граммные и аппаратно-вычислительные мощности для решения сложных задач в различных областях науки, таких как математика, медицина, физика, экономика т.д.

Список использованной литературы:

1. NVIDIA CUDA Compute Unified Device Architecture Programming Guide. – Ver 1.1. – December 2007. – NVIDIA Corporation, 2007.
2. SUPERCOMPUTING 2007 Tutorial: High Performance Computing with CUDA (http:// www.gpgpu.org/sc2007/).
3. ECE 498 AL1: Programming Massively Parallel Processors (http:// courses. ece. uiuc. edu/ ece498/al1/).

A review and comparison of the systems of programming of the general programming is produced for graphic processors (GPGPU), the features of the system of programming are selected, and also the example of calculation of operation of SAXPY (multiplying of vector by a scalar and addition of vectors) is considered through GPGPU Nvidia CUDA.

Key words: *graphic processors unit, Architecture graphic processors unit, program models, GPGPU, General-Purpose computation on graphic processors unit, Nvidia CUDA, parallel programming.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 004.942

В. А. Іванюк

Кам'янець-Подільський національний університет

ЛАНЦЮГОВО-ДРОБОВА АПРОКСИМАЦІЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розроблено та реалізовано алгоритми ланцюгово-дробової апроксимації ірраціональних та трансцендентних передатних функцій об'єктів з розподіленими параметрами, досліджено точність наближень.

Ключові слова: *передатна функція, об'єкти з розподіленими параметрами, ланцюгові дроби, апроксимація.*

Вступ. Передатні функції об'єктів з розподіленими параметрами містять ірраціональні та трансцендентні функції від аргументу p, що значно ускладнює можливості чисельної реалізації. При вирішенні таких задач виникає необхідність проведення їх апроксимації. На сьогоднішній день питання побудови апроксимаційних моделей об'єктів з розподіленими параметрами не знайшли достатньо повного розв'язання.

В залежності від типу отриманої передатної функції можуть бути застосовані різні методи апроксимації. Найбільш характерні з них – розвинення в ряд Паде, за допомогою ланцюгових дробів, розвинення в ряд Тейлора та ін.

Ефективність проведення обчислювальних експериментів безпосередньо залежить від вибору програмної оболонки, в якій реалізовані різні методи синтезу, аналізу та реалізації математичних моделей. На сьогодні розроблено досить великий арсенал програмних засобів для розв'язування різних математичних задач, які надають користувачеві широкий набір функцій. Серед найбільш популярних програм комп'ютерної математики слід виділити Matlab, Mathematica, Mathcat, Maple, Gauss. Але в бібліотеках цих програм не представлені засоби для побудови апроксимаційних моделей об'єктів з розподіленими параметрами.

Метою дослідження є розробка та реалізація алгоритмів ланцюгово-дробової апроксимації ірраціональних та трансцендентних передатних функцій об'єктів з розподіленими параметрами.

Основна частина. Для отримання дробово-раціональних апроксимаційних моделей ефективним методом є розвинення трансцендентних чи ірраціональних залежностей в степеневі ряди. Після цього передатні функції отримують дробово-раціональний вигляд.

В залежності від кількості взятих членів степеневого ряду можна отримати різні апроксимаційні моделі. Для підвищення точності наближень можна підвищувати порядок апроксимуючих дробово-раціональних передатних функцій. Але при цьому може виникнути проблема стійкості обчислювального процесу. Використання алгоритмів побудови ланцюгово-дробових наближень дозволяє знайти ефективний компроміс між точністю наближення і складністю моделі. Визначальним у виборі апроксимаційних наближень є те, що ланцюгові дроби сходяться швидше, ніж інші послідовні ряди. В свою чергу порядок апроксимаційної моделі, отриманої з допомогою теорії ланцюгових дробів, буде меншим в порівнянні із моделлю отриманою шляхом розвинення в степеневий ряд.

