6. Лежнюк П. Д., Рубаненко О. Є., Паріжок М. І. Прогнозування якості функціонування РПН трансформаторів в умовах нечітких результатів випробувань. – Вінниця: ВНТУ.
7. Саймон Хайкин. Нейронные сети: полный курс. – Издательский дом "Вильямс", 2006. – 1104 с.
8. Дьяконов В. П., Круглов В. В. MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1/7 SP2 + Simulink 5/6. Инструменты искусственного интеллекта и биоинформатики // СОЛОН-ПРЕСС. – 2006. – 456 с.

In the article the example of the use of genetic algorithm is considered in forming of database for the studies of neuron network which is used for optimization of microprocessor device of diagnostics of RPN of power transformers software.

Key words: *neuron networks, autonomous adaptive diagnosticating, neuron design, genetic algorithm, metodadaptivnoy diagnostics, RPN, aggregate of series of measurings.*

Отримано: 27.06.2008

УДК 621.372.06

С. Н. Одокиенко

Академия пожарной безопасности имени Героев Чернобыля, г. Черкассы

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА

В роботі розглядаються особливості методів розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду. Відмітна особливість даного класу задач полягає в необхідності досліджень на стику традиційних чисельних методів і методів розв'язання некоректних задач.

Ключові слова: *чисельні методи, методи регуляризації, інтегральні рівняння Вольтерра I роду.*

Введение и постановка проблемы. Применение интегральных уравнений представляет собой самостоятельный метод математического моделирования как совокупность способов определения соотношений между известными исходными данными и определяемыми характеристиками изучаемого явления, а также приемов эквивалентных преобразований полученных интегральных уравнений и точного или приближенного их решения. При этом численные алгоритмы решения интегральных уравнений своеобразны и чаще всего не имеют аналогов среди алгоритмов решения других, эквивалентных по своей математической постановке, видов уравнений.

Основой компьютерного решения задач являются эффективные численные методы и алгоритмы. Большое количество и разнообразие этих методов объясняются стремлением к их совершенствованию и наличием многих различных типов уравнений, невозможность охвата которых единым универсальным методом является объективным фактом.

В последнее время наблюдается значительное расширение области приложения интегральных уравнений первого рода типа Вольтерра. В круг многочисленных естественнонаучных приложений этого класса уравнений входят задачи восстановления сигналов, поступающих на входы измерительных приборов и систем наблюдения, которые ввиду реальности своих характеристик вносят искажения в наблюдаемые и регистрируемые данные. Отличительная особенность данного класса задач заключается в использовании как традиционных численных методов, так и методов решения некорректных задач. Таким образом, изучение особенностей методов решения интегральных уравнений Вольтерра I рода является актуальной научной проблемой. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- провести обзор основных типов интегральных уравнений Вольтерра I рода и их свойств;
- определить особенности задачи решения указанных уравнений;
- провести обзор традиционных и специальных методов решения уравнений Вольтерра I рода, учитывающих их специфику;
- изучить особенности рассмотренных методов при решении интегральных уравнений Вольтерра I рода.

Решение поставленной проблемы. Рассмотрим основные типы интегральных уравнений Вольтерра I рода и некоторые их свойства. Линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода имеет вид

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \; x, s \in [a, b]. \tag{1}$$

При исследовании и решении таких уравнений требуются дополнительные ограничения по сравнению с уравнениями Вольтерра II рода. Если $K(a, a) \neq 0$, $f(a) = 0$ и если функции $f(\mathrm{x}), K(x, s)$ допускают производные $f'(\mathrm{x}), K'_x(x, s)$, непрерывные в интервале (a, b), заключенном в интервале интегрирования, внутри которого $K(x, x)$ не обращается в нуль, то уравнение Вольтерра I рода допускает в этом интервале (a, b) непрерывное и единственное решение.

К важной и распространенной разновидности уравнений Вольтерра I рода относятся уравнения типа свертки, имеющие в общем случае вид

$$\int_{a}^{x} K(x-s)y(s)ds = f(x),\ x,s \in [0, b], \tag{2}$$

частными случаями которого являются уравнения с разностными степенными ядрами. Особенности уравнений вида (2) позволяют применять для их решения операционный метод.

