

6. Федорчук В. А. Апроксимація трансцендентних передатних функцій гіперболічного типу ланцюговими дробами / В. А. Федорчук, В. А. Іванюк // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2(28). — Херсон : ХНТУ, 2007. — С. 353—358.

In this paper the method of chain-fractional approximations for constructing fractional-rational approximating models of objects with distributed parameters on the example of simulated diving tow underwater objects is study.

**Key words:** *transfer function, objects with distributed parameters, chain fractions, approximation, towing underwater objects.*

Отримано: 16.06.2009

УДК 539.3

**І. М. Конет**, д-р фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
м. Кам'янець-Подільський

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Методом інтегральних перетворень розв'язано задачу математичного моделювання стаціонарних температурних полів в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах.

**Ключові слова:** *рівняння Пуассона, крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

**Вступ.** Проблеми математичного моделювання реальних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності для кусково-однорідних середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [1—5]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач присвячені монографії [6—9]. Зокрема, в [9] розглянуто випадок напівобмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ. Необмежені двоскладові та тришарові просторові середовища розглянуто у працях [10—13]. У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки математичних моделей стаціонарних процесів теплопровідності (крайових задач) для напівобмежених кусково-однорідних середовищ у просторовій декартовій системі координат.

**Постановка задачі.** Задача про структуру стаціонарного температурного поля в ортотропному напівобмеженому  $(n+1)$ -шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$\Omega_3 = \{(x, y, z) | (x, y) \in \Omega_2 = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle; \\ z \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j); l_0 \geq 0, l_{n+1} = +\infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона [14, 15]

$$\left[ a_{xy}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T_j - \chi_j^2 T_j = -f_j(x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) T_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(x, y), \frac{\partial^p T_{n+1}}{\partial z^p} \Big|_{z=+\infty} = 0; p = 0, 1, \quad (2)$$

умовами неідеального теплового контакту [16]

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \left[ R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right] T_k - T_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ & \left[ v_k \frac{\partial T_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

та відповідними крайовими умовами на межі  $\Omega_2$ , де  $a_{xy}, a_{yj}, a_{zj} \geq 0$  — коефіцієнти теплопровідності у напрямках координатних осей  $x, y, z$  ( $j = \overline{1, n+1}$ );  $\chi_j^2 \geq 0$  — коефіцієнти дисипації теплової енергії;  $f(x, y, z) = \{f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \dots, f_{n+1}(x, y, z)\}$  — інтенсивність теплових джерел;  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$  — деякі дійсні сталі;  $g_0(x, y)$  — задана обмежена неперервна функція в області  $\Omega_2$ ;  $R_k \geq 0$  — коефіцієнти термопору;  $v_k, v_{k+1} \geq 0$  — коефіцієнти теплопровідності;  $T(x, y, z) = \{T_1(x, y, z), T_2(x, y, z), \dots, T_{n+1}(x, y, z)\}$  — шукана температура.

**1. Математичне моделювання процесу теплопровідності в кусково-однорідному середовищі  $(0; +\infty) \times (0; b) \times \{z \in I_n^+\}$**

Розглянемо область  $\Omega_2 = (0; +\infty) \times (0; b)$ . У цьому випадку на межі області  $\Omega_2$  виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + p\right)T_j \Big|_{x=0} = \omega_j(y, z), \frac{\partial^k T_j}{\partial x^k} \Big|_{x=+\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (4)$$

щодо змінної  $x$  та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right)T_j \Big|_{y=0} = g_{1j}(x, z), \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right)T_j \Big|_{y=b} = g_{2j}(x, z); j = \overline{1, n+1} \quad (5)$$

щодо змінної  $y$ , де  $p \geq 0$  — коефіцієнт теплообміну через поверхню  $x = 0$ ;  $\omega_j(y, z) = pT_j^c(y, z)$ ,  $T_j^c(y, z)$  — температура середовища на поверхні  $x = 0$ .  $h_1 \geq 0$  — коефіцієнт теплообміну через поверхню  $y = 0$ ;  $g_{1j}(x, z) = h_1T_j^{c1}(x, z)$ ,  $T_j^{c1}(x, z)$  — температура середовища на поверхні  $y = 0$ ;  $h_2 \geq 0$  — коефіцієнт теплообміну через поверхню  $y = b$ ;  $g_{2j}(x, z) = h_2T_j^{c2}(x, z)$ ,  $T_j^{c2}(x, z)$  — температура середовища на поверхні  $y = b$ .