Відомо, що для степеневого ряду $\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \ldots$ можна знайти такий ланцюговий дріб, що розвинення його будь-якого n-го підхідного дробу в степеневий ряд буде співпадати з вихідним рядом до члена p^n включно. Такий ланцюговий дріб називають відповідним даному ряду. Його зазвичай шукають в одному із наступних виглядів:

$$b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i p|}{|b_i}, \quad \frac{b_0|}{|1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i p|}{|d_i}.$$

Для такого степеневого ряду можна також знайти ланцюговий дріб, розвинення n-го підхідного дробу якого в степеневий ряд співпадає з вихідним рядом до члена p^{2n} включно. Такий дріб називають приєднаним до ряду. Його шукають у вигляді

$$l_0 + \frac{k_1 p|}{|1 + l_1 p} - \frac{k_2 p^2|}{|1 + l_2 p} - \frac{k_3 p^3|}{|1 + l_3 p} - \ldots$$

Побудуємо відповідний ланцюговий дріб для ряду

$$W(p) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (p - p_0)^i \ . \qquad (1)$$

Відзначимо, що всі перетворення будуть носити формальний характер: ланцюговий дріб і ряд можуть і не сходитися при будь-яких p.

Ряд (1) запишемо у вигляді

$$W_1(p) = 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(p - p_0) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(p - p_0)^2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}(p - p_0)^{n-1} + \ldots$$

Виконаємо заміну

$$\frac{1}{W_1(p)} = 1 - \beta_1 (p - p_0) + \beta_2 (p - p_0)^2 + \ldots + (-1)^n \beta_n (p - p_0)^n + \ldots$$

Помноживши дві частини цієї рівності на $W_1(p)$ і, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $p - p_0$, отримаємо систему рівнянь

$$0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \beta_1,$$

$$0 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \beta_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \beta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1} - \beta_1 \frac{\alpha_n}{\alpha_1} + \beta_2 \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} + \ldots + (-1)^n \beta_n,$$

з якої послідовно знаходяться коефіцієнти $\beta_n \ (n = 1, 2, \ldots)$,

$$\beta_n = (-1)^{n+1} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \beta_{n-k} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_1}.$$

Запишемо тепер $\dfrac{1}{W_1(p)}$ у вигляді

$$\frac{1}{W_1(p)} = 1 - \beta_1 (p - p_0) W_2(p),$$

$$W_2(p) = 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}(p - p_0) + \frac{\beta_3}{\beta_1}(p - p_0) + \ldots + (-1)^n \frac{\beta_{n+1}}{\beta_1}(p - p_0) + \ldots$$

Провівши заміну

$$\frac{1}{W_2(p)} = 1 - \gamma_1(p - p_0) + \gamma_2(p - p_0)^2 + \ldots,$$

та помноживши дві частини цієї рівності на $W_2(p)$ і, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $p - p_0$, знаходимо коефіцієнти γ_i. Подібні операції з рядом (1) можна продовжувати необмежено. При цьому формально отримаємо дріб

$$W(p) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1(p - p_0)|}{|1} - \frac{\beta_1(p - p_0)|}{|1} + \frac{\gamma_1(p - p_0)|}{|1} - \ldots \ .$$

Замінюючи коефіцієнти $\alpha_0, \alpha_1, -\beta_1, \gamma_1, \ldots$ через $\omega_0, \omega_1, \ldots$, отримаємо ланцюговий дріб

$$\begin{gathered} W(p) = \omega_0 + \frac{\omega_1(p - p_0)|}{|1} + \frac{\omega_2(p - p_0)|}{|1} + \ldots \\ \ldots + \frac{\omega_n(p - p_0)|}{|1} + \frac{\omega_{n+1}(p - p_0)|}{|1} + \ldots, \end{gathered} \tag{2}$$

елементи якого визначаються через коефіцієнти вихідного ряду.

Дроби, що відповідають даному степеневому ряду у вигляді ланцюгового дробу (2) називаються правильними С-ланцюговими дробами.

Далі отриманий ланцюговий дріб можна згорнути до дробово-раціональної передатної функції.