Нелинейные уравнения Вольтерра I рода подобно уравнениям II рода содержат нелинейные интегральные операторы и могут быть записаны следующим образом:

уравнение Вольтерра-Гаммерштейна

$$\int_{a}^{x} K(x, s)F[s, y(s)]ds = f(x),\ x,s \in [a, b]; \tag{3}$$

уравнение Вольтерра-Урысона

$$\int_{a}^{x} K[x, s, y(s)]ds = f(x),\ x,s \in [a, b]. \tag{4}$$

Применительно к различным типам нелинейных интегральных уравнений имеется значительное количество теорем о разрешимости и свойствах решений, которые трудно объединить в единую теорию, подобную теории линейных уравнений. Соответственно и при численном решении нелинейных уравнений возникают обычно более значительные трудности по сравнению с решением линейных уравнений.

Особенность задачи решения уравнений Вольтерра I рода состоит в том, что она является в определенном смысле промежуточной между задачами решения уравнений Вольтерра II рода и Фредгольма I рода. Если задача решения уравнения Вольтерра II рода является корректной и эффективно решается классическими методами (квадратур, итераций и др.), а задача решения уравнения Фредгольма I рода – является некорректной в любых “разумных” функциональных пространствах и решается специальными методами (регуляризации, квазирешений и др.), то задача решения уравнения Вольтерра I рода может быть корректной и некорректной в зависимости от того, в каких пространствах она рассматривается и каким методом решается [1, 3].

Определение корректности включает: 1) существование решения, 2) единственность и 3) его устойчивость. С этих позиций и будем рассматривать вопрос о корректности (или некорректности) задачи решения уравнения Вольтерра I рода. В интегральных уравнениях Вольтерра I рода отсутствует искомая функция вне знака интеграла, что приводит к некоторым трудностям и отличиям при их решении по сравнению с уравнениями II рода.

Указанные особенности уравнения Вольтерра I рода позволяют использовать для его решения как классические методы (например, метод квадратур, причем сама процедура дискретизации в этом методе обладает регуляризирующим свойством, если связать шаг дискретизации с ошибкой исходных данных), так и специальные методы регуляризации (Тихонова, Денисова, Апарцина, Сергеева, Магницкого, Воскобойникова-Томсонса и др.).

Для решения интегральных уравнений Вольтерра применяются аналитические, операционные, квадратурные, итерационные и другие методы [1, 3]. Применение аналитических методов решения уравнений Вольтерра возможно лишь в некоторых частных случаях, прежде всего, при аналитическом задании ядра и правой части решаемого уравнения. Некоторые принципиальные трудности имеются также при применении аналитических методов к задачам восстановления входных сигналов динамических систем, что объясняется в том числе и тем, что ядро и правая часть системы уравнения обычно имеют экспериментальное происхождение.

Применение итерационных методов также не всегда дает желаемый результат. Трудности связаны, в частности, с тем, что число итераций определяется скоростью сходимости вычислительного процесса к значениям искомой функции в узлах дискретизации, что может потребовать значительных затрат времени.

Таким образом, прямое применение аналитических и итерационных методов решения интегральных уравнений может быть связано с определенными трудностями при создании высокопроизводительных алгоритмов и, тем более, структур специализированных средств вычислительной техники, предназначенных для реализации интегральных моделей динамических систем.

Одним из эффективных методов приближенного решения интегральных уравнений является метод квадратур [1, 2], важным достоинством которого являются простота его реализации и высокая устойчивость вычислительных алгоритмов. Устойчивость при этом обеспечивается за счет регуляризирующих свойств метода, причем параметром регуляризации является шаг квадратуры. Необходимо отметить, что использование формулы левых и средних прямоугольников, а также трапеций для решения интегральных уравнений Вольтерра, обеспечивают сходимость метода, благодаря специфическим соотношением весов указанных квадратур.