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [17, 6].

До задачі (1)—(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декртовій півосі щодо змінної  $x$  [17]:

$$F_{+x} [g(x)] = \int_0^{+\infty} g(x) K_x(x, \sigma) dx \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad (6)$$

$$F_{+x}^{-1} [\tilde{g}(\sigma)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) K_x(x, \sigma) d\sigma \equiv g(x), \quad (7)$$

$$F_{+x} \left[ \frac{d^2 g}{dx^2} \right] = -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma) + K_x(0, \sigma) \left( -\frac{dg}{dx} + pg \right) \Big|_{x=0}, \quad (8)$$

де ядро перетворення

$$K_x(x, \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma \cos(\sigma x) + p \sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2 + p^2}}.$$

Інтегральний оператор  $F_{+x}$  за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)—(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $\Omega'_3 = \{(y, z) \mid y \in (0; b); z \in I_n^+\}$  розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[ a_{xy}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{T}_j - (a_{xy}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_j = -\tilde{F}_j(\sigma, y, z);$$

$$z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (9)$$

з крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(\sigma, y), \quad \frac{\partial^p \tilde{T}_{n+1}}{\partial z^p} \Big|_{z=+\infty} = 0, \quad p = 0, 1, \quad (10)$$

$$\left( -\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) \tilde{T}_j \Big|_{y=0} = \tilde{g}_{1j}(\sigma, z), \quad \left( \frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) \tilde{T}_j \Big|_{y=b} = \tilde{g}_{2j}(\sigma, z);$$

$$j = \overline{1, n+1} \quad (11)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0,$$

$$\left( v_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0; \quad k = \overline{1, n}, \quad (12)$$

де

$$\tilde{F}_j(\sigma, y, z) = \tilde{f}_j(\sigma, y, z) + a_{xy}^2 K_x(0, \sigma) \omega_j(y, z); \quad j = \overline{1, n+1}.$$

До задачі (9)—(12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $[0; b]$  щодо змінної  $y$  [17]:

$$\Lambda_{yk} [g(y)] = \int_0^b g(y) v_k(y) dy \equiv g_k, \quad (13)$$

$$\Lambda_{yk}^{-1} [g_k] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{v_k(y)}{\|v_k\|^2} \equiv g(y), \quad (14)$$

$$\Lambda_{yk} \left[ \frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -\gamma_k^2 g_k + v_k(0) \left( -\frac{dg}{dy} + h_1 g \right) \Big|_{y=0} + v_k(b) \left( \frac{dg}{dy} + h_2 g \right) \Big|_{y=b}, \quad (15)$$

де ядро перетворення

$$v_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2 + h_1^2}},$$

$$\|v_k\|^2 \equiv \int_0^b v_k^2(y) dy = \frac{b}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2 + h_1^2)(\gamma_k^2 + h_2^2)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$  — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1 + h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор  $\Lambda_{yk}$  за правилом (13) внаслідок тотожності (15) крайовій задачі (9)—(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на  $I_n^+$  розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[ a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - (a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2) \right] \tilde{T}_{jk}(\sigma, z) = -\tilde{F}_{jk}(\sigma, z); z \in I_j;$$

$$j = \overline{1, n+1} \quad (16)$$

з крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_{1k} \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(\sigma), \quad \frac{d^p \tilde{T}_{n+1,k}}{\partial z^p} \Big|_{z=+\infty} = 0, \quad p = 0, 1 \quad (17)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \left( R_p \frac{d}{dz} + 1 \right) \tilde{T}_{pk} - \tilde{T}_{p+1,k} \right] \Big|_{z=l_p} &= 0, \\ \left( v_p \frac{d \tilde{T}_{pk}}{dz} - v_{p+1} \frac{d \tilde{T}_{p+1,k}}{dz} \right) \Big|_{z=l_p} &= 0, \quad p = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{jk}(\sigma, z) &= \tilde{f}_{jk}(\sigma, z) + a_{xy}^2 K_k(0, \sigma) \omega_{ik}(z) + \\ &+ a_{yj}^2 v_k(0) \tilde{g}_{1j}(\sigma, z) + a_{yj}^2 v_k(b) \tilde{g}_{2j}(\sigma, z); j = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Задача (16)—(18) розглянута в [18]. Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі з  $n$  точками спряження [6] єдиний обмежений розв'язок задачі визначають функції

