

УДК 539.3

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.88-98

**Р. С. Мусій**, д-р. фіз.-мат. наук, професор,  
**А. Й. Наконечний**, д-р. техн. наук, професор  
**Б. Й. Бандирський**, канд. фіз.-мат. наук,  
**В. К. Шиндер**, канд. фіз.-мат. наук,  
**О. Г. Орищин**, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

## **ВИЗНАЧЕННЯ ДЖОУЛЕВОГО ТЕПЛА ТА ПОНДЕРОМОТОРНОЇ СИЛИ У ПЛАСТИНЧАСТОМУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОМУ ЕЛЕМЕНТІ ЗА ДІЇ ЗОВНІШНЬОГО НЕУСТАЛЕНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ**

Сформульовано одновимірну початково-крайову задачу електродинаміки для електропровідного неферромагнітного шару з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього неусталеного електромагнітного поля. Електромагнітне поле задане значеннями однорідної дотичної до основ шару компоненти вектора напруженості магнітного поля на його основах. Дія неусталеного електромагнітного поля на розглядуваний шар проявляється двома фізичними чинниками — джоулевим теплом і пондеромоторними силами, які відповідно до зовнішньої електромагнітної дії мають також неусталений характер зміни в часі. Отримано загальний розв'язок сформульованої початково-крайової задачі за довільної однорідної нестационарної електромагнітної дії. Для побудови розв'язку використано кубічну апроксимацію ключової функції — дотичної до основ шару компоненти вектора напруженості магнітного поля за товщинною координатою. Коефіцієнти апроксимаційного полінома подано через інтегральні характеристики ключової функції та задані її значення на основах шару як відповідні функції часу. У результаті вихідна початково-крайова задача електродинаміки на ключову функцію зведена до задачі Коші на інтегральні (залежні лише від часу) характеристики цієї функції. Загальні розв'язки задачі Коші знайдено з використанням інтегрального перетворення Лапласа і отримано у вигляді згортки функцій, що описують задані граничні значення ключової функції на основах шару та однорідні розв'язки задачі Коші. На основі отриманих загальних розв'язків записано розв'язок вихідної задачі електродинаміки за дії неусталеного електромагнітного поля та вирази джоулевого тепла і пондеромоторної сили. Результати числового аналізу виразів розглядуваних величин залежно від параметрів неусталеного електромагнітного поля радіочастотного діапазону наведено у вигляді відповідних графіків. Встановлено, що за тривалостей перехідного режиму зовнішньої неусталеної електромагнітної дії менших за чверть періоду несучих електромагнітних коливань максимальні значення джоулевого

тепла і пондеромоторної сили можуть бути суттєво більшими за їх значення в усталеному режимі електромагнітного поля.

**Ключові слова:** електропровідний шар, неусталене електромагнітне поле, джоулеве тепло, пондеромоторні сили, кубічна апроксимація, інтегральні характеристики.

**Вступ.** Електропровідні пластини постійної товщини є конструктивними елементами багатьох приладів і пристроїв, в процесі функціонування яких вони зазнають впливу зовнішніх нестационарних електромагнітних полів (ЕМП) [1, с. 57–83]. Ці ЕМП часто мають неусталений характер зміни в часі. У літературі відомі методи визначення індукованого у пластині зовнішньою електромагнітною дією усталеного ЕМП та зумовлених ним джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил [2, с. 36–42]. Однак, недостатньо вивчено вплив зовнішнього неусталеного ЕМП на закономірності зміни джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил, які є важливими для розрахунку температурно-силових режимів функціонування електропровідних пластинчастих елементів.

У роботі з використанням апроксимації кубічним поліномом розподілу за товщинною координатою дотичної до основ електропровідного шару з плоскопаралельними межами компоненти вектора напруженості магнітного поля знайдено загальний розв'язок початково-крайової задачі електродинаміки, сформульованої стосовно цієї компоненти, за однорідної нестационарної електромагнітної дії. На основі цього розв'язку записано вирази даної компоненти вектора напруженості магнітного поля та джоулевого тепла і пондеромоторних сил за дії зовнішнього неусталеного ЕМП. Чисельно проаналізовано закономірності зміни джоулевого тепла і пондеромоторних сил залежно від параметрів зовнішнього неусталеного ЕМП.