Методика замены интеграла суммой в уравнениях Вольтерра I рода и получения аппроксимирующей алгебраической система остается такой же, как и в случае уравнений Вольтерра II рода. Однако особенность уравнений I рода, состоящая в отсутствии искомой функции вне знака интеграла, приводит к некоторым отличиям. При решении интегрального уравнения (1) методом квадратур используется выражение

$$\int_a^{x_i} K(x_i, s)\varphi(s)ds = f(x_i),\ i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

которое получается из исходного уравнения (1) при фиксированных значениях x_i независимой переменной x. Принимая значение x_i в качестве узлов квадратурной формулы и заменяя с ее помощью интеграл в (5) конечной суммой, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_j K(x_i, x_j)\cdot \tilde{\varphi}(x_j) \cong f(x_i), \tag{6}$$

где A_j – коэффициенты квадратурной формулы; $\tilde{\varphi}(x_j)$ – приближенные значения искомой функции в узлах x_j; $j = 1,2...,i$; $x_i = (i-1)\cdot h$; $i = \overline{1,n}$ и h – шаг квадратуры.

В системе (6) невозможно определить значение $\varphi(0)$, так как при $x = x_1 = a$ интеграл в уравнении (1) равен нулю и $f(a) = f_1 = 0$. Поэтому для определения $\varphi(0)$ воспользуемся выражением $\varphi(0) = \dfrac{f'(0)}{K(a,O)}$, полученным в результате дифференцирования уравнения (1) по x при $x = 0$.

Теперь система (6) позволяет последовательно определить искомые приближенные значения по рекуррентной формуле

$$\tilde{\varphi}(x_j) \cong \frac{1}{A_j K(x_i, x_i)}\cdot\left(f(x_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_j K(x_i, x_j)\cdot\tilde{\varphi}(x_j)\right). \tag{7}$$

Для вычисления $f'(0)$ можно воспользоваться различными интерполяционными способами, в частности, использование формулы квадратичной интерполяции позволяет получить выражение $f'(0) = \dfrac{1}{2h}\left[-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)\right]$.

Можно заметить, что при $K(x_i, x_i) = 0$ в интервале интегрирования для приближенного решения интегрального уравнения (1) невозможно применить расчетные выражения (7), так как при этом необходимо выполнять операцию деления на $K(x_i, x_i)$. Однако, применение формулы средних прямоугольников снимает данное ограничение, так как согласно этой формуле, значение искомой функции определяется в узлах $x_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right)\cdot h$.

Как видно из выражения (7), при решении уравнений Вольтерра I рода с произвольным ядром время вычисления искомой функции $\tilde{\varphi}(x_i)$ зависит от числа шагов дискретизации, т.е. с увеличением количества шагов дискретизации пропорционально увеличивается количество циклов по j, следовательно, и количество вычислительных операций.

Данную трудность можно обойти, если регулярное ядро (например, степенного вида) интегрального уравнения (1) обладает свойством представимости в виде суммы произведений независимых функций, т.е. имеет вид: $K(x,s)=\sum\limits_{l=1}^{m}\alpha_l(x)\beta_l(s)$, $\left(l=\overline{1,m}\right)$, $m\in N$. С учетом этого уравнение (1) принимает вид

$$\sum_{l=1}^{m}\alpha_l(x)\int_a^x\beta_l(s)\varphi(s)ds=f(x). \tag{8}$$

При решении уравнения (8) методом квадратур количество вычислительных операций не зависит от номера шага дискретизации, т.е. количество вычислений на каждом шаге остается неизменным. Поэтому при машинной реализации таких алгоритмов значительно сокращаются затраты времени на их решение и объем требуемой памяти ЭВМ.

Особенности уравнений Вольтерра I рода требуют целенаправленного выбора численных алгоритмов для решения. Исходя из компромисса между сложностью вычислительного процесса и точностью результатов, могут быть выбраны различные модификации метода квадратур. Достаточно эффективными при решении задач с "инженерной" точностью оказываются алгоритмы на основе формул прямоугольников и трапеций, причем в качестве регуляризирующего параметра может быть использована величина шага интегрирования.

Одним из путей преодоления трудностей, возникающих при решении интегральных уравнений Вольтерра I рода, является преобразование их к уравнениям Вольтерра II рода или обыкновенным дифференциальным уравнениям [1]. Это допустимо не всегда, но в некоторых случаях возможно и целесообразно.

Решение уравнений Вольтерра I рода путем приведения их к уравнениям Вольтерра II рода позволяет применить методы для решения уравнений второго рода. Обычно рассматриваются способы такого перехода, основанные либо на дифференцировании исходного уравнения, либо на – интегрировании по частям [1].