Для отримання ланцюгового дробу (2) було розроблено m-файл-функцію:

[num,den]= ApproxTFCF(func,n).

Вхідні параметри функції: *func* – вхідна функція; *n* – порядок дробово-раціональної апроксимаційної моделі.

Вихідні параметри: *num* – поліном чисельника передатної функції; *den* – поліном знаменника передатної функції.

Ланцюгові дроби можна отримати іншими способами.

Нехай задано степеневий ряд

$$L = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots \tag{3}$$

та зв'язаний з ним визначник Ганкеля, який означений наступним чином:

$$H_0^{(n)} = 1,$$

$$H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \ k = 1,2,3,\ldots \tag{4}$$

Для заданого ряду (3) існує правильний C-дріб

$$1+\frac{a_1 z|}{|1}+\frac{a_2 z|}{|1}+\frac{a_3 z|}{|1}+\ldots,$$

який відповідає L (в точці $z=0$), то

$$H_k^{(1)} \neq 0 \ \text{ і } \ H_k^{(2)} \neq 0, \ k=1,2,3,\ldots$$

і

$$a_1 = H_1^{(1)},$$

$$a_{2m} = -\frac{H_{m-1}^{(1)} H_m^{(2)}}{H_m^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}, \ a_{2m+1} = -\frac{H_{m+1}^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}{H_m^{(1)} H_m^{(2)}}, \ m=1,2,3,\ldots$$

Розглянемо ще один алгоритм, який базується на QD-алгоритмі.

Для заданого степеневого ряду (3) визначимо послідовності $\left\{e_m^{(n)}\right\}$ і $\left\{q_m^{(n)}\right\}$ наступним чином:

$$e_0^{(n)} = 0, \ n=1,2,3,\ldots,$$

$$q_1^{(n)} = \frac{c_{n+1}}{c_n}, \ n=0,1,2,\ldots,$$

$$e_m^{(n)} = q_m^{(n+1)} - q_m^{(n)} + e_{m-1}^{(n+1)}, \ m=1,2,3,\ldots, \ n=0,1,2,\ldots,$$

$$q_{m+1}^{(n)} = \frac{e_m^{(n+1)}}{e_m^{(n)}} q_m^{(n+1)}, \ m=1,2,3,\ldots, \ n=0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

Схема

$$\begin{array}{ccccc}
0 = e_0^{(0)} & & & & \\
 & q_1^{(0)} & & & \\
0 = e_0^{(1)} & & e_1^{(0)} & & \\
 & q_1^{(1)} & & q_2^{(0)} & \\
0 = e_0^{(2)} & & e_1^{(1)} & & e_1^{(0)} \\
 & q_1^{(2)} & & q_2^{(1)} & \\
0 = e_0^{(3)} & & e_1^{(1)} & & \vdots \\
 & q_1^{(3)} & & \vdots & \vdots \\
0 = e_0^{(4)} & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

називається схемою часток та різниць або QD-схемою. Будь-які чотири елементи схеми, що утворюють ромб, зв'язані рівностями (5), тому ці формули іноді називають правилами ромба.

Якщо визначники Ганкеля (4), зв'язані з степеневим рядом (3) задовольняють умови

$$H_m^{(n)} \neq 0, \ m=1,2,3,\ldots, \ n=0,1,2,\ldots,$$

то мають місця співвідношення

$$q_m^{(n)} = \frac{H_{m-1}^{(n)} H_m^{(n+1)}}{H_m^{(n)} H_{m-1}^{(n+1)}},\ e_m^{(n)} = \frac{H_{m+1}^{(n)} H_{m-1}^{(n+1)}}{H_m^{(n)} H_m^{(n+1)}},\ m = 1,2,3,\ldots$$

Тоді правильний C -дріб

$$1 + \frac{c_1 z|}{|1} - \frac{q_1^{(0)} z|}{|1} - \frac{e_1^{(0)} z|}{|1} - \frac{q_2^{(0)} z|}{|1} - \frac{e_2^{(0)} z|}{|1} - \ldots \qquad (6)$$

відповідає в точці $z = 0$ ряду (3).

