+ \\ +\chi_j^2 u_{jm,ik}=G_{jm,ik}(t,r,z),\ r\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1} \qquad (13)$$

з початковими умовами

$$\left.u_{jm,ik}\right|_{t=0}=g_{jm,ik}^1(r,z);\ \left.\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t}\right|_{t=0}=g_{jm,ik}^2(r,z), \qquad (14)$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty} = 0;\ \left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty} = 0;\ s = 0,1;\ j = \overline{1, n+1}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\left.\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right) u_{1m,ik}\right|_{r=R_0} = g_{0m,ik}(t,z); \\ &\left.\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1}\right) u_{n+1,m,ik}\right|_{r=R} = g_{m,ik}(t,z) \end{aligned} \tag{16}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p\right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p\right) u_{p+1,m,ik}\right]\right|_{r=R_p} = 0;\ j = 1,2;\ p = \overline{1,n}, \tag{17}$$

де

$$G_{jm,ik}(t,r,z) = f_{jm,ik}(t,r,z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t,r,z);\ \ \nu_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}.$$

До двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної z [16]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\sigma z} dz \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \tag{18}$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma z} d\sigma \equiv g(z), \tag{19}$$

$$F\left[\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = -\sigma^2 F[g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \tag{20}$$

Інтегральний оператор F, який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20), задачі (13)–(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t,r) \mid t > 0; r \in \mathrm{I}_n^+\}$ розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B-гіперболічного типу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t^2} - a_{rj}^2 B_{\nu_{jm,ik}}\left[\tilde{u}_{jm,ik}\right] + \\ &+\left(a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2\right) \tilde{u}_{jm,ik} = \tilde{G}_{jm,ik}(t,r,\sigma);\ r \in \mathrm{I}_j;\ \ j = \overline{1, n+1} \end{aligned} \tag{21}$$

з початковими умовами

$$\left.\tilde{u}_{jm,ik}\right|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}^1(r,\sigma);\ \left.\frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t}\right|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}^2(r,\sigma), r \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}, \tag{22}$$

крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^{0}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^{0}\right)\tilde{u}_{1m,ik}\right|_{r=R_0}=\tilde{g}_{0m,ik}(t,\sigma);$$
$$\left.\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{u}_{n+1,m,ik}\right|_{r=R}=\tilde{g}_{m,ik}(t,\sigma), \tag{23}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^{p}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{p}\right)\tilde{u}_{pm,ik}-\left(\alpha_{j2}^{p}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{p}\right)\tilde{u}_{p+1,m,ik}\right]\right|_{r=R_p}=0;\ j=1,2;\ p=\overline{1,n}, \tag{24}$$

де $B_{\nu_{jm,ik}}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 2-го роду на кусково-однорідному сегменті I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [11]:

$$M_{sn}\left[f(r)\right]=\int\limits_{R_0}^{R}f(r)V(r,\lambda_s)\sigma(r)rdr\equiv\tilde{f}(\lambda_s), \tag{25}$$

$$M_{sn}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda_s)\right]=\sum_{s=1}^{\infty}\tilde{f}(\lambda_s)\frac{V(r,\lambda_s)}{\left\|V(r,\lambda_s)\right\|^2}\equiv f(r), \tag{26}$$

$$\begin{aligned}M_{sn}\left[B_{(m,ik)}[f(r)]\right]&=-\lambda_s^2\tilde{f}(\lambda_s)-\sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}f(r)V_k(r,\lambda_s)\sigma_k rdr+\\&+\left(-\frac{a_1^2R_0\sigma_1}{\alpha_{11}^0}\right)V_1(R_0,\lambda_s)\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{df}{dr}+\beta_{11}^0 f\right)\right|_{r=R_0}+\\&+\frac{a_{n+1}^2R\sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(R,\lambda_s)\left.\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{df}{dr}+\beta_{22}^{n+1}f\right)\right|_{r=R}.\end{aligned} \tag{27}$$

У формулах (25)–(27) беруть участь величини і функції, виписані в [11], $B_{(m,ik)}=\sum\limits_{j=1}^{n+1}a_j^2\Theta(r-R_{j-1})\Theta(R_j-r)B_{\nu_{jm,ik}}$ — гібридний диференціальний оператор Бесселя, $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [17].