**Математична постановка задачі.** Розглядаємо описаний вище електропровідний шар за однорідної нестационарної електромагнітної дії (рис. 1).

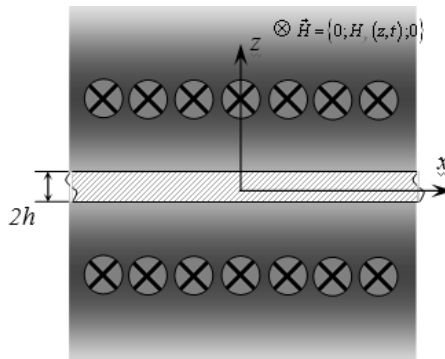


Рис. 1.

У цьому випадку ЕМП задане лише залежними від часу  $t$  значеннями відмінної від нуля дотичної компоненти  $H_y(z, t)$  вектора напруженості магнітного пол. я  $\vec{H}(z, t) = \{0; H_y(z, t); 0\}$  на основах шару  $z = \pm h$ .

За дії такого ЕМП ключова функція  $H_y$  залежить лише від товщинної координати  $z$  і часу  $t$  та описується рівнянням [3, с. 57–59]

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \sigma \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

крайовими

$$H_y(\pm h, t) = H_y^\pm(t) \quad (2)$$

та нульовою початковою

$$H_y(z, 0) = 0 \quad (3)$$

умовами.

Тут  $H_y^\pm(t)$  — задані функції часу,  $\sigma$  — коефіцієнт електропровідності,  $\mu$  — магнітна проникність матеріалу шару.

За знайденою функцією  $H_y$  питомі густини джоулевих тепловиділень  $Q$  і пондеромоторної сили  $\vec{F}$  записуються виразами:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial H_z}{\partial z} \right)^2, \quad \vec{F} = \left\{ 0; 0; F_z = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial z} H_z \right\}. \quad (4)$$

**Методика побудови розв'язку.** Для побудови розв'язку початково-крайової задачі (1)–(3) апроксимуємо розподіл ключової функції  $H_y$  за товщинною координатою  $z$  кубічним поліномом, тобто подаємо ці функції у вигляді [3, с. 109]

$$H_y(z, t) = \sum_{i=0}^3 a_i(t) z^i. \quad (5)$$

Коефіцієнти  $a_i(t)$  апроксимаційного полінома (5) виражаються через інтегральні за товщинною координатою  $z$  характеристики шуканої функції

$$H_{ys}(t) = \int_{-h}^h H_y(z, t) z^{s-1} dz, \quad s = 1, 2 \quad (6)$$

і задані на основах шару  $z = \pm h$  граничні значення  $H_y^\pm(t)$  функції  $H_y(z, t)$ , тобто подаються у вигляді

$$a_i(t) = a_{i1}H_{y1}(t) + a_{i2}H_{y2}(t) + a_{i3}H_y^+(t) + a_{i4}H_y^-(t). \quad (7)$$

Для отримання системи рівнянь на інтегральні характеристики  $H_{ys}(t)$  шуканої ключової функції  $H_y(z, t)$  вихідне рівняння (1) на функцію  $H_y(z, t)$  інтегруємо відповідно співвідношенню (6) і використовуємо при перетвореннях співвідношення (5) і (7). У результаті для компоненти  $H_y(z, t)$  вектора  $\vec{H}$  отримуємо подання

$$H_y(z, t) = \frac{3}{4}H_{y1}(t) \left( 1 - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) + \frac{15}{4}H_{y2}(t) \left( \frac{z}{h} - \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right) - \frac{1}{4} \left[ H_y^+(t) + H_y^-(t) \right] \left( 1 - 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \left[ H_y^+(t) - H_y^-(t) \right] \left( 3 \frac{z}{h} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right), \quad (8)$$