В свою чергу дріб

$$\frac{c_0 z|}{|1} - \frac{q_1^{(0)} z|}{|1} - \frac{e_1^{(0)} z|}{|1} - \frac{q_2^{(0)} z|}{|1} - \frac{e_2^{(0)} z|}{|1} - \ldots \qquad (7)$$

відповідає в точці $z = 0$ ряду (3).

QD-алгоритм дає зручну чисельну процедуру обчислення коефіцієнтів ланцюгових дробів, що відповідають формальному степеневому ряду. Алгоритми побудови ланцюгових дробів (6) та (7) реалізовані в середовищі Matlab у вигляді функцій:

[num,den]= C_TFCF1(func,n) та [num,den]= C_TFCF2(func,n).

Вхідні параметри функції: *func* – вхідна функція; *n* – порядок дробово-раціональної апроксимаційної моделі.

Вихідні параметри: *num* – поліном чисельника передатної функції; *den* – поліном знаменника передатної функції.

Обчислювальний експеримент. Для дослідження можливості застосування даного методу проведено ряд обчислювальних експериментів з ірраціональними та трансцендентними передатними функціями.

Розглянемо об'єкт заданий передатною функцією

$$W_1(p) = e^{-p}.$$

Аналітичний розв'язок для перехідної характеристики об'єкту має такий вигляд:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0,\ 0 < t < 1, \\ 1,\ t > 1. \end{cases}$$

Провівши апроксимацію вихідної функції запропонованими методами, отримаємо дробово-раціональну передатну функцію 10-го степеня. В середовищі Matlab отримано реакцію на одиничний стрибок (*рис. 1*). Похибка моделювання показана на *рис. 2*.

Для отримання більш точного наближення потрібно використовувати дробово-раціональні функції вищих порядків. Прикладом може слугувати дробово-раціональна апроксимація 50 степеня. Перехідна характеристика отримана за допомогою апроксимаційної моделі та похибка моделювання зображені на *рис. 3* та *рис. 4*.

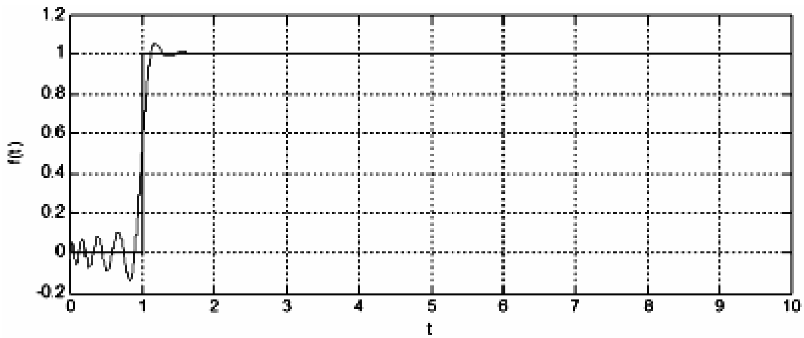

Рис. 1. *Перехідна характеристика апроксимаційної моделі та її аналітичне представлення*