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^1_{1m,ik}(r,\sigma) \\ \tilde{g}^1_{2m,ik}(r,\sigma) \\ \cdots\cdots \\ \tilde{g}^1_{n+1,m,ik}(r,\sigma) \end{bmatrix},$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^2_{1m,ik}(r,\sigma) \\ \tilde{g}^2_{2m,ik}(r,\sigma) \\ \cdots\cdots \\ \tilde{g}^2_{n+1,m,ik}(r,\sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

де

$$q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Інтегральний оператор M_{sn}, який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{sn}[\cdots] = \left[\int\limits_{R_0}^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda_s)\sigma_1 r dr \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda_s)\sigma_2 r dr \quad \cdots \int\limits_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda_s)\sigma_n r dr \quad \int\limits_{R_n}^{R} \cdots V_{n+1}(r,\lambda_s)\sigma_{n+1} r dr\right] \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma) + \left(-\frac{a_1^2 R_0\sigma_1}{\alpha_{11}^0}\right)V_1(R_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m,ik}(t,\sigma) + \quad (31)$$

$$+\frac{a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_{m,ik}(t,\sigma),$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma)\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^{1}_{jm,ik}(\lambda_s,\sigma);$$
$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma)\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^{2}_{jm,ik}(\lambda_s,\sigma), \quad (32)$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma)=\int_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda_s)\sigma_j r dr;\ j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma)=\int_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{G}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda_s)\sigma_j r dr,\ j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{\tilde{g}}^{p}_{jm,ik}(\lambda_s,\sigma)=\int_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{g}^{p}_{jm,ik}(r,\sigma)V_j(r,\lambda_s)\sigma_j r dr;\ j=\overline{1,n+1},\ p=1,2.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_1^2(\sigma),\ q_2^2(\sigma),\ \ldots,\ q_{n+1}^2(\sigma)\right\}=q_1^2(\sigma)$ і покладемо всюди $\gamma_j^2=q_1^2(\sigma)-q_j^2(\sigma);\ j=\overline{1,n+1}$. Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}}{dt^2}+\Delta^2(\lambda_s,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}=\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)+$$
$$+\left(-\frac{a_1^2\sigma_1 R_0}{\alpha_{11}^0}\right)V_1(R_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m,ik}(t,\sigma)+\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}R}{\alpha_{11}^0}V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_{m,ik}(t,\sigma), \quad (33)$$

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}^{1}_{m,ik}(\lambda_s,\sigma);\quad \frac{d}{dt}\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}^{2}_{m,ik}(\lambda_s,\sigma), \quad (34)$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma);\quad \tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma),$$

$$\tilde{\tilde{g}}^{s}_{m,ik}(\lambda_s,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^{s}_{jm,ik}(\lambda_s,\sigma);\quad \Delta^2(\lambda_s,\sigma)=\lambda_s^2+a_{z1}^2\sigma^2+\chi_1^2;\ s=1,2.$$

Відомо [11], що єдиним розв'язком задачі (33), (34) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)=N(t,\lambda_s,\sigma)\,\tilde{\tilde{g}}^{2}_{m,ik}(\lambda_s,\sigma)+\frac{d}{dt}N(t,\lambda_s,\sigma)\,\tilde{\tilde{g}}^{1}_{m,ik}(\lambda_s,\sigma)+$$
$$+\int_0^t N(t-\tau,\lambda_s,\sigma)\Bigg[\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\tau,\lambda_s,\sigma)+\left(-\frac{a_1^2\sigma_1 R_0}{\alpha_{11}^0}\right)V_1(R_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m,ik}(t,\sigma)+ \quad (35)$$

$$+\frac{a_{n+1}^{2}\sigma_{n+1}R}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_{m,ik}\left(t,\sigma\right)\Bigg]d\tau,$$

де функція Коші (розв'язуюча функція) $N\left(t,\lambda_s,\sigma\right)=\dfrac{\sin(\Delta(\lambda_s,\sigma)t)}{\Delta(\lambda_s,\sigma)}$.