де інтегральні характеристики  $H_{ys}(t)$  визначаються зі системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dH_{y1}}{dt} + \frac{3}{\sigma\mu h^2}H_{y1} &= \frac{3}{\sigma\mu h^2}(H_y^+ + H_y^-), \\ \frac{dH_{y2}}{dt} + \frac{15}{\sigma\mu h^2}H_{y2} &= \frac{5}{\sigma\mu h^2}(H_y^+ - H_y^-). \end{aligned} \quad (9)$$

Систему (9) розв'язуємо за врахування нульової початкової умови (3) на функцію  $H_y(z, t)$ , тобто за нульових початкових умов

$$H_{ys}(z, 0) = 0. \quad (10)$$

Для побудови розв'язків сформульованої вище задачі Коші (9)–(10) на інтегральні характеристики компоненти  $H_y(z, t)$  вектора  $\vec{H}$  застосовуємо інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною  $t$ .

Використовуючи теорему розкладу і теорему про згортку функцій, записуємо вирази шуканих інтегральних характеристик  $H_{ys}(t)$  ( $s = 1, 2$ ) дотичної компоненти  $H_y(z, t)$  вектора  $\vec{H}$

$$\begin{aligned} H_{y1}(t) &= 3 \int_0^t e^{\frac{3}{\sigma\mu h^2}(t-\tau)} \left[ H_y^+(\tau) + H_y^-(\tau) \right] d\tau, \\ H_{y2}(t) &= 5 \int_0^t e^{\frac{15}{\sigma\mu h^2}(t-\tau)} \left[ H_y^+(\tau) - H_y^-(\tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

**Розв'язок задачі за дії неусталеного ЕМП.** Зовнішнє неусталене ЕМП перехідного типу задане значеннями однорідної дотичної складової  $H_y(z, t)$  вектора  $\vec{H}$  поля на поверхнях  $z = \pm 1$  виразом

$$H_y^\pm(\tau) = H_y(\pm 1, \tau) \equiv H_0(1 - e^{-\beta\tau})e^{ib\tau}. \quad (12)$$

Тут  $H_0$  — задана величина амплітуди напруженості магнітного поля,  $\beta$  — параметр, що характеризує час виходу неусталених електромагнітних коливань на усталений режим,  $b = 1/(2\delta_0^2)$ ,  $\delta_0 = (2\omega\sigma\mu h^2)^{-1/2}$  — параметр, що характеризує відносну до півтовщини шару  $h$  глибину проникання індукційних струмів,  $\omega$  — частота несучих електромагнітних коливань,  $\tau = t/(\sigma\mu h^2)$  — безрозмірний характерний для електромагнітних процесів час,  $z = z/h$ .

Підставляючи вираз (12) у формули (11) та (8), а також (4), запишемо вирази функції  $H_y(z, \tau)$  та зумовлених нею джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил за розглядуваної неусталеної електромагнітної дії. Отримуємо:

$$H_y(z, \tau) = H_0 \left\{ \frac{1}{2} e^{ib\tau} \left[ \frac{6 - ib + 3ibz^2}{ib + 3} - e^{-\beta\tau} \frac{6 - ib + \beta + 3(ib - \beta)z^2}{ib + 3 - \beta} \right] + \frac{9}{2} \beta \frac{1 - z^2}{(ib + 3)^2 - \beta(ib + 3)} e^{-3\tau} \right\}; \quad (13)$$

Для доданків питомої потужності джоулевого тепла  $Q = \sum_{j=1}^4 Q^{(j)}$

запишемо вирази:

