

УДК 518:517.948

Л. І. Мочурад, асистент,

Б. А. Остудін, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ЗАПРОВАДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОЇ МЕТОДИКИ ДО ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ КРАЄВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Розглянуто числове розв'язування краєвої задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії восьмого порядку.

Ключові слова: *рівняння Лапласа, інтегральне рівняння, теорія потенціалу, абелева група симетрії, матриця перетворення Фур'є, метод колокації.*

Вступ. При числовому моделюванні так званого “плоского” електростатичного поля, створюваного системою заряджених електродів складної конфігурації, доцільним виявляється застосування апарату теорії груп [1]. Останнє дає можливість суттєво вдосконалити метод інтегральних рівнянь, який традиційно використовують для такого класу задач. При реалізації основної ідеї методу встановлюють якою групою симетрії володіє початкова задача. Це дає можливість перейти від “сукупної” системи інтегральних рівнянь до послідовності N незалежних інтегральних рівнянь, заданих лише по одній із конгруентних складових поверхонь-електродів, де N — порядок групи симетрії відповідної краєвої задачі [2]. Результатом є уникнення числової нестійкості, яка може виникати в процесі розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що апроксимують інтегральні рівняння, при непомірному збільшенні їх розмірностей.

Очевидним є також створення передумов для розпаралелення процедури розв'язування початкової задачі. Це дозволяє, вибираючи різну кількість процесорів, досягати або максимальної ефективності їх завантаження, або ж збільшувати швидкість обчислень.

Суттєве спрощення алгоритму наближеного розв'язування “плоскої” задачі електростатики, підтверджене числовими експериментами, пов'язане із встановленням того факту, що наявна в поданні розв'язку адитивна стала, яка відображає довільність граничних значень потенціалу на електродах, рівна середньому арифметичному цих значень.

Враховуючи типові конфігурації складових поверхонь-електродів, які використовують при проектуванні реальних приладів, розглянуто одну модельну задачу. За відсутності універсального підходу до розв'язування задач, що володіють різними групами симетрії, у роботі досліджено саме таку проблему, числове розв'язування якої дозволяє добре проілюструвати всі аспекти запровадженої методики.

Постановка задачі. Розглянемо задачу знаходження електростатичного поля “плоскої” електронно-оптичної системи, зображеної на Рис. 1. Як бачимо, інформацію про геометрію заряджених електродів подано у вигляді деякої сукупності конгруентних гладких незамкнених дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, які є частинами відповідних гіпербол у \mathbf{R}^2 . При цьому граничні значення потенціалу ($f_1, = f_{kl}(y), f_3, f_4$) не володіють симетрією чи антисиметрією. Таку систему називають “квадрупольною лінзою”.

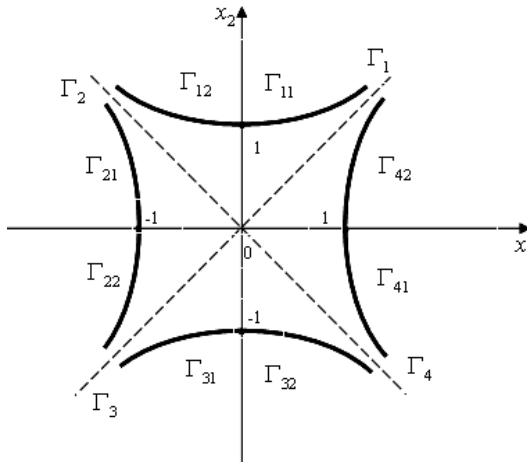


Рис. 1. Досліджувана “плоска” електронно-оптична система

З математичної точки зору, більш загально, необхідно знайти функцію $U(x) \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Gamma})$, яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta U(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}, \quad \Gamma := \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \quad x := (x_1, x_2)^T, \quad (1)$$

за умови

$$U(x) = f_i(x), \quad x \in \Gamma_i \quad (i = \overline{1, 4}); \quad \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |U(x)| < +\infty. \quad (2)$$

