

УДК 004.942

**В. А. Іванюк**, канд. тех. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
м. Кам'янець-Подільський

## **МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗАНУРЕННЯ БУКСИРУВАНИХ ПІДВОДНИХ ОБ'ЄКТІВ ШЛЯХОМ ЛАНЦЮГОВО-ДРОБОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ**

В статті досліджується застосування методу ланцюгово-дробової апроксимації для побудови дробово-раціональних апроксимаційних моделей об'єктів з розподіленими параметрами на прикладі моделювання процесу занурення буксируваних підводних об'єктів.

**Ключові слова:** *передатна функція, об'єкти з розподіленими параметрами, ланцюгові дроби, апроксимація, буксирувані підводні об'єкти.*

**Вступ.** Буксирувані підводні об'єкти (БПО) широко використовуються для дослідження та освоєння світового океану. Завдяки таким важливим перевагам у порівнянні з автономними підводними апаратами, як відсутність небезпеки для життя обслуговуючого персоналу та значно більшим часом неперервної роботи. БПО з'єднані з судном-носієм гнучким механічним зв'язком — тросом або кабель-тросом. Цей зв'язок використовується для контролю глибини занурення БПО, обміну інформацією між судном і БПО та для передачі електроенергії на БПО.

Управління глибиною занурення БПО здійснюється за допомогою гнучкого механічного зв'язку — троса або кабель-троса, який є ланкою з розподіленими параметрами. При використанні системи стабілізації глибини занурення необхідно враховувати внутрішнє тертя троса і тертя його об воду для визначення статистичних характеристик — дисперсій переміщення і його похідних, а також зусилля в точці кріплення тросу. Максимальне значення цих величин, які знайдені для деякого, прийнятого в якості гранично допустимого ступеня морського хвилювання, дозволяють розрахувати параметри підводного пристрою амортизації. Тому є необхідність використання математичної моделі троса як системи з розподіленими параметрами, яка дозволить врахувати внутрішнє тертя в ньому і тертя його з водою, а також керуючі впливи системи автоматичного управління, які компенсують вплив качки судна і дозволяють керувати глибиною занурення БПО.

Передатні функції, що описують поведінку троса, як об'єкта з розподіленими параметрами, містять ірраціональні та трансцендентні функції від аргументу  $p$ . Безпосереднє використання таких математичних

моделей при чисельних розрахунках у більшості випадків є неможливим або досить складним. Тому задача розробки методів та алгоритмів еквівалентного або апроксимаційного перетворення складних передатних функцій з метою їх ефективної чисельної реалізації при комп'ютерному моделюванні є актуальною і такою, яка поки що не достатньо розв'язана.

**Метою** дослідження є розробка та реалізація алгоритмів ланцюгово-дробової апроксимації складних передатних функцій об'єктів з розподіленими параметрами та моделювання розподіленої ланки, яка відтворює процес занурення буксируваних підводних об'єктів.

**Основна частина.** При дослідженні гнучкого зв'язку враховуються його пружні, інерційні і демпфуючі властивості, які розподілені по його довжині та залежать від властивостей матеріалу.

Трос розглядається як об'єкт з розподіленими параметрами. При описі поведінки ланки трос-БПО приймаються наступні допущення: змінні складові сил в тросі не переважають постійних складових, які обумовлені силами ваги у воді троса і БПО; деформації в тросі пропорційні виникаючим у ньому силам і описуються законом Гука; сила опору руху БПО, закріпленого на кінці троса, приймається пропорційною швидкості його переміщення; трос розташований у воді вертикально у вигляді прямої лінії; нехтуються розподілені по довжині троса обертальні моменти; поперечні коливання троса не враховуються.

Сили, які діють у системі трос-БПО, мають наступні складові: вага у воді, сили пружності, сили інерції, сили тертя об воду та сили внутрішнього тертя. Так як ці складові розподілені по довжині троса, то сили, прикладені до верхнього і нижнього його кінців, не рівні між собою.