$$\begin{aligned} H_0^{-2} Q^{(1)}(z) &= \frac{1}{4\sigma_0 h^2} \left[ (q_5^2 + q_6^2) z^2 - 2(q_5 q_7 + q_6 q_8) z^4 + (q_7^2 + q_8^2) z^6 \right]; \\ H_0^{-2} Q^{(2)}(z, \tau) &= \frac{1}{4\sigma_0 h^2} \left\{ [G_1(z) + iG_2(z)] e^{i2b\tau} + [G_1(z) - iG_2(z)] e^{-i2b\tau} \right\}; \\ H_0^{-2} Q^{(3)}(z, \tau) &= \frac{q_9}{\sigma_0 h^2} e^{-\frac{5}{2}\tau} \left\{ [G_3(z, \tau) + iG_4(z, \tau)] e^{ib\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ [G_3(z, \tau) - iG_4(z, \tau)] \right] e^{-ib\tau} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\sigma_0 h^2} \left\{ [G_5(z, \tau) + iG_6(z, \tau)] e^{i2b\tau} + [G_5(z, \tau) - iG_6(z, \tau)] e^{-i2b\tau} \right\}; \\ H_0^{-2} Q^{(4)}(z, \tau) &= \frac{1}{\sigma_0 h^2} q_9^2 e^{-5\tau} (9z^2 - 6z^4 + z^6) + \frac{1}{4\sigma_0 h^2} G_7(z, \tau). \quad (14) \end{aligned}$$

Для доданків питомої густини  $F_z = \sum_{j=1}^4 F^{(j)}$  відмінної від нуля складової  $F_z(z, \tau) \equiv F(z, \tau)$  пондеромоторної сили будемо мати вирази:

$$\begin{aligned}
 H_0^{-2} F^{(1)}(z, \tau) &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{h} (z q_{24} + z^3 q_{25} - z^5 q_{26}); \\
 H_0^{-2} F^{(2)}(z, \tau) &= \frac{1}{4} \frac{\mu}{h} \left\{ [G_8(z) + i G_9(z)] e^{i2b\tau} + [G_8(z) - i G_9(z)] e^{i2b\tau} \right\}; \\
 H_0^{-2} F^{(3)}(z, \tau) &= \frac{\mu}{h} \left\langle \frac{1}{2} [G_{10}(z, \tau) (e^{ib\tau} + e^{-ib\tau}) + G_{11}(z, \tau) (e^{ib\tau} + e^{-ib\tau})] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} [G_{12}(z, \tau) + i G_{13}(z, \tau)] e^{i2b\tau} + [G_{12}(z, \tau) - i G_{13}(z, \tau)] e^{-i2b\tau} \right\rangle; \\
 H_0^{-2} F^{(4)}(z, \tau) &= \frac{\mu}{h} \left\{ q_9 q_{17} e^{-\frac{11}{2}\tau} (z^5 - 4z^3 + 3z) + G_{14}(z, \tau) \right\}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Тут:

$$\begin{aligned}
 G_1(z) &= (q_5^2 - q_6^2) z^2 - 2(q_5 q_7 - q_6 q_8) z^4 + (q_7^2 - q_8^2) z^6; \\
 G_2(z) &= q_5 q_6 z^2 - (q_6 q_7 + q_5 q_8) z^4 + q_7 q_8 z^6; \\
 G_3(z, \tau) &= e^{-\beta\tau} [3q_1 z^2 - (q_1 + 3q_3) z^4 + q_2 z^6] + \\
 &\quad + [3q_5 z^2 - (3q_7 + q_5) z^4 + q_7 z^6]; \\
 G_4(z, \tau) &= e^{-\beta\tau} [3q_2 z^2 - (3q_4 + q_2) z^4 + q_4 z^6] + \\
 &\quad + [3q_6 z^2 - (3q_8 + q_6) z^4 + q_8 z^6]; \\
 G_5(z, \tau) &= e^{-\beta\tau} [(q_1^2 - q_2^2) z^2 + 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) z^4 + (q_3^2 - q_4^2) z^6] + \\
 &\quad + 2e^{-\beta\tau} [(q_1 q_5 - q_2 q_6) z^2 - (q_1 q_8 + q_3 q_5 - q_2 q_8 - q_4 q_6) z^4 + (q_3 q_7 - q_4 q_8) z^6]; \\
 G_6(z, \tau) &= 2 \left\{ e^{-2\beta\tau} [q_1 q_2 z^2 - (q_1 q_4 + q_2 q_3) z^4 + q_3 q_4 z^6] + 2e^{-\beta\tau} \times \right. \\
 &\quad \left. \times [(q_1 q_6 + q_2 q_5) z^2 - (q_1 q_8 + q_3 q_6 + q_6 q_5 + q_2 q_7) z^4 + (q_3 q_8 + q_4 q_7) z^6] \right\}; \\
 G_7(z, \tau) &= e^{-2\beta\tau} [(q_1^2 + q_2^2) z^2 - 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) z^4 + (q_3^2 + q_4^2) z^6] + \\
 &\quad + 2e^{-\beta\tau} [(q_1 q_5 + q_2 q_6) z^2 - (q_1 q_7 + q_3 q_5 + q_2 q_8 + q_4 q_6) z^4 + (q_3 q_7 + q_4 q_8) z^6]; \\
 G_8(z) &= q_{33} + z^3 q_{34} + z^5 q_{35}; \quad G_9(x_3) = z q_{42} + z^3 q_{43} - z^5 q_{44};
 \end{aligned}$$