Нехай $\Phi(x, y) := -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|y-x|}$ — фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа в \mathbf{R}^2 [3, с. 152]. Тоді розв’язок задачі (1)—(2) шукатимемо у вигляді

$$U(y) := \int_{\Gamma} \mu(x) \Phi(x, y) d\Gamma_x + C, \quad y := (y_1, y_2)^T. \quad (3)$$

Тут $\mu(x) := g(x) - C\lambda(x)$, де $\lambda(x)$ — розв’язок допоміжного інтегрального рівняння

$$\int_{\Gamma} \lambda(x) \Phi(x, y) d\Gamma_x = 1, \quad y \in \Gamma, \quad (4)$$

а $g(x)$ задовольняє рівняння

$$\int_{\Gamma} g(x) \Phi(x, y) d\Gamma_x = f_i(y), \quad y \in \Gamma_i \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (5)$$

причому константа C визначається з умови $\int_{\Gamma} \mu(x) d\Gamma_x = 0$, тобто

$$C = \left(\int_{\Gamma} g(x) d\Gamma_x \right) / \left(\int_{\Gamma} \lambda(x) d\Gamma_x \right).$$

Отже, знаходження $\mu(x)$, — сукупної густини розподілу зарядів уздовж Γ ($\mu(x) := \{ \mu_i(x), x \in \Gamma_i; i = \overline{1, 4} \}$), — пов’язане із необхідністю розв’язування двох інтегральних рівнянь (4) і (5) [4]. Знайдена при цьому константа C забезпечує обмеженість шуканого розв’язку (3) на нескінченності при $|y| \rightarrow \infty$.

Параметризація інтегрального рівняння (5). З метою максимального врахування симетрії у розташуванні окремих ділянок межі Γ на площині $x_1 0x_2$ подамо кожну дугу Γ_i ($i = \overline{1, 4}$) у вигляді двох конгруентних складових: $\Gamma_i := \Gamma_{i1} \cup \Gamma_{i2}$. Трактуючи $\mu(x)$ у відповідності з таким подібненням Γ , розглянемо інтегральне рівняння (5) для знаходження шуканої густини розподілу зарядів $g(x)$ у вигляді:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{ij}} g_{ij}(x) \Phi(x, y) d\Gamma_x = f_{kl}(y), \quad y \in \Gamma_{kl} \quad (k = \overline{1, 4}; l = 1, 2), \quad (6)$$

де $g_{ij}(x)$ — звуження $g(x)$ на Γ_{ij} , а $f_{kl}(y)$ — звуження $f_k(y)$ на Γ_{kl} .

Далі, для аналізу криволінійних інтегралів у (6) використаємо параметричні рівняння, що описують відповідні ділянки межі [5, с. 202]:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 := \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} := & \left\{ x_{11}(\tau) := (\operatorname{sh} \tau, \operatorname{ch} \tau)^T; 0 \leq \tau \leq 1 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ x_{12}(\tau) := (\operatorname{sh} \tau, \operatorname{ch} \tau)^T; -1 \leq \tau \leq 0 \right\}, \\ \Gamma_2 := \Gamma_{21} \cup \Gamma_{22} := & \left\{ x_{21}(\tau) := (-\operatorname{ch} \tau, \operatorname{sh} \tau)^T; 0 \leq \tau \leq 1 \right\} \cup \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cup \left\{ x_{22}(\tau) := (-\operatorname{ch} \tau, \operatorname{sh} \tau)^T; -1 \leq \tau \leq 0 \right\}, \\ \Gamma_3 := \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} & := \left\{ x_{31}(\tau) := (\operatorname{sh} \tau, -\operatorname{ch} \tau)^T; -1 \leq \tau \leq 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ x_{32}(\tau) := (\operatorname{sh} \tau, -\operatorname{ch} \tau)^T; 0 \leq \tau \leq 1 \right\}, \\ \Gamma_4 := \Gamma_{41} \cup \Gamma_{42} & := \left\{ x_{41}(\tau) := (\operatorname{ch} \tau, \operatorname{sh} \tau)^T; -1 \leq \tau \leq 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ x_{42}(\tau) := (\operatorname{ch} \tau, \operatorname{sh} \tau)^T; 0 \leq \tau \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Це дає можливість трактувати (6) у вигляді такої "сукупної" системи восьми інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g_{11}(\tau) \mathbf{K}[x_{11}(\tau); y] d\tau + \int_{-1}^0 g_{12}(\tau) \mathbf{K}[x_{12}(\tau); y] d\tau + \\ & + \int_0^1 g_{21}(\tau) \mathbf{K}[x_{21}(\tau); y] d\tau + \int_{-1}^0 g_{22}(\tau) \mathbf{K}[x_{22}(\tau); y] d\tau + \\ & + \int_{-1}^0 g_{31}(\tau) \mathbf{K}[x_{31}(\tau); y] d\tau + \int_0^1 g_{32}(\tau) \mathbf{K}[x_{32}(\tau); y] d\tau + \\ & + \int_{-1}^0 g_{41}(\tau) \mathbf{K}[x_{41}(\tau); y] d\tau + \int_0^1 g_{42}(\tau) \mathbf{K}[x_{42}(\tau); y] d\tau = \\ & = f_{kl}(y), \quad y \in \Gamma_{kl} \quad (k = \overline{1, 4}; l = 1, 2), \end{aligned} \quad (7)$$