Повні сили і деформації складаються із статичних і динамічних складових. До перших відноситься вага витісненої води, а також постійні складові сил пружності і тертя, обумовлені середньою швидкістю переміщення елементів у воді, яка визначається рівномірним рухом судна-носія і роботою лебідок у сталому режимі. Обмежуючись визначенням тільки динамічних складових, можна не враховувати вагу троса у воді. Ці складові з'являються під впливом збурень, прикладених до системи судно-БПО. Коливання, що при цьому виникають, розподіляються вздовж троса зі швидкістю звука, відбиваючись від кінців троса.

Одна складова повздовжньої сили  $T$  викликає пружну деформацію у відповідності із законом Гука, а інша, згідно гіпотези Фойгта, силою внутрішнього тертя, яку вважають пропорційною швидкості деформації і площі поперечного перерізу троса. Повздовжня сила змінюється по довжині троса через розподіленість вздовж нього сил інерції і сил внутрішнього опору, обумовленого тертям об воду.

З урахуванням всіх припущень повздовжні коливання поперечного перерізу троса описуються наступною системою диференціальних рівнянь:

$$T = E_T \cdot F \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \lambda \cdot F \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z \cdot \partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = m \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta \cdot \frac{\partial x}{\partial t}, \quad (2)$$

де  $z$  — координата, вздовж якої відраховується довжина тросу в ненапруженому стані,  $E_T$  — модуль пружності троса,  $F$  — площа поперечного перерізу троса,  $x$  — зміщення поперечного перерізу троса у напрямку повздовжньої осі троса  $Oz$ , початок якої співпадає з його верхнім кінцем,  $\lambda$  — коефіцієнт, який визначає силу внутрішнього тертя,  $m$  — маса одиниці довжини троса,  $\beta$  — коефіцієнт опору одиниці довжини троса, що враховує його тертя об воду.

Модуль пружності троса менший, ніж матеріалу, з якого він виготовлений. При розрахунках коливань сталевих тросів під навантаженням рекомендується приймати  $E_T = 1.65 \cdot 10^5$  МПа [4]. Площа перерізу троса  $F$  рівна сумарній площі поперечних перерізів жил.

Враховуючи, що  $\lambda = E_T F \tau_T$ , де  $\tau_T$  — постійна часу внутрішнього тертя [4], з (1) отримаємо:

$$T = E_T \cdot F \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial z} + \tau_T \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z \cdot \partial t} \right). \quad (3)$$

Застосувавши до рівнянь (2) і (3) перетворення Лапласа [1], отримаємо:

$$T = E_T \cdot F \cdot (1 + \tau_T \cdot p) \frac{\partial x(z, p)}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(z, p)}{\partial z} = m \cdot p^2 \cdot x(z, p) + \beta \cdot p \cdot x(z, p). \quad (5)$$

Застосувавши до (4)—(5) перетворення Лапласа [1] за  $z$ , отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} T(s, p) &= E_T \cdot F \cdot (1 + \tau_T \cdot p) (s \cdot x(s, p) - x(0, p)); \\ s \cdot T(s, p) - T(0, p) &= m \cdot p^2 \cdot x(s, p) + \beta \cdot p \cdot x(s, p), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $T(0, p)$ ,  $x(0, p)$  — зображення сили натягу і переміщення верхнього кінця троса,  $p$  і  $s$  — аргументи зображення функції часу та функції  $z$  в просторі Лапласа.

