

УДК 004.94:519.6

Ю. Д. Бойко¹, Н. Г. Сербов²

¹*Черкасский государственный технический университет*

²*Одесский государственный экологический университет*

АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Представлены алгоритмы численного решения систем интегро-дифференциальных уравнений на основе разностных и квадратурных формул.

Ключевые слова: *модель, алгоритмы, интегро-дифференциальные уравнения.*

Введение. Интегро-дифференциальные уравнения являются мощным математическим аппаратом описания неоднородных динамических систем, содержащих в себе как звенья с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами. Эффективность применения данных динамических моделей в прикладных исследованиях непосредственно зависит от эффективности программных средств, реализующих модели. При создании прикладных программ необходимо учитывать как особенности решаемых уравнений, так и особенности моделируемых объектов. К этим особенностям следует отнести: неоднородность способов дискретизации дифференциальной и интегральной частей уравнений; необходимость точностной совместимости составных частей алгоритмов моделирования; учет требований к быстродействию и т.д.

Эти обстоятельства приводят к целесообразности создания комплекса алгоритмов и программ моделирования, обеспечивающего необходимый выбор, учитывающий различные уровни сложности и разнообразие режимов объектов моделирования. В частности, для разработки компьютерных средств, предусматривающих использование в процессе функционирования объекта, необходимо отдавать предпочтение прямым численным методам. Для решения задач лабораторного исследования и проектирования можно предусмотреть применение итерационных численных методов.

Алгоритмы реализации прямых численных методов. Прямые численные методы состоят в сведении исходных интегро-дифференциальных уравнений к простым вычислительным операциям путем аппроксимации операторов либо аппроксимации искомого решения (проеекционные методы), или путем совмещения обоих подходов. Рассмотрим получение квадратурно-разностных алгоритмов, основанных на аппроксимации дифференциального и интегрального операторов.

В наиболее общем случае решается задача Коши для системы n нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = F_1 \left(x, u_1, u_2, \dots, u_m, \int_a^x K_1(x, s, u_1, u_2, \dots, u_m) ds \right), \\ \frac{du_2}{dx} = F_2 \left(x, u_1, u_2, \dots, u_m, \int_a^x K_2(x, s, u_1, u_2, \dots, u_m) ds \right), \\ \dots \\ \frac{du_n}{dx} = F_n \left(x, u_1, u_2, \dots, u_m, \int_a^x K_n(x, s, u_1, u_2, \dots, u_m) ds \right), \end{cases} \quad n \geq m, \quad (1)$$

с начальными условиями $u_i(0) = c_i, \overline{i = 0, n-1}$.

Для непосредственного решения системы (1) можно построить семейство квадратурно-разностных методов, основанных на сочетании разностных методов, известных из теории дифференциальных уравнений, и квадратурных методов аппроксимации интегрального оператора, используемых при численном решении интегральных уравнений.

Разностные методы заключаются в вычислении приближенного решения $U_{k+1} = (u_1(x_{k+1}), \dots, u_n(x_{k+1}))$ в точке x_{k+1} по значениям решения в предыдущих точках x_{k-j+1}, \dots, x_k . Общая формула таких методов имеет следующий вид [1]

$$U_{k+1} = \sum_{i=1}^j \alpha_i U_{k+1-i} + h \sum_{i=0}^j \beta_i f_{k+1-i}, \quad (2)$$

где $f = (F_1, \dots, F_n)$; α_i, β_i – некоторые коэффициенты. Если $j = 1$, то метод является одношаговым, а если $j > 1$ – многошаговым. При этом интегральный оператор заменяется конечной суммой на основе различных квадратурных формул для вычисления определенного интеграла, которые в общем случае имеют вид

$$\int_a^b \psi(x) dx = h \sum_{i=0}^k A_i \psi(x_k) + R[\psi], \quad (3)$$

где A_j – коэффициенты квадратурной формулы, $R[\psi]$ – остаточный член.