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{jk}(\sigma, z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{F}_k(\sigma, \beta) V_j(z, \beta)}{\beta^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2} \Omega_n(\beta) d\beta - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma_1 a_1^2 V_1(l_0, \beta) V_j(z, \beta) \tilde{g}_{0k}(\sigma)}{\alpha_{11}^0 (\beta^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2)} \Omega_n(\beta) d\beta; j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Застосувавши послідовно до функцій  $\tilde{T}_{jk}(\sigma, z)$ , визначених формулами (19), обернені оператори  $\Lambda_{yk}^{-1}$  та  $F_{+x}^{-1}$ , одержуємо функції

$$\begin{aligned}
 T_j(x, y, z) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{+\infty} \int_0^b \int_0^{l_k} E_{jk}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \\
 & + \int_0^{+\infty} \int_0^b W_j(x, \xi, y, \eta, z) g_0(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\
 & + a_{xy}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^b \int_0^{l_k} W_{xjk}(x, y, \eta, z, \zeta) \omega_k(\eta, \zeta) \sigma_k d\eta d\zeta + \\
 & + a_{yj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{+\infty} \int_0^{l_k} W_{yjk}^1(x, \xi, y, z, \zeta) g_{1k}(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta + \\
 & + a_{yj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{+\infty} \int_0^{l_k} W_{yjk}^2(x, \xi, y, z, \zeta) g_{2k}(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (20) застосовано компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{aligned}
 E_{jk}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = & \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{V_j(z, \beta) V_k(\zeta, \beta)}{\beta^2 + a_{xl}^2 \sigma^2 + a_{yl}^2 \gamma_r^2 + \chi_l^2} \times \\
 & \times \Omega_n(\beta) K_x(x, \sigma) K_x(\xi, \sigma) \frac{v_r(y) v_r(\eta)}{\|v_r\|^2} d\sigma d\beta; \quad j, k = \overline{1, n+1},
 \end{aligned}$$

аплікатної матриці Гріна

$$W_j(x, \xi, y, \eta, z) = -\sigma_1 a_1^2 \left( \alpha_{11}^0 \right)^{-1} E_{j1}(x, \xi, y, \eta, z, l_0),$$

абсцисної матриці Гріна

$$W_{xjk}(x, y, \eta, z, \zeta) = E_{jk}(x, 0, y, \eta, z, \zeta),$$

лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^1(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{jk}(x, \xi, y, 0, z, \zeta)$$

та правої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^2(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{jk}(x, \xi, y, b, z, \zeta)$$

еліптичної крайової задачі (1)—(5).

З використанням властивостей фундаментальних функцій  $E_{jk}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$  і функцій Гріна  $W_j(x, \xi, y, \eta, z)$ ,  $W_{jk}(x, y, \eta, z, \zeta)$ ,  $W_{jk}^1(x, \xi, y, z, \zeta)$ ,  $W_{jk}^2(x, \xi, y, z, \zeta)$  безпосередньо перевіряється, що функції  $T_j(x, y, z)$ , визначені формулами (20), задовольняють рівняння (1), крайові умови (2), (4), (5) та умови спряження (3) в сенсі теорії узагальнених функцій [19].

Значимо, що якщо функції  $f_j(x, y, z)$ ,  $\omega_j(y, z)$ ,  $g_{1j}(x, z)$ ,  $g_{2j}(x, z)$  задовольняють умови спряження (3) і вихідні дані задачі мають необхідну гладкість [20], то розв'язок (20) буде також класичним розв'язком крайової задачі (1)—(5).

**Зауваження 1.** У випадку  $a_{xj}^2 = a_{yj}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 \geq 0$  формули (20) визначають структуру стаціонарного температурного поля в ізотропному напівобмеженому  $(n+1)$ -шаровому середовищі.

**Зауваження 2.** Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору  $R_k$  дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (20) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах  $z = l_k$  ідеального теплового контакту.