де $g_{ij} := g[x_{ij}(\tau)]$ ($i = \overline{1, 4}; j = 1, 2$), а $\mathbf{K}[x(\tau); y] := |x(\tau)| \times \times \Phi[x(\tau); y]$ при тому, що $x(\tau)$ — параметричне подання однієї з восьми ділянок межі.

Врахування симетрії межі. Для зменшення кількості рівнянь, які потрібно розв'язувати одночасно, скористаємось очевидною властивістю розглядуваної проблеми [2, 6].

Лема 1. Система інтегральних рівнянь (7) володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку, яка є прямим добутком циклічних груп четвертого порядку $\{e, \beta, \beta^2, \beta^3\}$ і другого порядку $\{e, \sigma\}$, де e — тотожне перетворення, σ — дзеркальне відображення, а β — поворот на кут $\pi/2$ відносно початку координат.

Доведення. Враховуючи запроваджену вище нумерацію конгруентних складових межі Γ , легко бачити, що $\Gamma_{ij} = \beta_h \Gamma_{11}$ ($i = \overline{1, 4}; j = 1, 2; h = 2(i-1) + j$), причому $\beta_1 := e$, $\beta_2 := \sigma$, $\beta_3 := \beta$, $\beta_4 := \beta\sigma$, $\beta_5 := \beta^2$, $\beta_6 := \beta^2\sigma$, $\beta_7 := \beta^3$, $\beta_8 := \beta^3\sigma$. Звідси Γ володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку $GR_8 := \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8\}$. Остання, в свою чергу, є прямим добутком циклічних груп четвертого порядку $GR_4 := \{e, \beta, \beta^2, \beta^3\}$ і другого порядку $GR_2 := \{e, \sigma\}$. Отже, межа Γ володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку, а оператор Лапласа інваріантний відносно групи рухів евклідового простору \mathbf{R}^2 . Кожна група симетрії кривої у \mathbf{R}^2 є підгрупою заданої групи рухів, а тому аналогічною групою володіє відповідна гранична задача теорії потенціалу і отримане еквівалентне інтегральне рівняння. Отже, можна стверджувати, що (7) володіє абелевою групою симетрії GR_8 , що і треба було показати.

Лему доведено.

Очевидно, що матриця поворотів на кут $\varphi = \pi/2$ має вигляд:

$$\beta = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ а } \sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Тоді } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Відповідно } \beta_1^{-1} = \beta_1, \quad \beta_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_5^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_7^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_8^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лема 2. Система інтегральних рівнянь (7) еквівалентна такій системі рівнянь

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \int_0^1 g'_{ij}(\tau) K[\beta_h^{-1} x_{11}(\tau); \beta_{h'}^{-1} x_{11}(\bar{\tau})] d\tau = f'_{kl}(\bar{\tau}), \quad (8)$$

де $\bar{\tau} \in [0, 1]$; $k = \overline{1, 4}$; $l = 1, 2$.