Для обеспечения сходимости необходимо [2], чтобы при всех h выполнялось неравенство

$$\left| \int_a^{kh} \psi(x) dx - \sum_{i=0}^k A_i \psi(ih) \right| \leq C \omega(\psi; h), \quad (4)$$

где $\omega(\psi; h)$ – модуль непрерывности функции $\psi(x)$:

$$\omega(\psi; h) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [a, b] \\ |x_1 - x_2| < h}} |\psi(x_1) - \psi(x_2)|.$$

Достаточным условием для выполнения неравенства (4) является использование квадратурных формул, коэффициенты $w_i = h A_i$ которых представляют собой суммы Римана [2]. Сумма Римана для

интеграла $\int_a^b \psi(x) dx$ есть сумма вида

$$S(P, Q; \psi) = \sum_{i=0}^k (v_{i+1} - v_i) \psi(x_i),$$

связанная с двумя разбиениями, $P = \{a = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_k \leq v_{k+1} = b\}$ и $Q = \{x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq x_k\}$, которые определены так, что

$$a = v_0 \leq x_0 \leq v_1 \leq y_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_k \leq x_k \leq v_{k+1} = b.$$

Квадратурная формула является суммой Римана, если выполняются условия

$$\sum_{i=0}^{j-1} w_i + a \leq x_j \leq \sum_{i=0}^j w_i + a, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k) \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{j-1} w_i = (b - a).$$

В частности, этим условиям удовлетворяют обобщенная формула трапеций, для которой

$$A_1 = A_k = 1/2, A_2 = A_3 = \dots = A_{k-1} = 1 \quad (5)$$

или, в случае комбинации с формулами открытого типа:

$$A_1 = 1/2, A_2 = A_3 = \dots = A_{k-2} = 1, A_{k-1} = 3/2, \quad (6)$$

и обобщенная формула Симпсона

$$A_i = \begin{cases} 1/3, 4/3, 2/3, \dots, 4/3, 1/3 (i = 2r + 1, r = 1, 2, \dots); \\ 1/3, 4/3, 2/3, \dots, 4/3, 5/6, 1/2 (i = 2r, r = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) имеют остаточные члены порядка соответственно $o(h^2)$ и $o(h^4)$. Для повышения точности аппроксимации возможно использование квадратурных формул Ньютона-Котеса, однако это связано со значительными увеличением объема вычислений, что, учитывая необходимость многократного вычисления интегрального оператора при решении интегро-дифференциальных уравнений, делает использование этих формул нерациональным.

Поэтому для получения формул более высокого порядка точности предлагается модифицировать метод трапеций, используя формулу Эйлера-Маклорена [3]:

$$\int_a^b \psi(x) dx = h \sum_{i=0}^k A_i \psi(x_k) - \sum_{r=1}^M h^{2r} \frac{B_{2r}}{(2r)!} \left\{ \psi^{(2r-1)}(b) - \psi^{(2r-1)}(a) \right\} + E, \quad (8)$$

где A_i – коэффициенты формулы трапеций (5)-(6); B_{2r} – числа Бернулли; $E = o(h^{(2M+1)})$, если $\psi^{(2M+1)}(x)$ непрерывная функция либо $E = o(h^{(2M+2)})$, если $\psi^{(2M+2)}(x)$ непрерывная функция. На основании формулы Эйлера-Маклорена, можно получить вычислительную схему Грегори, использующую конечные разности.

Соответствующая фиксированному шагу h , j -я правая разность $\Delta^j \psi(x_0)$ определяется выражением

$$\Delta^j \psi(x_0) = \Delta^{j-1} \psi(x_0 + h) - \Delta^{j-1} \psi(x_0), \quad j \geq 1;$$

j -я левая разность $\nabla^j \psi(x_0)$ равна $\Delta^j \psi(x_0 - jh)$. Таким образом, справедливо выражение

$$\Delta^j \psi(x_0) = \nabla^j \psi(x_0 + jh) = \sum_{s=0}^j (-1)^{j+s} C_s^j \psi(x_0 + sh),$$

где $C_s^j = \frac{j!}{(j-s)!s!}$.