З (6) знаходяться

$$T(s, p) = \frac{T(0, p) \cdot s + x(0, p) \cdot (m \cdot p^2 + \beta \cdot p)}{s^2 - \frac{m \cdot p^2 + \beta \cdot p}{E_T \cdot F \cdot (1 + \tau_T \cdot p)}}; \quad (7)$$

$$x(s, p) = \frac{x(0, p) \cdot s + T(0, p) \cdot (E_T \cdot F \cdot (1 + \tau_T \cdot p))^{-1}}{s^2 - \frac{m \cdot p^2 + \beta \cdot p}{E_T \cdot F \cdot (1 + \tau_T \cdot p)}}. \quad (8)$$

Переходячи від зображень за зміною  $s$  до оригіналів за змінною  $z$  [1], отримаємо

$$T(z, p) = T(0, p) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{z}{w} \cdot r(p)\right) + x(0, p) \cdot Z_w(p) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{z}{w} \cdot r(p)\right); \quad (9)$$

$$x(z, p) = x(0, p) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{z}{w} \cdot r(p)\right) + T(0, p) \cdot Z_w^{-1}(p) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{z}{w} \cdot r(p)\right), \quad (10)$$

де  $w = \sqrt{\frac{E_T \cdot F}{m}}$  — швидкість розповсюдження коливань у тросі (швид-

кість звуку),  $Z_w(p) = b_w \cdot \sqrt{(p^2 + v_T \cdot p) \cdot (1 + \tau_T \cdot p)}$  — хвильовий опір;

$b_w = m \cdot w = \sqrt{E_T \cdot F \cdot m}$  — опір розповсюдженню коливань у тросі,

$r(p) = \sqrt{\frac{p^2 + v_T \cdot p}{1 + \tau_T \cdot p}}$  — коефіцієнт розповсюдження коливань в опера-

торному вигляді;  $v_T = \frac{\beta}{m}$  — відносний поздовжній опір троса.

Зображення переміщення початку троса  $x(0, p)$  відомо, воно визначається параметрами судна та морського хвилювання, а також роботою лебідки судна. Зображення другої початкової умови  $T(0, p)$  можна отримати, використовуючи рівняння руху БПО.

Крім маси БПО необхідно враховувати приєднані маси води, які залежать від геометричних характеристик БПО, головним чином, від розмірів максимального перерізу, перпендикулярного напрямку руху. Сила опору руху БПО у воді визначається квадратичною залежністю від швидкості вздовж води. При невеликих швидкостях переміщення БПО коефіцієнт опору зменшується пропорційно швидкості. Тому можна враховувати, що сила опору руху БПО у воді росте пропорційно швидкості переміщення. Лінійна залежність зображення за Лапласом сили  $T(L, p)$  від зображення прискорення переміщення  $p^2 x(L, p)$  визначається формулою [4]:

$$T(L, p) = -\left(m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p\right) \cdot x(L, p), \quad (11)$$

де  $k_{BPO}$  — коефіцієнт опору води руху БПО,  $m_{BPO}$  — сума маси БПО і приєднаних мас, які враховують інерційні гідродинамічні сили, що діють на БПО.

Підстановкою замість  $z$  повної довжини троса в ненавантаженому стані  $L$  знаходиться зображення сили  $T(L, p)$  і переміщення  $x(L, p)$  нижнього кінця троса.

Отриману систему рівнянь можна подати у вигляді направлено-го графа, з якого шляхом використання теореми про граничні значення функцій часу і їх зображень за Лапласом знаходиться початкове значення сили  $T(0, 0) = 0$  та використавши правило Мейсона визначаються передатні функції зміщення нижнього кінця троса з БПО і сили на верхньому кінці троса [4]:

$$W_x(L, p) = \frac{x(L, p)}{x(0, p)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\tau_L \cdot r(p)) + \frac{m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p}{Z_w(p)} \cdot \operatorname{sh}(\tau_L \cdot r(p))}; \quad (12)$$

$$W_T(0, p) = \frac{T(L, p)}{x(0, p)} = \frac{\operatorname{sh}(\tau_L \cdot r(p)) + \frac{m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p}{Z_w(p)} \cdot \operatorname{ch}(\tau_L \cdot r(p))}{\operatorname{ch}(\tau_L \cdot r(p)) + \frac{m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p}{Z_w(p)} \cdot \operatorname{sh}(\tau_L \cdot r(p))}, \quad (13)$$

де  $\tau_L = \frac{L}{w}$  — час проходження хвилі по тросу.