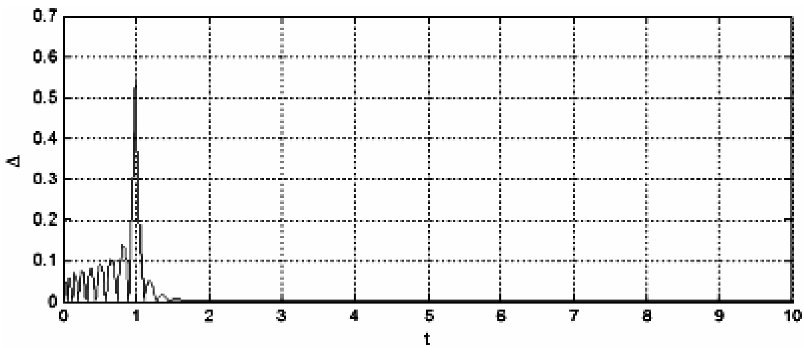

Рис. 2. *Похибка апроксимаційного наближення*

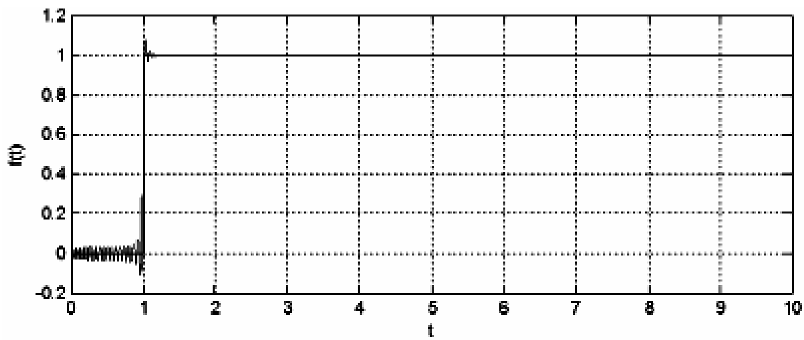

Рис. 3. *Перехідна характеристика апроксимаційної моделі та її аналітичне представлення*

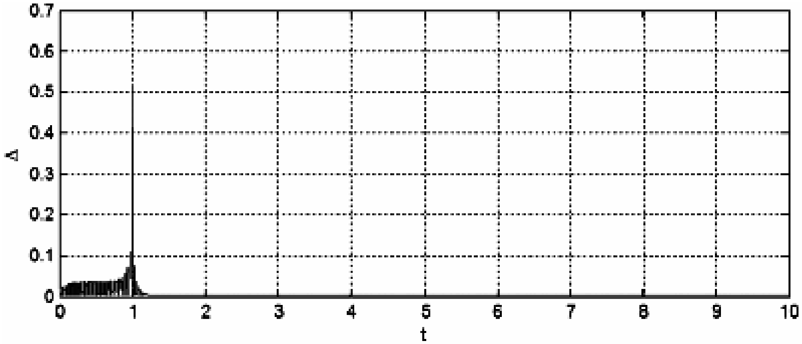

Рис. 4. *Похибка апроксимаційного наближення*

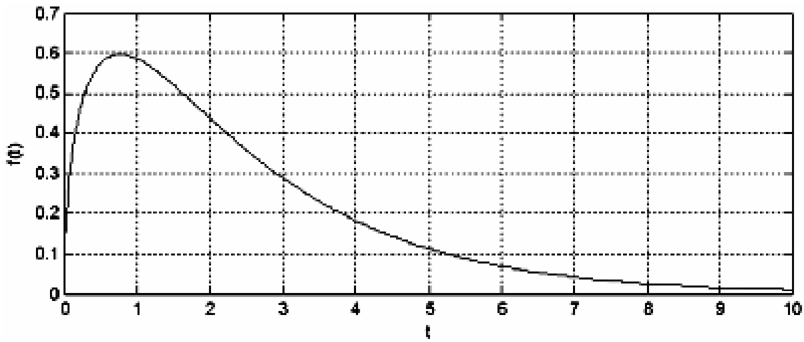

Рис. 5. *Перехідна характеристика апроксимаційної моделі та її аналітичне представлення*