$$G_{10}(z, \tau) = q_9 \left( 3z - z^3 \right) \left[ e^{-5/2\tau} \left( q_{10} + z^2 q_{11} \right) - e^{-(\beta+5/2)\tau} \left( q_{14} + z^2 q_{15} \right) \right] + \\ + q_{17} \left( 1 - z^2 \right) \left[ e^{-(\beta+3)\tau} \left( q_2 z - q_3 z^3 \right) + e^{-3\tau} \left( q_5 z - q_7 z^3 \right) \right];$$

$$G_{11}(z, \tau) = q_{17} \left( 1 - z^2 \right) \left[ e^{-(\beta+3)\tau} \left( q_2 z - z^3 q_4 \right) + e^{-3\tau} \left( q_6 z - z^3 q_8 \right) \right] - \\ - q_9 \left( 3z - z^3 \right) \left[ e^{-(\beta+5/2)\tau} q_{16} \left( 1 + z^2 \right) + e^{-5/2\tau} \left( q_{12} - q_{13} z^2 \right) \right];$$

$$G_{12}(z, \tau) = e^{-2\beta\tau} \left( z q_{27} + z^3 q_{28} + z^5 q_{29} \right) + e^{-\beta\tau} \left( z q_{30} + z^3 q_{31} + z^5 q_{32} \right);$$

$$G_{13}(z, \tau) = e^{-\beta\tau} \left( z q_{39} + z^3 q_{40} + z^5 q_{41} \right) - e^{-2\beta\tau} \left( z q_{36} + z^3 q_{37} - z^5 q_{38} \right);$$

$$G_{14}(z, \tau) = \frac{1}{2} \left[ e^{-2\beta\tau} \left( z^5 q_{20} - z^3 q_{19} - z q_{18} \right) + e^{-\beta\tau} \left( z q_{21} + z^3 q_{22} + z^5 q_{23} \right) \right];$$

$$q_1 = 3 \left[ \frac{(5/2 - \beta)\beta - b^2}{q_0} - \frac{1}{12} \beta \right]; \quad q_2 = 3 \left( \frac{b}{12} - \frac{5/2b}{q_0} \right);$$

$$q_3 = \frac{(5/2 - \beta)\beta - b^2}{q_0} - \frac{5}{12} \beta; \quad q_4 = \frac{5}{12} b - \frac{5/2b}{q_0}; \quad q_5 = \frac{25}{8} \frac{b^2}{q_{0*}}$$

$$q_6 = \frac{125}{16} \frac{b}{q_{0*}} - \frac{b}{4}; \quad q_7 = \frac{25}{24} \frac{b^2}{q_{0*}}; \quad q_8 = \frac{125}{48} \frac{b}{q_{0*}} - \frac{5}{12} b;$$

$$q_9 = \frac{25}{24} \left[ \frac{(5/2 - \beta)\beta - b^2}{q_0} - \frac{b^2}{q_{0*}} \right]; \quad q_0 = \left( \frac{5}{2} - \beta \right)^2 + b^2;$$

$$q_{0*} = \frac{25}{4} + b^2; \quad q_{10} = \frac{1}{2} \frac{18 - b^2}{9 + b^2};$$

$$q_{11} = \frac{3}{2} \frac{b^2}{9 + b^2}; \quad q_{12} = \frac{9}{2} \frac{b^2}{9 + b^2}; \quad q_{13} = \frac{1}{6} q_{11}; \quad q_{14} = \frac{1}{2} \frac{(3 - \beta)(6 + \beta) - b^2}{(3 - \beta)^2 + b^2};$$