Первый способ требует двух дифференцирований: $f'(x)$ и $K'_x(x,s)$. Способ интегрирования по частям требует вычисления $K'_s(x,s)$ и $Y'(s)$. При этом способы дифференцирования и интегрирования по частям требуют выполнения условия $K(x,x) \neq 0$, $x \in [a,b]$. В зависимости от условий конкретной задачи (дифференцируемость или недифференцируемость *f*, *K* и т.д.) можно воспользоваться тем или иным способом.

Операционный метод применительно к уравнениям Вольтерра II рода типа свертки, являясь специализированным, также пригоден для частного случая уравнений Вольтерра I рода (2), содержащих разностные ядра. Принципиальные основы метода и основные этапы процедуры решения в данном случае остаются прежними. Отличие заключается в том, что решение уравнения свертки (2) операционным методом соответствует непосредственному обращению содержащегося в нем интегрального оператора.

Если в (2) принять функции $k(x)$, $f(x)$ и $y(x)$ в качестве оригиналов, имеющих изображения

$$K(p) \to k(x), \Phi(p) \to f(x), Y(p) \to y(x),$$

то применение к обеим частям уравнения преобразования Лапласа и использование теоремы о свертке позволяет получить операторное уравнение $K(p) \cdot Y(p) = \Phi(p)$, откуда

$$Y(p) = \frac{\Phi(p)}{K(p)} \quad (K(p) \neq 0). \tag{9}$$

Оригинал, соответствующий изображению (9), будет решением уравнения (2). В некоторых случаях для применения операционного метода целесообразно предварительно перейти от интегрального уравнения свертки I рода к уравнению II рода, воспользовавшись одним из способов такого перехода.

Задача решения уравнения Вольтерра I рода в некоторых пространствах, например в тройке (C, V, C), некорректна. Даже в тех пространствах, где она корректна, например, в тройке (C, V, $C^{(1)}$), имеет место определенная неустойчивость решения [2]. В результате для повышения устойчивости, а значит, и точности решения целесообразно применять при решении уравнения Вольтерра I рода специальные, устойчивые методы. К их числу относятся прежде всего регулярные методы, большинство из которых (методы регуляризации, квазирешений и др.) изложено в [1].

Несмотря на то, что указанные методы предназначены, главным образом, для решения уравнений Фредгольма I рода, они в принципе подходят и для решения уравнения Вольтерра I рода. Укажем ряд методов регуляризации, отражающих специфику уравнения (1) – вольтерровость (переменность верхнего предела интегрирования):

- метод регуляризации Тихонова [4];
- метод регуляризации Денисова [2];
- метод регуляризации Апарцина [2];

- метод регуляризации Сергеева [5];
- метод регуляризации Магницкого [6];
- метод моделирования (модельных примеров) Верланя-Сизикова [1].

В методах регуляризации для обеспечения устойчивости решения уравнения тем или иным образом вводится параметр регуляризации $\alpha > 0$ и во всех случаях вместо первоначального уравнения Вольтерра I рода получается уравнение II рода. Однако метод регуляризации Тихонова приводит к уравнению II рода типа Фредгольма и, таким образом, к утрате вольтерровости, вследствие чего при решении уравнения, например, методом конечных сумм и разностей получится СЛАУ с заполненной (положительно определенной), а не треугольной матрицей, в связи с чем потребуется значительно больше затрат машинной памяти при решении на ЭВМ. Тем не менее, если машинная память позволяет, то для решения уравнения (1) целесообразно использование метода Тихонова – одного из наиболее эффективных методов регуляризации. Для уравнения Вольтерра I рода типа свертки (2) также является эффективным применение данного метода регуляризации.

Характерными особенностями метода регуляризации Денисова являются простота α-регуляризованного уравнения, а также то, что в данном уравнении сохранено свойство вольтерровости. Однако метод требует знания значения $y(a) = y_0$, а оно в реальных задачах, как правило, неизвестно.

Дальнейшим развитием метода α-регуляризации Денисова, объединяющим последний с методом h-регуляризации Апарцина-Бакушинского, является метод (h,α)-регуляризации Апарцина. В этом методе изначально полагается, что имеем дело с сеточным аналогом уравнения (1), полученным в результате замены интеграла конечной суммой (h-регуляризация), и уже к нему применяется α-регуляризация Денисова. При этом, как установлено, за счет определенной согласованности параметров h, α и δ удается построить регуляризирующий алгоритм без использования слагаемого $\alpha\, y_0$. Шаг сетки h нужно считать основным параметром, а α – вспомогательным. Тем не менее, использование параметра α на наряду с h делает метод более эффективным, так как при малом h заметно снижает ошибку решения.