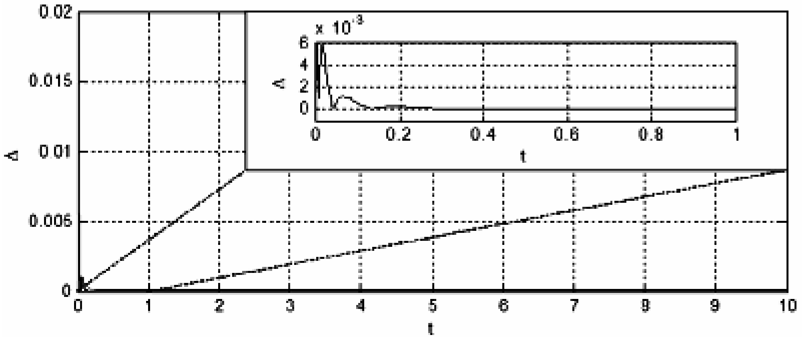

Рис. 6. *Похибка апроксимаційного наближення*

Розглянемо об'єкт заданий передатною функцією

$$W_2(p) = \frac{p}{p+1/2}\frac{1}{\sqrt{p+1}}.$$

Аналітичний вираз для перехідної характеристики об'єкту має такий вигляд:

$$f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1/2}} e^{-t} Erf\left(\sqrt{1/2}\sqrt{t}\right).$$

Апроксимуючи вихідну функцію за допомогою розроблених засобів, отримано дробово-раціональну передатну функцію 10 степеня. Реакцію на одиничний стрибок зображено на *рис. 5*. Похибку моделювання подано на *рис. 6*.

Розглянемо передатну функцію

$$W_3(p) = \frac{p}{p-1}\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Аналітичний вираз для перехідної характеристики об'єкту має такий вигляд:

$$f_3(t) = e^t Erf\left(\sqrt{t}\right).$$

У передатній функції W_3 присутній $\sqrt{p}$, тому функцію неможливо розвинути в ряд Тейлора. Для цього випадку вводимо заміну $p = s + a$ і отримуємо $W_3(p) = \frac{p}{p-1}\frac{1}{\sqrt{s+a}}$. Апроксимуючи $\frac{1}{\sqrt{s+a}}$ запропонованими вище методами отримаємо ланцюгово-дробове наближення, в якому проводимо обернену заміну змінної s наступним чином: $s = p - a$.

Перехідна характеристика апроксимаційної моделі зображена на *рис. 7*. Похибка моделювання зображена на *рис. 8*.

Розглянемо об'єкт заданий передатною функцією, в якій присутні, як ірраціональність, так і трансцендентність:

$$W_4(p) = e^{-\sqrt{p}}.$$

Аналітичний вираз для перехідної характеристики об'єкту буде мати такий вигляд:

$$f_4(t) = Erfc\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Апроксимацію вихідної функції проводимо аналогічно до попереднього випадку. В результаті отримано дробово-раціональну передатну функцію 10 степеня. Реакція на одиничний трибок з використанням апроксимаційної моделі та аналітичний розв'язок для перехідної характеристики зображено на *рис. 9*. Похибка моделювання зображена на *рис. 10*.

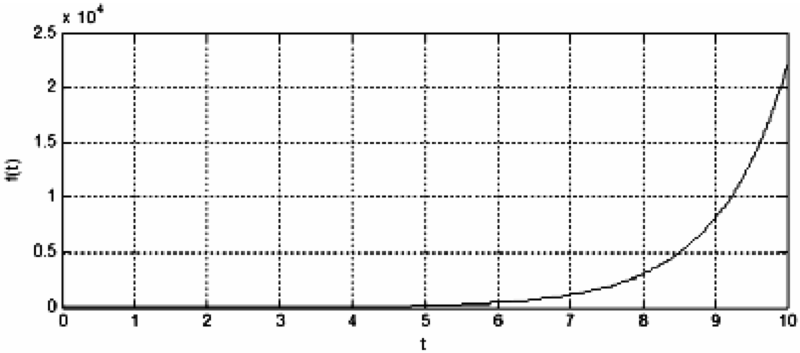

Рис. 7. *Перехідна характеристика апроксимаційної моделі та її аналітичне представлення*