Передатні функції для будь-якого перерізу троса з координатою  $z$  отримуються шляхом визначення (12)—(13) з наступною підстановкою в (9)—(10):

$$W_x(z, p) = \frac{x(z, p)}{x(0, p)} = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{L-z}{w} \cdot r(p)\right) + \frac{m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p}{Z_w(p)} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{L-z}{w} \cdot r(p)\right)}{\operatorname{ch}(\tau_L \cdot r(p)) + \frac{m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p}{Z_w(p)} \cdot \operatorname{sh}(\tau_L \cdot r(p))}; \quad (14)$$

$$W_T(z, p) = \frac{T(z, p)}{x(0, p)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{L-z}{w} \cdot r(p)\right) + \frac{m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p}{Z_w(p)} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{L-z}{w} \cdot r(p)\right)}{\operatorname{ch}\left(\tau_L \cdot r(p)\right) + \frac{m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p}{Z_w(p)} \cdot \operatorname{sh}\left(\tau_L \cdot r(p)\right)}. \quad (15)$$

В отриманих передатних функціях (12)—(15) присутні ірраціональні та трансцендентні вирази. Для можливості чисельної реалізації таких передатних функцій необхідно здійснювати їх апроксимацію.

Одним із ефективних є метод апроксимації за допомогою ланцюгових дробів, які володіють дуже важливою властивістю — вони сходяться швидше, ніж інші послідовні ряди і містять більше важливих характеристик об'єктів в декількох перших членах [5].

Розглянемо алгоритм побудови ланцюгово-дробових апроксимаційних моделей складних передатних функцій [2].

Нехай маємо передатну функцію  $W(p)$ . Розвинувши її в степеневий ряд отримаємо:

$$L = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \dots \quad (16)$$

Зв'язаний з (16) визначник Ганкеля визначається наступним чином:

$$H_0^{(n)} = 1, \\ H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \dots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Для ряду (16) існує правильний  $C$ -дріб

$$1 + \frac{a_1 p}{|1} + \frac{a_2 p}{|1} + \frac{a_3 p}{|1} + \dots,$$

який відповідає  $L$  (в точці  $p = 0$ ). Тоді

$$H_k^{(1)} \neq 0 \text{ і } H_k^{(2)} \neq 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

і

$$a_1 = H_1^{(1)}, \quad a_{2m} = -\frac{H_{m-1}^{(1)} H_m^{(2)}}{H_m^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}, \quad a_{2m+1} = -\frac{H_{m+1}^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}{H_m^{(1)} H_m^{(2)}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Розглянутий алгоритм дозволяє отримати ланцюгові дроби. Для отримання дробово-раціональної передатної функції будуються підхідні дроби. В результаті отримаємо

$$\tilde{W}(p) = \frac{a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Для застосування розглянутого алгоритму необхідно, щоб функція  $W(p)$  була аналітичною, тобто, щоб її можна було розвинути в степеневий ряд в околі точки 0.

У випадку сингулярності функції  $W(p)$  пропонується виконувати заміну змінних, тобто виконати заміну  $p = s + 1$ . В результаті отримаємо функцію  $W(s)$ , для якої застосовуємо описаний вище алгоритм. В отриманому наближенні  $\tilde{W}(s)$  виконуємо обернену заміну  $s = p - 1$ . Функція  $\tilde{W}(p)$  буде наближенням  $W(p)$ .

Розглянутий алгоритм подамо у більш стислому вигляді:

1. виконати заміну змінної  $p$  виразом  $p + a$  (якщо точка 0 є особливою точкою  $W(p)$ );
2. розвинути функцію  $W(p)$  в степеневий ряд, в результаті чого отримаємо  $W(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots$ ;
3. взяти  $2n$  членів степеневого ряду;
4. перетворити скінченний степеневий ряд в ланцюговий дріб;
5. за коефіцієнтами ланцюгового дроби побудувати його підхідний дріб, що буде дробово-раціональною передатною функцією;
6. виконати обернену заміну змінної  $p$  виразом  $p - a$  (якщо виконувався пункт 1).