$$q_{15} = \frac{1}{2} \frac{3b^2 - 3\beta(3 - \beta)}{(3 - \beta)^2 + b^2}; \quad q_{16} = -\frac{9}{2} \frac{b}{(3 - \beta)^2 + b^2};$$

$$q_{17} = \frac{9}{2} \beta \frac{9 - b^2 - 3\beta}{(9 - b^2 - 3\beta)^2 + b^2 (6 - \beta)^2};$$

$$q_{18} = q_1 q_{14} + q_2 q_{16}; \quad q_{19} = q_1 q_{15} - q_3 q_{14} + q_2 q_{16} - q_4 q_{16};$$

$$q_{20} = q_3 q_{15} + q_4 q_{16};$$

$$q_{21} = q_1 q_{10} - q_5 q_{14} - q_6 q_{16} - q_2 q_{12};$$

$$\begin{aligned}
q_{22} &= q_1 q_{11} - q_3 q_{10} + q_7 q_{14} - q_5 q_{15} - q_6 q_{16} + q_8 q_{16} + q_2 q_{13} + q_4 q_{12}; \\
q_{23} &= q_7 q_{15} - q_3 q_{11} + q_8 q_{16} - q_4 q_{13}; \quad q_{24} = q_5 q_{10} - q_6 q_{12}; \\
q_{25} &= q_5 q_{11} - q_7 q_{10} + q_6 q_{13} + q_8 q_{12}; \\
q_{26} &= q_8 q_{13}; \quad q_{27} = q_2 q_{16} - q_1 q_{14}; \quad q_{28} = q_2 q_{16} - q_4 q_{16} - q_1 q_{15} + q_3 q_{14}; \\
q_{29} &= q_3 q_{15} - q_4 q_{16}; \\
q_{30} &= q_1 q_{10} - q_5 q_{14} + q_6 q_{16} + q_2 q_{12}; \\
q_{31} &= q_1 q_{11} - q_3 q_{10} - q_5 q_{15} + q_7 q_{14} + q_6 q_{16} - q_8 q_{16} - q_2 q_{13} - q_4 q_{12}; \\
q_{32} &= q_7 q_{15} - q_3 q_{11} - q_8 q_{16} + q_4 q_{13}; \quad q_{33} = q_5 q_{10} + q_6 q_{12}; \\
q_{34} &= q_5 q_{11} - q_7 q_{10} - q_6 q_{13} - q_{12} q_{18}; \\
q_{35} &= q_8 q_{13} - q_7 q_{11}; \quad q_{36} = q_2 q_{14} + q_1 q_{16}; \\
q_{37} &= q_2 q_{15} - q_4 q_{14} + q_1 q_{16} - q_3 q_{16}; \\
q_{38} &= q_4 q_{15} + q_3 q_{16}; \quad q_{39} = q_2 q_{10} - q_6 q_{14} - q_5 q_{16} - q_1 q_{12}; \\
q_{40} &= q_2 q_{11} - q_4 q_{10} - q_6 q_{15} + q_8 q_{14} - q_5 q_{16} + q_7 q_{16} + q_1 q_{13} + q_3 q_{12}; \\
q_{41} &= q_8 q_{15} - q_4 q_{11} - q_{13} q_3 + q_7 q_{15}; \\
q_{42} &= q_6 q_{10} - q_5 q_{12}; \quad q_{43} = q_6 q_{11} - q_8 q_{10} + q_5 q_{13} + q_7 q_{12}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що у виразах (14)–(15) складові  $Q^{(1)}$ ,  $F^{(1)}$  відповідають усередненим за період електромагнітних коливань  $f = \frac{2\pi}{\omega}$  значенням  $Q$  і  $F$ ; складові  $Q^{(2)}$ ,  $F^{(2)}$  відповідають усталеним коливним в часі з періодом  $2f$  значенням  $Q$  і  $F$ ; складові  $Q^{(3)}$ ,  $F^{(3)}$  відповідають затухаючим коливним в часі з періодом  $f$  значенням  $Q$  і  $F$ ; складові  $Q^{(4)}$ ,  $F^{(4)}$  відповідають аперіодично змінним у часі значенням  $Q$  і  $F$ .