Доведення. Для отримання (8) здійснимо в (7) перехід до нового базису згідно такої схеми:

$$g'_{ij}(\tau) := g_{ij} \left[\beta_h^{-1} x_{11}(\tau) \right] \left(0 \leq \tau \leq 1; i = \overline{1, 4}; j = 1, 2; h = 2(i-1) + j \right);$$

$$f'_{kl}(\bar{\tau}) := f_{kl} \left[\beta_{h'}^{-1} x_{11}(\bar{\tau}) \right]$$

$$\left(0 \leq \bar{\tau} \leq 1; k = \overline{1, 4}; l = 1, 2; h' = 2(k-1) + l \right).$$

Запроваджена таким чином “заміна змінних” дає можливість звести (7) до еквівалентної системи (8), де інтегрування ведеться лише по конгруентній складовій межі — Γ_{11} .

Лемму доведено.

Систему (8), у свою чергу, зручно переписати у формі такого операторного рівняння

$$(AG)(\bar{\tau}) = \Psi(\bar{\tau}). \tag{9}$$

Тут $A := (A_{hh'})_{h,h'=1}^8$ — матриця операторів, $G(\tau) := [G_h(\tau)]_{h=1}^8$, $\Psi(\bar{\tau}) := [\Psi_{h'}(\bar{\tau})]_{h'=1}^8$ — стовпчики-функції такі, що $G_h(\tau) := g'_{ij}(\tau)$, $\Psi_{h'}(\bar{\tau}) := f'_{kl}(\bar{\tau})$, а кожний з операторів $A_{hh'}$ визначається за формулою:

$$(A_{hh'}G_h)(\bar{\tau}) := \int_0^1 G_h(\tau) K[\beta_h^{-1} x_{11}(\tau); \beta_{h'}^{-1} x_{11}(\bar{\tau})] d\tau = \Psi_{h'}(\bar{\tau}). \tag{10}$$

Відомо [1, с. 37—38], що характери групи GR_4 можна обчислити за формулою $\chi^h(\beta^k) = e^{2\pi i k(h-1)/n}$ ($k = \overline{0, 3}; h = \overline{1, 4}; n = 4$), де k — степінь перетворення β , h — номер відповідного представлення. Легко бачити, що таблиця характерів тоді матиме вигляд:

	e	β	β^2	β^3
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	i	-1	- i
χ^3	1	-1	1	-1
χ^4	1	i	-1	i

Оскільки для групи GR_2 таблиця характерів (матриця перетворення Фур'є) має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а досліджувана група є прямим добутком GR_4 і GR_2 , то, знайшовши прямий добуток відповідних матриць перетворення Фур'є, отримаємо

$$F := (F_{hl})_{h,l=1}^8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i & -i & -1 & -1 & i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & i & i & -1 & -1 & -i & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i & -1 & 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i & -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Використовуючи пряме (11) і обернене перетворення Фур'є для розглянутої групи восьмого порядку, матрицю операторів A у (9) з врахуванням (10) можна звести до діагонального вигляду, а систему інтегральних рівнянь (8) “розщепити” на вісім незалежних рівнянь. На підставі попереднього можна сформулювати таку теорему.

Теорема. Нехай (8) володіє абелевою групою симетрії GR_8 . Тоді (8) можна подати у вигляді:

$$(B_h \bar{G}_h)(\bar{\tau}) = \bar{\Psi}_h(\bar{\tau}) \quad (h = \overline{1, 8}; 0 \leq \bar{\tau} \leq 1), \quad (12)$$

$$\text{де} \quad \bar{G}_h(\tau) := \sum_{s=1}^8 F_{hs} G_s(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad \bar{\Psi}_h(\bar{\tau}) := \sum_{s=1}^8 F_{hs} \Psi_s(\bar{\tau}), \quad (13)$$