**Зауваження 3.** При  $R_k = 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ) безпосередньо з формул (20) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадках здійснення на всіх площинах  $z = l_k$  ідеального теплового контакту.

**Зауваження 4.** Параметри  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$  дозволяють виділяти із формул (20) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні  $z = l_0$  крайової умови 1-го роду ( $\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1, g_0(x, y) \alpha_{11}^0 T_0(x, y)$ ,  $T_0(x, y)$  — температура середовища на поверхні  $z = l_0$ ), 2-го роду ( $\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 0$ ) та 3-го роду ( $\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 \equiv h > 0$ ,  $h$  — коефіцієнт теплообміну через поверхню  $z = l_0$ ).

**Зауваження 5.** Параметри  $p, h_j$  ( $j = 1, 2$ ) дозволяють виділяти із формул (20) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$  крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

**Зауваження 6.** Аналіз розв'язку (20) в залежності від аналітичного виразу функцій  $f_j(x, y, z)$ ,  $\omega_j(y, z)$ ,  $g_{1j}(x, z)$ ,  $g_{2j}(x, z)$  ( $j = \overline{1, n+1}$ ) та  $g_0(x, y)$  проводиться безпосередньо.

## 2. Математичне моделювання процесу теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(0; a) \times (0; b) \times \{z \in I_n^+\}$

Розглянемо область  $\Omega_2 = (0; a) \times (0; b)$ . У цьому випадку на межі області  $\Omega_2$  виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + p_1\right) T_j \Big|_{x=0} = \omega_{1j}(y, z), \left(\frac{\partial}{\partial x} + p_2\right) T_j \Big|_{x=a} = \omega_{2j}(y, z); j = \overline{1, n+1} \quad (21)$$

щодо змінної  $x$  та крайові умови (5) щодо змінної  $y$ , де  $p_1 \geq 0$  — коефіцієнт теплообміну через поверхню  $x=0$ ;  $\omega_{1j}(y, z) = p_1 T_j^{c1}(y, z)$ ,  $T_j^{c1}(y, z)$  — температура середовища на поверхні  $x=0$ ;  $p_2 \geq 0$  — коефіцієнт теплообміну через поверхню  $x=a$ ;  $\omega_{2j}(y, z) = p_2 T_j^{c2}(y, z)$ ,  $T_j^{c2}(y, z)$  — температура середовища на поверхні  $x=a$ .

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(3), (21), (5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [17, 6].

До задачі (1)—(3), (21), (5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $[0; a]$  щодо змінної  $x$  [17]:

$$Z_{xm} [g(x)] = \int_0^a g(x) w_m(x) dx \equiv g_m, \quad (22)$$

$$Z_{xm}^{-1} [g_m] = \sum_{m=1}^{\infty} g_m \frac{w_m(x)}{\|w_m\|^2} \equiv g(x), \quad (23)$$

$$Z_{xm} \left[ \frac{d^2 g}{dx^2} \right] = -\delta_m^2 g_m + w_m(0) \left( -\frac{dg}{dx} + p_1 g \right) \Big|_{x=0} + w_m(a) \left( \frac{dg}{dx} + p_2 g \right) \Big|_{x=a}, \quad (24)$$

де ядро перетворення

$$w_m(x) = \frac{\delta_m \cos(\delta_m x) + p_1 \sin(\delta_m x)}{\sqrt{\delta_m^2 + p_1^2}},$$

$$\|w_m\|^2 = \int_0^a w_m^2(x) dx = \frac{a}{2} + \frac{(p_1 + p_2)(\delta_m^2 + p_1 p_2)}{2(\delta_m^2 + p_1^2)(\delta_m^2 + p_2^2)},$$

$\{\delta_m\}_{m=1}^{\infty}$  — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння



$$\operatorname{ctg}(\delta a) = \frac{\delta^2 - p_1 p_2}{\delta(p_1 + p_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор  $Z_{xm}$  за правилом (22) внаслідок тотожності (24) крайовій задачі (1)—(3), (21), (5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $\Omega'_3 = \{(y, z) \mid y \in (0; b); z \in I_n^+\}$  розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[ a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T_{jm} - (a_{xj}^2 \delta_m^2 + \chi_j^2) T_{jm} = -F_{jm}(y, z); z \in I_j \quad (25)$$

з крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) T_{1m} \Big|_{z=l_0} = g_{0m}(y); \quad \frac{\partial^p T_{n+1,m}}{\partial z^p} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad p = 0, 1, \quad (26)$$

$$\left( -\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) T_{jm} \Big|_{y=0} = g_{1jm}(z); \quad \left( \frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) T_{jm} \Big|_{y=b} = g_{2jm}(z) \quad (27)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \left[ \left( R_p \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) T_{pm} - T_{p+1,m} \right] \Big|_{z=l_p} = 0, \right. \\ \left. \left[ \left( v_p \frac{\partial T_{pm}}{\partial z} - v_{p+1} \frac{\partial T_{p+1,m}}{\partial z} \right) \right] \Big|_{z=l_p} = 0, \quad p = \overline{1, n}, \right. \quad (28)$$

де

$$F_{jm}(y, z) = f_{jm}(y, z) + a_{xj}^2 w_m(0) \omega_{1j}(y, z) + a_{xj}^2 w_m(a) \omega_{2j}(y, z).$$

До задачі (25)—(28) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $[0; b]$  щодо змінної  $y$ . Інтегральний оператор  $\Lambda_{yk}$  за правилом (13) внаслідок тотожності (15) крайовій задачі (25)—(28) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $I_n^+$  розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[ a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - (a_{xj}^2 \delta_m^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2) \right] T_{jmk}(z) = -F_{jmk}(z); \\ z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (29)$$

з крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0 \right) T_{1mk} \Big|_{z=l_0} = g_{0mk} ; \frac{d^p T_{n+1,mk}}{dz^p} \Big|_{z=+\infty} = 0 ; p = 0, 1 \quad (30)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \left( R_p \frac{d}{dz} + 1 \right) T_{pmk} - T_{p+1,mk} \right] \Big|_{z=l_p} = 0, \\ & \left( v_p \frac{dT_{pmk}}{dz} - v_{p+1} \frac{dT_{p+1,mk}}{dz} \right) \Big|_{z=l_p} = 0, p = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \quad (31)$$

де

$$F_{jmk}(z) = f_{jmk}(z) + a_{xy}^2 w_m(0) \omega_{1jk}(z) + a_{xy}^2 w_m(a) \omega_{2jk}(z) + a_{xy}^2 v_k(0) g_{1jm}(z) + a_{xy}^2 v_k(b) g_{2jm}(z); j = \overline{1, n+1}.$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (29)—(31) збігається із задачею (16)—(18). Отже, відповідно до формул (19), єдиний обмежений розв'язок задачі (29)—(31) визначають функції

$$T_{jmk}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{F}_{mk}(\beta) V_j(z, \beta)}{\beta^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2} \Omega_n(\beta) d\beta - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma_1 a_{11}^2 V_1(l_0, \beta) V_j(z, \beta) g_{0mk}}{\alpha_{11}^0 (\beta^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2)} \Omega_n(\beta) d\beta; j = \overline{1, n+1}. \quad (32)$$

Застосувавши послідовно до функцій  $T_{jmk}(z)$ , визначених формулами (32), обернені оператори  $\Lambda_{yk}^{-1}$  та  $Z_{xm}^{-1}$ , одержуємо функції

$$T_j(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \int_0^a \int_0^b W_j(x, \xi, y, \eta, z) g_0(\xi, \eta) d\xi d\eta + a_{xy}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{xjk}^1(x, y, \eta, z, \zeta) \omega_{1k}(\eta, \zeta) \sigma_k d\eta d\zeta + a_{xy}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{xjk}^2(x, y, \eta, z, \zeta) \omega_{2k}(\eta, \zeta) \sigma_k d\eta d\zeta +$$

$$\begin{aligned}
 & + a_{yj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{ijk}^1(x, \xi, y, z, \zeta) g_{1k}(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta + \\
 & + a_{yj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{ijk}^2(x, \xi, y, z, \zeta) g_{2k}(\xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (33)
 \end{aligned}$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (33) застосовано компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{aligned}
 E_{jk}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta) &= \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{V_j(z, \beta) V_k(\zeta, \beta)}{\beta^2 + a_{x1}^2 \delta_r^2 + a_{y1}^2 \gamma_p^2 + \chi_1^2} \times \\
 & \times \Omega_n(\beta) \frac{w_r(x) w_r(\zeta) v_p(y) v_p(\eta)}{\|w_r\|^2 \|v_p\|^2} d\beta; \quad j, k = \overline{1, n+1},
 \end{aligned}$$