**Числовий аналіз.** Результати числових досліджень виконано для складової  $E_x$  напруженості електричного поля  $\vec{E}(z, t) = \{E_x(z, t); 0; 0\}$  та неперіодичних складових джоулевого тепла  $Q = Q^{(1)} + Q^{(4)}$  і пондеромоторної сили  $F = F^{(1)} + F^{(4)}$  у розглядуваному шарі товщиною 3 мм, виготовленому зі нержавної сталі Х18Н9Т. На рис. 2 кривими 1 показаний розподіл миттєвих значень напруженості електричного поля на поверхні шару при безрозмірному часі  $\tau_0 = 18$  ( $\beta = 0.26$ ). Суцільні лінії

відповідають виходу на усталений режим за  $\frac{1}{50}$  періоду  $f = \frac{2\pi}{\omega}$  ( $\tau_0 = \frac{1}{50} f$ ;  $\delta_0^2 = 8.3$ ), штрихові — за  $\frac{1}{10}$  періоду ( $\tau_0 = \frac{1}{10} f$ ;



$\delta_0^2 = 20.8$ ) і штрих-пунктирні — за  $\frac{1}{4}$  періоду ( $\tau_0 = \frac{1}{4} f$ ;  $\delta_0^2 = 104.2$ ).

Кривими 2 для тих же величин  $\delta_0$  приведені амплітудні значення. Отримано, що при зменшенні часу виходу порівняно з періодом суттєво збільшується різниця між максимальним значенням напруженості на перехідному режимі порівняно зі значенням в усталеному режимі. Так,

для  $\tau_0 = \frac{1}{50} f$  відношення максимального значення напруженості на перехідному режимі  $E_{\max}$  до значення в усталеному режимі  $E_{\text{уст}}$  дорівнює

$n = \frac{E_{\max}}{E_{\text{уст}}} \approx 42$ ; для  $\tau_0 = \frac{1}{10} f$  —  $n = 8$ , а для  $\tau_0 = \frac{1}{4} f$  —  $n = 3$ .

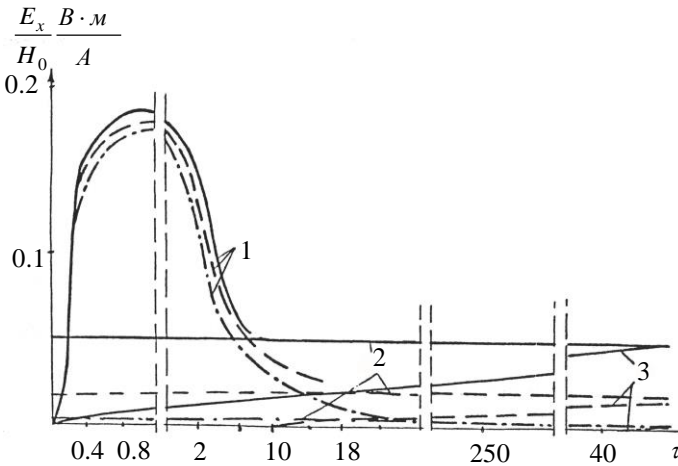


Рис. 2.

Зауважимо, що у джоулевих тепловиділеннях аналогічні відношення  $n_* = \frac{Q_{\max}}{Q_{\text{уст}}}$  будуть складати  $n_* = n^2$ .

Кривими 3 на рисунку показані залежності амплітудних значень напруженості електричного поля від часу  $\tau$  при тих же значеннях параметра  $\delta_0$  і часах  $\tau_0$  — виходу на усталений режим рівних  $\tau_0 \approx 5 \div 7 f$ . Отримано, що за таких співвідношень між часом  $\tau_0$  і періодом  $f$  вже настає квазіусталений режим.

Аналогічні залежності для неперіодичних складових пондеромоторної сили  $F = F^{(1)} + F^{(4)}$  наведені на рис. 3.