а B_h — елементи діагональної матриці $F A F^{-1}$ операторів, які обчислюємо за формулами:

$$B_1 := A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} + A_{51} + A_{61} + A_{71} + A_{81},$$

$$B_2 := A_{11} + A_{21} + i A_{31} + i A_{41} - A_{51} - A_{61} - i A_{71} - i A_{81},$$

$$B_3 := A_{11} + A_{21} - A_{31} - A_{41} + A_{51} + A_{61} - A_{71} - A_{81},$$

$$B_4 := A_{11} + A_{21} - i A_{31} - i A_{41} - A_{51} - A_{61} + i A_{71} + i A_{81},$$

$$B_5 := A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41} + A_{51} - A_{61} + A_{71} - A_{81},$$

$$B_6 := A_{11} - A_{21} + i A_{31} - i A_{41} - A_{51} + A_{61} - i A_{71} + i A_{81},$$

$$B_7 := A_{11} - A_{21} - A_{31} + A_{41} + A_{51} - A_{61} - A_{71} + A_{81},$$

$$B_8 := A_{11} - A_{21} - i A_{31} + i A_{41} - A_{51} + A_{61} + i A_{71} - i A_{81}.$$

Розв'язавши вісім інтегральних рівнянь (12), знайдемо $\bar{G}_h(\bar{\tau})$.

Далі, на основі (13), визначимо $G_h(\tau) = g'_{ij}(\tau)$, які можна використати при обчисленні потенціалу в будь-якій точці P площини $x_1 0 x_2$:

$$U(P) := \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \int_0^1 (g'_{ij}(\tau) - C\lambda'_{ij}(\tau)) K[\beta_h^{-1}x_{11}(\tau); P] d\tau + C,$$

де $P \in \bar{\Gamma}$.

Лема 3 (про адитивну сталу). Якщо початкова крайова задача володіє абелевою групою симетрії GR_8 , а граничні значення потенціалу на окремих ділянках межі приймають довільні значення C_1, C_2, \dots, C_8 ($|C_i| < +\infty; i = \overline{1, 8}$), то адитивну сталу в (3) можна обчислити

$$\text{за формулою } C = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 C_i.$$

Доведення проводиться на основі означення сталой C шляхом запровадження процедури “розщеплення” початкової системи інтегральних рівнянь на незалежні рівняння та аналізу їх дискретних аналогів.

Слід відзначити, що обчислення адитивної сталой C за наведеною формулою суттєво прискорює обчислення потенціалу “плоского” електростатичного поля в довільній точці $P \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}$.

Зауваження щодо класу отриманих інтегральних рівнянь. Далі, не зменшуючи загальності, для побудови та аналізу наближеної схеми розв’язування задачі в цілому розглянемо два “типові” інтегральні рівняння в послідовності (12) — перше та четверте.

Лема 3. Перше рівняння в послідовності (12) належить до класу інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі.

Доведення. Легко бачити, що досліджуване рівняння допускає виділення особливості ядра в явному вигляді:

$$\int_0^1 \bar{G}_1(\tau) [\ln|\tau - \bar{\tau}| + N(\tau, \bar{\tau})] D(\tau) d\tau = 2 \sum_{k=1}^4 f_k, \quad (14)$$

де $D(\tau) := \frac{1}{2\pi} (\text{sh}^2 \tau + \text{ch}^2 \tau)^{1/2}$, $N(\tau, \bar{\tau}) := \ln M(\tau, \bar{\tau}) + 2\pi \times$

$\times \sum_{l=2}^8 \Phi[\beta_l^{-1}x_{11}(\tau); \beta_l^{-1}x_{11}(\bar{\tau})]$, причому

$$M(\tau, \bar{\tau}) := \left\{ \frac{\text{sh}^2\left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{2}\right)}{\left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{2}\right)^2} \left[\text{sh}^2\left(\frac{\tau + \bar{\tau}}{2}\right) \right] + \text{ch}^2\left(\frac{\tau + \bar{\tau}}{2}\right) \right\}^{1/2}.$$

Лему доведено.