Оскільки суперпозиція операторів M_{sn} та M_{sn}^{-1} є одиничним оператором $\left(M_{sn}\circ M_{sn}^{-1}=M_{sn}^{-1}\circ M_{sn}=\mathrm{I}\right)$, то оператор M_{sn}^{-1}, як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$M_{sn}^{-1}\left[\cdots\right]=\begin{bmatrix}\int\limits_0^{+\infty}\cdots\dfrac{V_1(r,\lambda_s)}{\left\|V\left(r,\lambda_s\right)\right\|^2}\\ \int\limits_0^{+\infty}\cdots\dfrac{V_2(r,\lambda_s)}{\left\|V\left(r,\lambda_s\right)\right\|^2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int\limits_0^{+\infty}\cdots\dfrac{V_{n+1}(r,\lambda_s)}{\left\|V\left(r,\lambda_s\right)\right\|^2}\end{bmatrix} \tag{36}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)$ визначена формулою (35). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (21)-(24):

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)=&\sum_{s=1}^{\infty}N\left(t,\lambda_s,\sigma\right)\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}^{2}(\lambda_s,\sigma)\frac{V_j\left(r,\lambda_s\right)}{\left\|V\left(r,\lambda_s\right)\right\|^2}+\\&+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{s=1}^{\infty}N\left(t,\lambda_s,\sigma\right)\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}^{1}(\lambda_s,\sigma)\frac{V_j\left(r,\lambda_s\right)}{\left\|V\left(r,\lambda_s\right)\right\|^2}+\\&+\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^t N\left(t-\tau,\lambda_s,\sigma\right)\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\tau,\lambda_s,\sigma)d\tau\frac{V_j\left(r,\lambda_s\right)}{\left\|V\left(r,\lambda_s\right)\right\|^2}+\\&+\left(-\frac{a_1^2\sigma_1R_0}{\alpha_{11}^0}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^t N\left(t-\tau,\lambda_s,\sigma\right)V_1(R_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m,ik}\left(t,\sigma\right)d\tau\frac{V_j\left(r,\lambda_s\right)}{\left\|V\left(r,\lambda_s\right)\right\|^2}+\\&+\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}R}{\alpha_{22}^{n+1}}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^t N\left(t-\tau,\lambda_s,\sigma\right)V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_{m,ik}\left(t,\sigma\right)d\tau\frac{V_j\left(r,\lambda_s\right)}{\left\|V\left(r,\lambda_s\right)\right\|^2};\ j=\overline{1,n+1}.\end{aligned} \tag{37}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)$, визначених формулами (37), обернені оператори F^{-1} та $F^{-1}_{m,ik}$, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$
\begin{aligned}
&u_{j,ik}(t,r,\varphi,z) = \\
&= \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi) f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p \rho\, d\xi\, d\alpha\, d\rho\, d\tau + \\
&+ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi) g_p^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p \rho\, d\xi\, d\alpha\, d\rho + \\
&+ \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi) g_p^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p \rho\, d\xi\, d\alpha\, d\rho + \\
&+ \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p \rho^{-1} d\xi\, d\rho\, d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[W_{jr,ik}^1(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z-\xi) g_0(\tau,\alpha,\xi) + \\
&+ W_{jr,ik}^2(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z-\xi) g(\tau,\alpha,\xi) \Big] d\xi\, d\alpha\, d\tau; \; j = \overline{1,n+1},
\end{aligned} \tag{38}
$$

які визначають єдині розв'язки гіперболічних початково-крайових задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$
E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} \mathrm{P}_{jp}^{m,ik}(t,r,\rho,z) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)
$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$
Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} \mathrm{P}_{jp}^{m,ik}(t-\tau,r,\rho,z-\xi) \Phi_{m,ik}(\tau,\rho,\xi) U_{m,ik}(\varphi)
$$

компоненти

$$
W_{jr,ik}^1(t,r,\varphi,\alpha,z) = -\frac{a_1^2 \sigma_1 R_0}{\alpha_{22}^{n+1}} E_{j1}^{ik}(t,r,R_0,\varphi,\alpha,z)
$$

лівої радіальної матриці Гріна (ліві радіальні функції Гріна) та компоненти

$$
W_{jr,ik}^2(t,r,\varphi,\alpha,z) = \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} R}{\alpha_{22}^{n+1}} E_{j,n+1}^{ik}(t,r,R,\varphi,\alpha,z)
$$

правої радіальної матриці Гріна (праві радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$P_{jp}^{m,ik}(t,r,\rho,z)=\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^t N(t,\lambda_s,\sigma)\cos(\sigma z)\,d\sigma\,\frac{V_j(r,\lambda_s)V_p(\rho,\lambda_s)}{\left\|V_j(r,\lambda_s)\right\|^2}.$$

Зауваження 1. Аналіз розв'язків (38) в залежності від типу крайових умов на гранях клина $\varphi=0$ та $\varphi=\varphi_0$ повторює відповідний аналіз в [12].