Положим в формуле (8) $M = \frac{1}{2}p$, если p четное и $M = \frac{1}{2}(p+1)$, если p нечетное. Каждую производную нечетного порядка от $\psi'(a), \psi'(b) \dots$, до $\psi^{p-1}(a), \psi^{p-1}(b)$ или $\psi^p(a), \psi^p(b)$ аппроксимируем конечно-разностными формулами, используя разности до порядка p включительно. В результате получаем следующие выражения для первой и p -й производных, и соответствующие формулы для промежуточных производных:

$$h \psi'(a) = \Delta \psi(a) - \frac{1}{2} \Delta^2 \psi(a) + \frac{1}{3} \Delta^3 \psi(a) \dots - \frac{(-1)^p}{p} \Delta^p \psi(a) + o(h^{p+1}),$$

$$h \psi'(b) = \nabla \psi(b) - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi(b) + \frac{1}{3} \nabla^3 \psi(b) \dots - \frac{(-1)^p}{p} \nabla^p \psi(b) + o(h^{p+1}),$$

$$h^p \psi^{(p)}(a) = \Delta^p \psi(a) + o(h^{p+1}),$$

$$h^p \psi^{(p)}(b) = \nabla^p \psi(b) + o(h^{p+1}).$$

Подставляя полученные выражения в (8) получаем формулу, определяющую метод Грегори [2]

$$\int_a^b \psi(x) dx = h \sum_{i=0}^k A_i \psi(x_k) + h \sum_{s=1}^p c_{s+1}^* \left\{ \nabla^s \psi(b) + (-1)^s \Delta^s \psi(a) \right\} + E_*, \quad (9)$$

где $E_* = o(h^{p+2})$. При вычислениях формулу (9) удобнее преобразовать к виду

$$\int_a^b \psi(x) dx = h \sum_{i=0}^k A_i \psi(x_k) + h \sum_{j=0}^p q_j^{[p]} \{ \psi(a + jh) + \psi(b - jh) \} + E_*.$$

Значения коэффициентов $q_j^{[p]}$ для $p \leq 3$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов $q_j^{[p]}$

p	j			
	0	1	2	3
1	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	–	–
2	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{24}$	–
3	$-\frac{109}{720}$	$\frac{177}{720}$	$-\frac{87}{720}$	$\frac{19}{720}$

Условие (4) выполняется для метода Грегори, если существует фиксированная граница для p , независящая от k .

Окончательный выбор квадратурной формулы зависит от конкретной задачи, в частности от свойств ядра интегрального оператора. Например, если интегральный оператор имеет сингулярное ядро вида

$$K(x, s, y(s)) = \frac{K_1(x, s, y(s))}{(x - s)^\alpha},$$

предлагается использовать квадратурные формулы открытого типа [1]:

$$\int_a^{a+h} \varphi(s) ds = h \varphi(a) + \frac{h^2}{2} \varphi'(\xi), \quad a < \xi < a + h,$$

$$\int_a^{a+2h} \varphi(s) ds = 2h \varphi(a + h) + \frac{h^3}{3} \varphi''(\xi), \quad a < \xi < a + 2h,$$

которые в сочетании с формулами замкнутого типа позволяют построить эффективные алгоритмы аппроксимации интегрального опе-

ратора при решении интегро-дифференциальных уравнений. Так, комбинируя простейшую незамкнутую формулу с обобщенной формулой трапеций, получаем коэффициенты квадратурной формулы, которые могут быть использованы при построении квадратурно-разностных алгоритмов решения интегро-дифференциальных уравнений со слабо-сингулярными ядрами.

Также на выбор квадратурной формулы влияет предполагаемый характер искомого решения и число шагов. Последнее особенно актуально в случае моделирования динамической системы в реальном времени, когда отрезок интегрирования может быть заранее неизвестен или очень велик. Кроме того, при построении алгоритмов численного моделирования важно учитывать такую особенность интегрального оператора Вольтерра, как возможность многократного использования каждого значения подынтегральной функции, что существенно уменьшает временные затраты.

В основе большинства одношаговых методов лежит разложение в ряд Тейлора

$$U(x_{k+1}) = U(x_k) + hU'(x_k) + \frac{h^2}{2}U''(x_k) + \dots$$

Используя первые два члена ряда, получаем формулу простейшего одношагового метода, по которой алгоритм нахождения решения имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u_i(x_k) &= h \cdot F_i(x_k, u_1(x_k), \dots, u_m(x_k), \\ &\sum_{j=0}^k A_j \cdot K_i(x_k, s_j, u_1(x_j), \dots, u_m(x_j))), \\ u_i(x_{k+1}) &= u_i(x_k) + \Delta u_i(x_k), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (10)$$

где A_j – коэффициенты квадратурной формулы.