На основі розробленого алгоритму побудовано програмні засоби в середовищі Matlab, за допомогою яких можна виконувати апроксимацію складних передатних функцій [3].

**Обчислювальний експеримент.** Розглянемо залежність зміщення нижнього кінця троса з БПО від зміщення верхнього кінця троса на прикладі троса марки КГП-1-20, який має наступні характеристики [4]: діаметр троса —  $d = 23,4 \cdot 10^{-3}$  м, маса погонного метра троса —  $m = 1,63$  кг/м, швидкість розповсюдження коливань в тросі —  $w = 4020$  м/с, постійна часу внутрішнього тертя в тросі —  $\tau_T = 0,01$  с, коефіцієнт, який враховує тертя троса об воду —  $\nu_T = 0,05$  с<sup>-1</sup>, коефіцієнт опору руху у вертикальному напрямку БПО —  $k_{BPO} = 1800$  кг/с, маса БПО з урахуванням приєднаних мас води —  $m_{BPO} = 5860$  кг, довжина троса —  $L = 5000$  м.

Зміщення нижнього кінця троса з БПО описується передатною функцією (12). Для отримання ланцюгово-дробової апроксимаційної моделі варто вихідну функцію перетворити до найбільш простого виду. Перетворимо (12) до наступного вигляду:

$$W_x(L, p) = \frac{1}{\text{ch}(\tau_L \cdot r(p))} \frac{\frac{Z_w(p)}{m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p} \coth(\tau_L \cdot r(p))}{1 + \coth(\tau_L \cdot r(p))}. \quad (18)$$

Апроксимуємо кожний структурний елемент  $W_x(L, p)$ , тобто

$$W_1(p) = \frac{1}{\text{ch}(\tau_L \cdot r(p))}, \quad W_2(p) = \frac{Z_w(p)}{m_{BPO} \cdot p^2 + k_{BPO} \cdot p}, \quad W_3(p) = \coth(\tau_L \cdot r(p)),$$

причому  $W_1(p)$  і  $W_3(p)$  подаємо з використанням степеневій функції  $e^{-\tau_L \cdot r(p)}$  [6].

Моделювання проводиться в середовищі Simulink. Структурна схема моделі зображена на рис. 1.

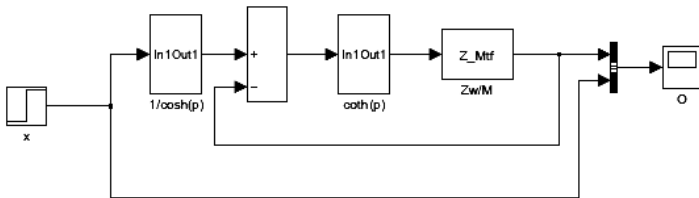


Рис. 1. Структурна схема ланки з передатною функцією  $W_x(L, p)$  в Simulink

За допомогою приведеної вище Simulink-моделі отримано графіки зміщення нижнього кінця троса з БПО при стрибкоподібному та довільному зміщенні верхнього кінця троса. Результат моделювання зображено відповідно на рис. 2 та рис. 3.