Зауваження 2. У випадку $a_{rj}=a_{\varphi j}=a_{zj}\equiv a_j>0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Зауваження 3. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ зводиться до розглянутого нами заміною $\varphi'=\varphi-\varphi_1$ $(\varphi_0=\varphi_2-\varphi_1)$.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0,\ \beta_{11}^0;\ \alpha_{22}^{n+1},\ \beta_{22}^{n+1}$ дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки крайових задач у випадках задання на радіальних поверхнях крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій (1-1, 1-2, 1-3, 2-1, … ,3-3).

Зауваження 5. Аналіз розв'язків (38) в залежності від аналітичного виду функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^s(r,\varphi,z)$, $g_{kj}(t,r,z)$, $\omega_{kj}(t,r,z)$, $j=\overline{1,n+1}$, $s=1,2$; $k=\overline{1,4}$, $g_0(t,\varphi,z)$, $g(t,\varphi,z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки узагальнених математичних моделей коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків з використанням чисельних методів.

Список використаних джерел:

1. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — Київ : Либідь, 2006. — 424 с.
2. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — Киев : Наук. думка, 2001. — 606 с.
3. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — Киев : Наук. думка, 1998. — 614 с.

4. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — Киев : Наук. думка, 1991. — 432 с.
5. Каленюк П. И. Обобщенный метод разделения переменных / П. И. Каленюк, Я. Е. Баранецкий, З. Н. Нитребич. — Киев : Наук. думка, 1993. — 232 с.
6. Самойленко В. Г. Рівняння математичної фізики / В. Г. Самойленко, І. М. Конет. — Київ : ВПЦ «Київський університет», 2014. — 283 с.
7. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
8. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. — 244 с.
11. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. — 84 с.
12. Громик А. П. Математичне моделювання коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі / А. П. Громик // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2017. — Вип. 16. — С. 36–52.
13. Громик А. П. Математичне моделювання коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною / А. П. Громик // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2018. — Вип. 17. — С. 26–39.
14. Громик А. П. Математичне моделювання коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі / А. П. Громик // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2018. — Вип. 18. — С. 34–47.
15. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956.-204 с.
16. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
17. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965. — 408 с.
18. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 247 с.
19. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

MATHEMATICAL MODELING OF OSCILLATING PROCESSES IN UNLIMITED PIECEWISE-HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED HOLLOW CYLINDER

The theory of boundary value problems for differential equations with partial derivatives develops intensively and its results are important for the development of many sections of mathematics. Its achievements are applied in the mathematical modeling of various processes and phenomenon of physics, mechanics, biology, medicine, economics, engineering.

It is well known that the complexity of a boundary-value problem significantly depends on the coefficients of equations and the geometry of domain in which the problem is considered. Properties of solutions of boundary value problems for linear, quasilinear, and some classes of nonlinear equations in single-connected domains have been studied in enough detail.

However, many important applied problems of thermal physics, thermomechanics, theory of elasticity, theory of electrical circuits, theory of vibrations lead to boundary value problems for differential equations with partial derivatives not only in homogeneous domains when the coefficients of the equations are continuous, but also in piecewise homogeneous and inhomogeneous domains when the coefficients of the equations are piecewise continuous.

In this article the exact analytical solutions of mathematical models of oscillating processes (hyperbolic initial-boundary problem of conjugation) for unlimited piecewise-homogeneous wedge-shaped hollow cylinder are obtained by means of the method of integral and hybrid integral transforms, in combination with the method of main solutions (influence matrices and Green's matrices).

The obtained solutions are of algorithmic character, continuously depend on the parameters and data of problem and can be used in further theoretical research and in practical engineering calculations of real processes which are modeled by hyperbolic boundary-value problems that are described by a cylindrical coordinate system (problems of acoustics, hydrodynamics, the theory of vibrations of mechanical systems).

Keywords: *modelling, oscillating, hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transformation, the influence matrix, Green's matrix.*

Отримано: 7.08.2019