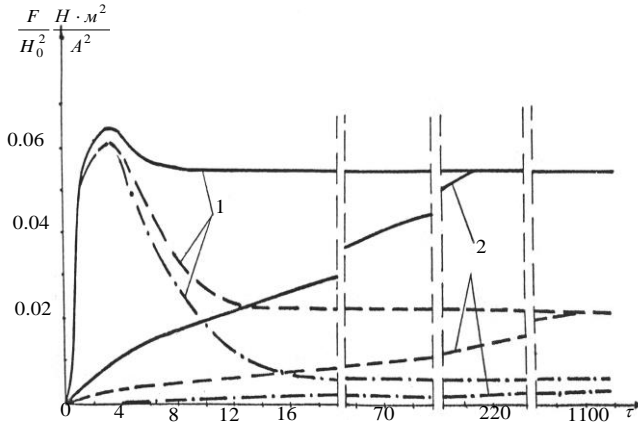


Рис. 3.

**Висновки.** Запропонована методика визначення джоулевого тепла і пондеромоторної сили у пластинчастому електропровідному елементі за дії зовнішнього неусталеного ЕМП дає змогу оцінити вплив неусталеного характеру ЕМП на максимальні значення розглядуваних величин. Дослідження, проведені із застосуванням даної методики показали, що тривалість перехідного режиму порівняно з періодом несучих електромагнітних коливань суттєво впливає на тепловий і силовий режими функціонування електропровідного пластинчастого елемента. Це має важливе значення при прогнозуванні надійності роботи і часу експлуатації багатьох пристроїв, що містять такі елементи.

#### Список використаних джерел:

1. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко. — Харьков : МОСТ., 2003. — 288 с.
2. Подстригач Я. С. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — К. : Наук. думка, 1977. — 248 с.
3. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми : монографія / Р. С. Мусій. — Львів : Вид-во «Растр-7», 2010. — 216 с.

### DETERMINATION OF JOULE HEAT AND PONDEROMOTOR FORCE IN A PLATE ELECTROCONDUCTIVE ELEMENT UNDER THE ACTION OF AN EXTERNAL NONSTATIONARE ELECTROMAGNETIC FIELD

A one-dimensional initial-boundary value problem of electrodynamics for an electroconductive non-ferromagnetic layer with plane-parallel boundaries is formulated under the action of an external nonstationare elec-

tromagnetic field. The electromagnetic field is given by the values of the homogeneous tangent to the bases of the layer components of the magnetic field intensity vector at its bases. The effect of the nonstationare electromagnetic field on the considered layer is manifested by two physical factors — Joule heat and ponderomotor forces, which in accordance with the external electromagnetic action also have an nonstationare nature of change over time. The general solution of the formulated initial boundary value problem with an arbitrary homogeneous non-stationary electromagnetic action is obtained. A cubic approximation of a key function, tangential to the base of the layer, is a component of the magnetic field intensity vector in thickness coordinate. The coefficients of the approximation polynomial are given through the integral characteristics of the key function and given its values on the basis of the layer as corresponding functions of time. As a result, the initial initial boundary value problem of electrodyamics for a key function is reduced to a Cauchy problem for the integral (time-dependent) characteristics of this function. Common solutions of the Cauchy problem are found using the Laplace integral transform and are obtained as a convolution of functions describing the set boundary values of a key function on the bases of the layer and homogeneous solutions of the Cauchy problem. Based on the obtained common solutions, we write down the solution of the original electrodyamics problem by the action of an nonstationare electromagnetic field and the expression of Joule heat and ponderomotor force. The results of numerical analysis of the expressions of the considered values, depending on the parameters of the nonstationare electromagnetic field of the radio frequency range, are presented in the form of corresponding graphs. It is established that the maximum values of Joule heat and ponderomotor force can be significantly higher than their values in the stationare state mode of electromagnetic field during the transient mode of external nonstationare electromagnetic action of less than a quarter of the period of bearing electromagnetic oscillations.

**Key words:** *conductive layer, nonstationare electromagnetic field, Joule heat, ponderomotor forces, cubic approximation, integral characteristics.*

Отримано: 9.08.2019