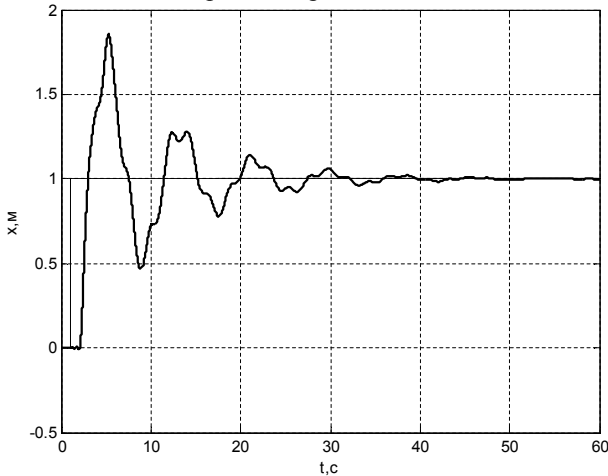
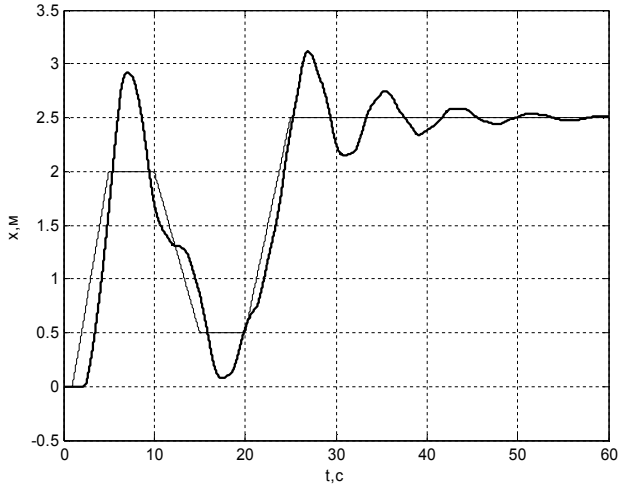


Рис. 2. Перехідна характеристика переміщення нижнього кінця троса з ПБО





**Рис. 3.** *Переміщення нижнього кінця троса з ПБО (————) відносно зміни положення його верхнього кінця (————)*

**Висновки.** Отримані результати показують, що метод ланцюгово-дробової апроксимації складних передатних функцій можна ефективно використовувати при моделюванні об'єктів з розподіленими параметрами, зокрема, при дослідженні процесу занурення буксируваних підводних об'єктів.

#### **Список використаних джерел:**

1. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. Том I. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. — 344 с.
2. Джоунс У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон // Пер. с англ. — М. : Мир, 1985. — 414 с.
3. Іванюк В. А. Ланцюгово-дробова апроксимація ірраціональних та трансцендентних передатних функцій об'єктів з розподіленими параметрами // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць / Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України / В. А. Іванюк. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. — Вип. 1. — С. 75—85.
4. Кувшинов Г. Е. Системы управления глубиной погружения буксируемых объектов / Г. Е. Кувшинов, Л. А. Наумов, К. В. Чупина. — Владивосток : Дальнаука, 2005. — 285 с.
5. Скоробогатко В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В. Я. Скоробогатко. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 312 с.

6. Федорчук В. А. Апроксимація трансцендентних передатних функцій гіперболічного типу ланцюговими дробами / В. А. Федорчук, В. А. Іванюк // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2(28). — Херсон : ХНТУ, 2007. — С. 353—358.

In this paper the method of chain-fractional approximations for constructing fractional-rational approximating models of objects with distributed parameters on the example of simulated diving tow underwater objects is study.

**Key words:** *transfer function, objects with distributed parameters, chain fractions, approximation, towing underwater objects.*

Отримано: 16.06.2009

УДК 539.3

**І. М. Конет**, д-р фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
м. Кам'янець-Подільський

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Методом інтегральних перетворень розв'язано задачу математичного моделювання стаціонарних температурних полів в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах.

**Ключові слова:** *рівняння Пуассона, крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

**Вступ.** Проблеми математичного моделювання реальних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності для кусково-однорідних середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [1—5]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач присвячені монографії [6—9]. Зокрема, в [9] розглянуто випадок напівобмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ. Необмежені двоскладові та тришарові просторові середовища розглянуто у працях [10—13]. У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки математичних моделей стаціонарних процесів теплопровідності (крайових задач) для напівобмежених кусково-однорідних середовищ у просторовій декартовій системі координат.