Для знаходження правої частини в (14) ми врахували ту обставину, що $f_i \left(i = \overline{1, 4} \right)$ — граничні значення потенціалу, тобто постійні величини в межах відповідних дуг Γ_i . Розв’язуваність (14) досліджують у різних функціональних просторах, але при цьому бажано враховувати особливу поведінку шуканої густини розподілу зарядів в околі точки $\tau = 1$. Так, наприклад, $\bar{G}_1(\tau)$ можна шукати в модифікованому просторі Гьольдера $\tilde{H}_\mu([0, 1])$ ($0 < \mu \leq 1$). Функція належить до такого простору тоді й лише тоді, коли має вигляд $\bar{G}_1^*(\tau)/\sqrt{1-\tau}$, причому неперервна функція $\bar{G}_1^*(\tau)$ задовольняє умову Гьольдера з показником μ .

Четверте рівняння в послідовності (12), враховуючи наявність уявної одиниці в зображенні оператора B_4 , необхідно подати у вигляді такої еквівалентної системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} \left(A_1^{(4)} G_1^{(4)} \right) (\bar{\tau}) + \left(A_2^{(4)} G_2^{(4)} \right) (\bar{\tau}) = 2(f_1 - f_3), \\ - \left(A_2^{(4)} G_1^{(4)} \right) (\bar{\tau}) + \left(A_1^{(4)} G_2^{(4)} \right) (\bar{\tau}) = 2(f_2 - f_4), \end{cases} \quad (0 \leq \bar{\tau} \leq 1) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad A_1^{(4)} &:= A_{11} + A_{21} - A_{51} - A_{61}, & A_2^{(4)} &:= A_{31} + A_{41} - A_{71} - A_{81}, \\ G_1^{(4)} &:= G_1(\tau) + G_2(\tau) - G_5(\tau) - G_6(\tau), \\ G_2^{(4)} &:= G_3(\tau) + G_4(\tau) - G_7(\tau) - G_8(\tau). \end{aligned}$$

Перше і друге рівняння в системі (15) належить до класу інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі. Зауважимо також, що (15) можна “розщепити” в послідовність двох незалежних рівнянь.

Числове розв’язування інтегральних рівнянь. Нарешті зосередимо увагу на деяких аспектах числового розв’язування інтегральних рівнянь (14). Враховуючи відносно невисоку гладкість функції $N(\tau, \bar{\tau})$, застосуємо метод колокації, обмежуючись кусково-постійною апроксимацією шуканої густини $\bar{G}_1(\tau)$. Для цього проведемо розбиття відрізка інтегрування на елементи з кроком $h = 1/n$,

$[0, 1] := \bigcup_{j=1}^n \Delta_j$, де $\Delta_j := \left[\tau_j - \frac{h}{2}, \tau_j + \frac{h}{2} \right]$, $\tau_j := \frac{h}{2}(2j-1)$. У відповідності з запровадженням розбиття подамо (14) у вигляді

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Delta_j} \bar{G}_1(\tau) \left[\ln|\tau - \bar{\tau}| + N(\tau, \bar{\tau}) \right] D(\tau) d\tau = 2 \sum_{k=1}^4 f_k. \quad (16)$$

Припустимо, що при виборі достатньо великого n у межах j -го елемента $\bar{G}_1(\tau) \approx \bar{G}_1(\tau_j)$. Далі, обираючи в якості точок колокації $(\bar{\tau} \in (0, 1))$ послідовно точки з дискретної множини $\{\bar{\tau}_i\}_{i=1}^n$, де $\bar{\tau}_i := \frac{h}{2}(2i-1)$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження $\bar{G}_1(\tau_j) (j = \overline{1, n})$:

$$\sum_{j=1}^n \bar{G}_1(\tau_j) \int_{\Delta_j} D(\tau) [\ln|\tau - \bar{\tau}_i| + N(\tau, \bar{\tau}_i)] d\tau = 2 \sum_{k=1}^4 f_k, \quad (17)$$

яка апроксимує (14). У разі необхідності виявлення особливого характеру поведінки шуканої функції $\bar{G}_1(\tau)$ в околі точки $\tau = 1$ є підстави апроксимувати останній доданок у лівій частині (16) таким виразом:

$$\bar{G}_1(\tau_n) \sqrt{h/2} \int_{1-h}^1 \frac{D(\tau)}{\sqrt{1-\tau}} [\ln|\tau - \bar{\tau}| + N(\tau, \bar{\tau})] d\tau.$$

Для усунення особливості, що при цьому виникає в знаменнику підінтегральної функції, достатньо виконати заміну змінних: $\sqrt{1-\tau} = v$.