аплікатної матриці Гріна

$$W_j(x, \xi, y, \eta, z) = -\sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(x, \xi, y, \eta, z, l_0),$$

лівої абсцисної матриці Гріна

$$W_{xjk}^1(x, y, \eta, z, \zeta) = E_{jk}(x, 0, y, \eta, z, \zeta),$$

правої абсцисної матриці Гріна

$$W_{xjk}^2(x, y, \eta, z, \zeta) = E_{jk}(x, a, y, \eta, z, \zeta),$$

лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^1(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{jk}(x, \xi, y, 0, z, \zeta)$$

та правої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^2(x, \xi, y, z, \zeta) = E_{jk}(x, \xi, y, b, z, \zeta)$$

еліптичної крайової задачі (1)—(3), (21), (5).

З використанням властивостей фундаментальних функцій  $E_{jk}(x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$  і функцій Гріна  $W_j(x, \xi, y, \eta, z)$ ,  $W_{xjk}^1(x, y, \eta, z, \zeta)$ ,  $W_{xjk}^2(x, y, \eta, z, \zeta)$ ,  $W_{yjk}^1(x, \xi, y, z, \zeta)$ ,  $W_{yjk}^2(x, \xi, y, z, \zeta)$ , безпосередньо перевіряється, що функції  $T_j(x, y, z)$ , визначені формулами (33), задовольняють рівняння (1), крайові умови (2), (21), (5) та умови спряження (3) в сенсі теорії узагальнених функцій [19].

Зауважимо, що якщо функції  $f_j(x, y, z)$ ,  $\omega_{1j}(x, z)$ ,  $\omega_{2j}(x, z)$ ,  $g_{1j}(y, z)$ ,  $g_{2j}(y, z)$  задовольняють умови спряження (3) і вихідні дані

задачі мають необхідну гладкість [20], то розв'язок (33) буде також класичним розв'язком крайової задачі (1)—(3), (21), (5).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1—4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри  $p_j, h_j$  ( $j = 1, 2$ ) дають можливість виділяти із формул (33) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях  $x = 0, x = a; y = 0, y = b$  крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (33) в залежності від аналітичного виразу функцій  $f_j(x, y, z), \omega_{1j}(y, z), \omega_{2j}(y, z), g_{1j}(x, z), g_{2j}(x, z)$  ( $j = \overline{1, n+1}$ ) та  $g_0(x, y)$  проводиться безпосередньо.

**Висновки.** При найбільш загальних припущеннях у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків математичних моделей стаціонарних процесів теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та вихідних даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях так і в практиці інженерних розрахунків.

#### Список використаних джерел:

1. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
2. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
4. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
5. Шилин Г. Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах / Г. Ф. Шилин. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 1983. — 115 с.
6. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
7. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.
8. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
9. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.

10. Громик А. П., Стационарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях / А. П. Громик, І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2006. — Вип. 13. — С. 52—65.
11. Громик А. П. Крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях / А. П. Громик, І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2006. — Вип. 14. — С. 36—50.
12. Громик А. П. Стационарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2009. — Вип. 18. — С. 54—67.
13. Конет І. М. Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр., — Чернівці : Прут, 2006. — Вип. 14. — С. 84—96.
14. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский — М. : Наука, 1972. — 735 с.
15. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер — М. : Наука, 1964. — 448 с.
16. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. — М. : Мир, 1964. — 517 с.
17. Ленюк М. П. Интегральные преобразования з разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 60 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
18. Громик А. П. Интегральні зображення розв'язків стаціонарних задач теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2009. — Вип. 2. — С. 54—65.
19. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965. — 408 с.
20. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

Method of integral transformation is solved problem of mathematical modeling stationary thermal field in semi limited cobbed-homogeneous space areas.

**Key words:** *equalization Puassona, regional conditions, terms of interface, integral transformations, main upshots.*

Отримано: 09.09.2009