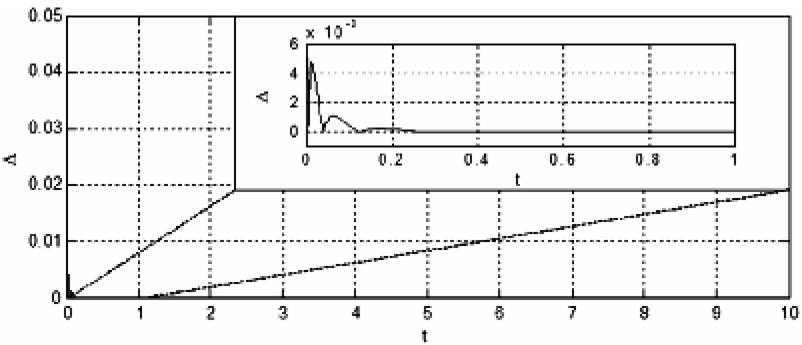

Рис. 8. *Похибка апроксимаційного наближення*

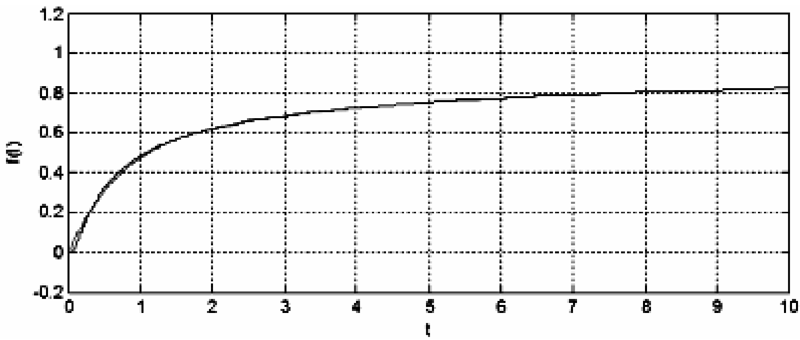

Рис. 9. *Перехідна характеристика апроксимаційної моделі та її аналітичне представлення*

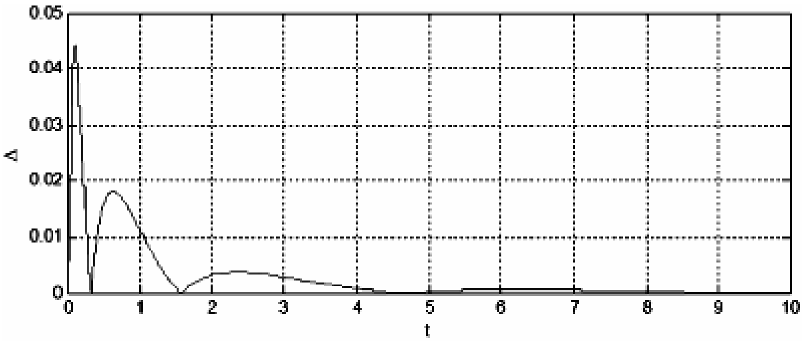

Рис. 10. *Похибка апроксимаційного наближення*

Висновки. При побудові апроксимаційних моделей об'єктів з розподіленими параметрами ефективним методом є використання ланцюгово-дробових наближень, алгоритми яких реалізовані у вигляді розроблених m-файл-функціях середовища Matlab.

Для передатних функцій, розвинення яких в степеневий ряд неможливе, запропоновано спосіб проведення заміни змінних.

Проведено оцінки точності отриманих наближень за допомогою розв'язання ряду модельних задач.

Отриманні результати свідчать, що використання ланцюгово-дробових апроксимаційних наближень дозволяє отримувати адекватні моделі об'єктів з розподіленими параметрами, які можуть використовуватись для широкого класу технічних задач.

Список використаних джерел:

1. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
2. Киселев Н. В., Мядзель В. Н., Рассудов Л. Н. Электроприводы с распределенными параметрами. – Л.: Судостроение, 1985. – 220 с.
3. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 312 с.

It is developed and realised algorithms of chain-fractional approximation of irrational and transcendental transfer functions of objects with the distributed parameters, it is investigated accuracy of approach.

Key words: *transfer function, objects with the distributed parameters, chain fractions, approximation.*

Отримано: 05.06.2008