Певну трудність викликає обчислення діагональних елементів матриці системи алгебраїчних рівнянь (17), тобто інтегралів виду:

$$\int_{\tau_i - h/2}^{\tau_i + h/2} D(\tau) \ln|\tau - \bar{\tau}_i| d\tau + \int_{\Delta_i} D(\tau) N(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau \quad (i = \overline{1, n}).$$

Для наближеного обчислення першого доданку скористаємось таким “послабленням” особливості у підінтегральній функції:

$$\int_{\Delta_i} D(\tau) \ln|\tau - \bar{\tau}_i| d\tau = \int_{\Delta_i} R(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau + D(\bar{\tau}_i) \int_{\Delta_i} \ln|\tau - \bar{\tau}_i| d\tau,$$

$$\text{де } R(\tau, \bar{\tau}_i) = \begin{cases} [D(\tau) - D(\bar{\tau}_i)] \ln|\tau - \bar{\tau}_i|, & |\tau - \bar{\tau}_i| \neq 0; \\ 0, & |\tau - \bar{\tau}_i| = 0. \end{cases}$$

Зауважимо при цьому, що $\int_{\Delta_i} \ln|\tau - \bar{\tau}_i| d\tau = h \left(\ln \frac{h}{2} - 1 \right)$. При наближе-

ному розв'язуванні інтегрального рівняння (14) використовували апостеріорний метод оцінювання похибки, а досягнення потрібної точності результатів забезпечували шляхом згущення сітки в околі особливої точки шуканого розв'язку [7].

Зауваження щодо розпаралелення процедури розв'язування (12). На завершення слід відзначити, що “розщеплення” початкової задачі на N незалежних інтегральних рівнянь (у нашому випадку $N = 8$) створює передумови для застосування до її числового аналізу процедур розпаралелення. При цьому важливим є встановлення основних загальноприйнятих [8, с. 321—322] характеристик ефективності, а саме, кількості часових тактів, необхідних для реалізації алгоритму за допомогою p процесорів (T_p); коефіцієнта прискорення за умов паралельних обчислень (R_p); коефіцієнта ефективності розпаралелення ($E_p := R_p/p$). Схема наближеного розв'язування одного інтегрального рівняння, в загальних рисах, полягає у формуванні матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що апроксимує відповідний інтегральний оператор, і подальшому розв'язуванні отриманої системи. У нашому конкретному випадку сформовану вже систему рівнянь розв'язували методом Гауса. За таких умов, використовуючи N процесорів ($p = N$), розв'язок N алгебраїчних систем, які апроксимують N незалежних інтегральних рівнянь, методом Гауса можна отримати за $T_p = M^3$ часових тактів, де M — кількість точок колокації на контурі інтегрування. Легко бачити, що при цьому коефіцієнт прискорення $R_p = N$, а коефіцієнт ефективності розпаралелення $E_p = 1$. Отже, використовуючи N процесорів для розв'язування N незалежних інтегральних рівнянь, ми досягаємо максимальної ефективності розпаралелення.

Для прискорення процесу розв'язування N рівнянь, враховуючи специфіку методу колокації, можна збільшити кількість процесорів до $p = NM^2$. Тоді $T_p = 3M$ — кількість часових тактів, необхідних для розв'язування N алгебраїчних систем, які апроксимують N інтегральних рівнянь, на NM^2 процесорах методом Гауса. Далі, легко бачити, що

$$R_p = \frac{NM^3}{3M} = \frac{NM^2}{3}, \text{ а } E_p = \frac{NM^2}{3NM^2} = \frac{1}{3}.$$

Отже, збільшуючи кількість процесорів, ми прискорюємо процес розв'язування N незалежних інтегральних рівнянь ($M \geq 2$ — цілком відповідає логіці застосування методу колокації). Зауважимо також, що при цьому зменшується коефіцієнт завантаження. Звідси для найшвидшого отримання розв'язку в цілому, незалежно від ефективності використання процесорів E_p та їх кількості p , необхідно максимізувати коефіцієнт прискорення R_p .