Резюмируя обзор методов регуляризации, можно высказать следующую рекомендацию. Методику Апарцина-Бакушинского-Денисова целесообразно применять при $m = n = 1$. Эта методика, в особенности метод квадратур с регуляризацией (метод (h,α)-регуляризации Апарцина), дает эффективные уравнения. При больших m и n целесообразнее методика Сергеева-Магницкого, не требующая использования $f^{(n)}(x)$.

Наиболее сложным этапом в методах регуляризации является определение параметра α. Нужно определить такое значение α, которое, с одной стороны, будучи немалым, делало бы решение устойчивым, а с другой стороны, будучи небольшим, не сильно искажало бы слагаемым $\alpha\, y_x$ первоначальное уравнение первого рода. Для определения такого умеренного значения α имеется ряд способов, например, способ модельных (эталонных) примеров [1].

Если имеется априорная информация о решении $y(s)$, то ее следует использовать как для определения значения α, так и для окончательного выбора его (если различные способы приводят к различным значениям α), а также для сужения области поиска α. Возможны следующие виды априорной информации о решении $y(s)$:

1) неотрицательность решения;
2) реальность или нереальность мелкомасштабных флуктуаций в решении, т. е. указания на степень его гладкости;
3) местоположение или (и) высота какого-нибудь пика в решении;
4) расстояние между какими-нибудь двумя пиками в решении (например, визуально определено угловое расстояние между двумя источниками, находящимися в исследуемом поле) или (и) отношение их высот;
5) величина интеграла от искомого решения (с некоторой весовой функцией), имеющая определенный физический смысл и т.д.

Выводы. Таким образом, с одной стороны, уравнения Вольтерра I рода являются частным случаем уравнений Фредгольма I рода, решение которых представляет собой явно некорректную задачу, и допускают тем самым возможность применения соответствующих классических методов регуляризации. С другой стороны, при определенных ограничениях, например при "хорошей" гладкости ядра и правой части, уравнения Вольтерра I рода относятся к корректно поставленным задачам и допускают непосредственное применение прямых методов, основанных на дискретизации исходного уравнения. При этом оба подхода могут привести к осложнениям – использование методов регуляризации сводит задачу получения приближенного решения к алгебраическим системам с полной матрицей, т.е. приводит к более трудоемкому решению уравнений типа Фредгольма, а применение прямой дискретизации исходного уравнения вызывает неустойчивость приближенных результатов решения к ошибкам исходных данных.

Поэтому наиболее рациональным является путь, состоящий в использовании регуляризирующих свойств приемов дискретизации и позволяющий благодаря этому совместить достоинства первых двух подходов – помехоустойчивость методов регуляризации и простоту алгоритмов прямых методов дискретизации. Следует отметить, что и это направление в области методов решения уравнений Вольтерра I рода не лишено недостатков, поскольку при его реализации нецелесообразно и даже недопустимо применение высокоточных квадратурных формул, а значит, и невозможно существенное повышение точности разрабатываемых конкретных методов.

Список использованной литературы:

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1986. – 542 с.
2. Апарцин А. С. О численном решении интегральных уравнений Вольтерра I рода регуляризованным методом квадратур // Методы оптимизации и их прил. – 1979. – Вып. 9. – С.99-107.
3. Довгий С. А., Лифанов И. К. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения / НАН Украины; Институт гидромеханики {Киев}; Военный авиационный техн. ун-т им. Н. Е. Жуковского {Россия}. – К.: Наукова думка, 2002. – 342 с.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
5. Сергеев В. О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода // ДАН СССР. – 1971. – 197, №3. – С.531-534.
6. Магницкий Н. А. Об одном методе регуляризации уравнений Вольтерра I рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1975. – 15, №5. – С.1317-1323.

In the present work the features of methods of solution of Volterra integral equations of the first kind are researched. The distinctive feature of this class of tasks consists in conducting in case of their solution of researches on the joint of traditional numeral methods and methods of solutions of incorrect tasks.

Key words: *numeral methods, Volterra integral equations of the first kind, methods of regularization.*

Отримано: 04.06.2008