Данный алгоритм прост для машинной реализации и не требует каких либо предварительных вычислений для начала счета, но точность решения невысока. Для повышения точности возможно построение алгоритмов с использованием трех и более членов ряда Тейлора, однако на практике в большинстве случаев такой подход оказывается нерациональным ввиду необходимости численного вычисления производных высших порядков.

Решение этой проблемы достигается использованием методов Рунге-Кутты, предназначенных для аппроксимации методов, основанных на рядах Тейлора, но без явного вычисления производных, за исключением первой. При этом наиболее эффективным с точки зрения машинной реализации является четырехэтапный метод Рунге-Кутты, алгоритм которого имеет следующий вид

$$\left\{ \begin{aligned} k_{1i} &= h F_i \left(x_k, U(x_k), \sum_{j=0}^k A_j \cdot K_i(x_k, s_j, U(s_j)) \right), \\ k_{2i} &= h F_i \left(x_k + \frac{h}{2}, U(x_k) + \frac{k_{1i}}{2}, \sum_{j=0}^k A_j \cdot K_i \left(x_k + \frac{h}{2}, s_j, U(s_j) \right) + \frac{k_{1i}}{2} \right), \\ k_{3i} &= h F_i \left(x_k + \frac{h}{2}, U(x_k) + \frac{k_{2i}}{2}, \sum_{j=0}^k A_j \cdot K_i \left(x_k + \frac{h}{2}, s_j, U(s_j) \right) + \frac{k_{2i}}{2} \right), \\ k_{4i} &= h F_i \left(x_k + h, U(x_k) + k_{3i}, \sum_{j=0}^k A_j \cdot K_i(x_k + h, s_j, U(s_j) + k_{3i}) \right), \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$U(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x)), \Delta u_i(x_k) = \frac{1}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}),$$

$$u_i(x_{k+1}) = u_i(x_k) + \Delta u_i(x_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где A_j – коэффициенты квадратурной формулы.

Недостатком данного метода является необходимость многократного вычисления интеграла на каждом шаге, что существенно замедляет время счета и делает затруднительными вычисления на большем числе узлов.

Многошаговые алгоритмы. По аналогии с дифференциальными уравнениями, для получения высокой точности можно использовать многошаговые алгоритмы, обладающие высокой устойчивостью [4].

Рассмотрим вычислительную схему алгоритма, основанного на многошаговом методе четвертого порядка:

1) вычисляется первое приближение к $U_{k+1} = (u_1(x_{k+1}), \dots, u_n(x_{k+1}))$ и далее

$$U_{k+1} = U_k + \frac{h}{24} \cdot (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}); \quad (13)$$

2) используя полученное приближение, вычисляются правые части в точке x_{k+1} ;

3) вычисляется окончательное приближенное решение в точке x_{k+1}

$$U_{k+1} = U_k + \frac{h}{24} \cdot (9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}), \quad (14)$$

где $f_k = \left\{ F_1 \left(x_k, U_k, \sum_{j=0}^k A_j K_1(x_k, s_j, U_j) \right), \dots \right.$

$$\left. \dots, F_n \left(x_k, U_k, \sum_{j=0}^k A_j K_n(x_k, s_j, U_j) \right) \right\},$$

A_j – коэффициенты квадратурной формулы.

Для начала счета по данному алгоритму необходимо предварительно найти начальный отрезок решения (в первых четырех точках) для вычисления которого могут быть использованы описанные выше одношаговые методы, либо многошаговый метод 1-го порядка, алгоритм которого имеет вид:

1) вычисляется первое приближение к $U_{k+1} = (u_1(x_{k+1}), \dots, u_n(x_{k+1}))$

$$U_{k+1}^0 = U_k + hf_k; \quad (15)$$

2) используя полученное приближение, вычисляются правые части в точке x_{k+1} ;

3) вычисляется окончательное приближенное решение в точке x_{k+1}

$$U_{k+1} = U_{k+1}^0 + \frac{h}{2} \cdot (f_{k+1} - f_k). \quad (16)$$

Выводы. Все приведенные алгоритмы могут быть также использованы для решения задачи Коши для различных разновидностей интегро-дифференциальных уравнений.

Список использованной литературы:

1. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. В 2-х т. – Т.2. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 630 с.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. В 2-х т. – Т.1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
4. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

The paper presents an algorithm for numerical solution of a system of integro-differential equations using difference and quadrature formulas.

Key words: *model, algorithm, integro-differential equations.*

Отримано: 05.06.2008