Чисельні експерименти. На прикладах 1—2 продемонстровано результати тестування методики розв'язування “плоскої” задачі електростатики (1)—(2) при різних граничних значеннях потенціалу, а загальний вигляд відповідної електронно-оптичної системи подано на рис. 1.

Приклад 1. У табл. 1 наведено значення потенціалу в деяких точках проміжку $[-2, 2]$ з кроком $h = 0.5$ при антисиметричних граничних значеннях: $f_1(x) = 1, f_2(x) = -1, f_3(x) = 1, f_4(x) = -1$ і різній кількості точок колокації M . Загальний вигляд розв'язку при $M = 100$ продемонстровано на лініях рівня (див. рис. 2). Також чисельно отримано константу C : $C = 0$ (що підтверджується лемою про адитивну сталу, оскільки граничні умови антисиметричні).

Таблиця 1

Результати, отримані в одній точці для прикладу 1

	Координати точки $(x_1, x_2) = x$	Значення потенціалу $U(x)$				
		$M = 10$	$M = 30$	$M = 50$	$M = 75$	$M = 100$
1	$(-0.50, -2.00)$	0.5067	0.5590	0.5765	0.5842	0.5845
2	$(-0.50, -1.50)$	0.7393	0.7974	0.8157	0.8232	0.8235
3	$(-0.50, -1.00)$	0.6967	0.7318	0.7422	0.7459	0.7462
4	$(-0.50, -0.50)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	$(-0.50, 0.00)$	-0.2236	-0.2412	-0.2466	-0.2478	-0.2480
6	$(-0.50, 0.50)$	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
7	$(-0.50, 1.00)$	0.6967	0.7318	0.7422	0.7459	0.7462
8	$(-0.50, 1.50)$	0.7393	0.7974	0.8157	0.8232	0.8235
9	$(-0.50, 2.00)$	0.5067	0.5590	0.5765	0.5842	0.5845

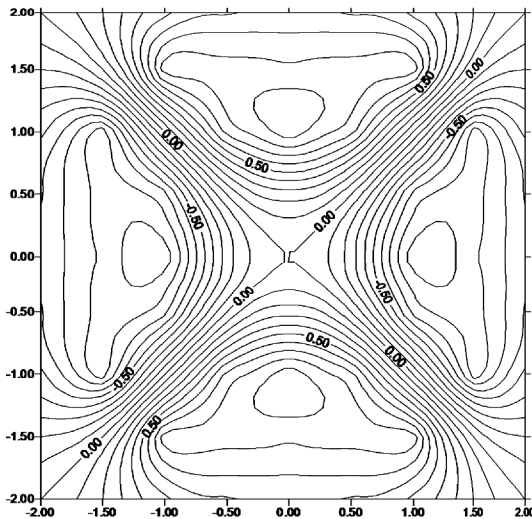


Рис. 2. Лінії рівня наближеного розв'язку для прикладу 1

Приклад 2. У табл. 2 наведено значення потенціалу в деяких точках проміжку $[-2, 2]$ з кроком $h=0.5$ при таких граничних значеннях: $f_1(x)=10$, $f_2(x)=20$, $f_3(x)=-100$, $f_4(x)=1$ і різній кількості точок колокації M . Загальний вигляд розв'язку при $M=100$ продемонстровано на лініях рівня (див. рис. 3). Константа $C=-17.25$.

Таблиця 2

Результати, отримані в одній точці для прикладу 2

	Координати точки $(x_1, x_2) = x$	Значення потенціалу $U(x)$				
		$M=10$	$M=30$	$M=50$	$M=75$	$M=100$
1	$(-0.50, -2.00)$	-66.3840	-71.5473	-73.6754	-74.1832	-74.1857
2	$(-0.50, -1.50)$	-80.3798	-85.9270	-87.8676	-88.6204	-88.6189
3	$(-0.50, -1.00)$	-79.5545	-83.8284	-84.6181	-85.7991	-85.8111
4	$(-0.50, -0.50)$	-37.8503	-39.6271	-40.1711	-40.4701	-40.4712
5	$(-0.50, 0.00)$	-11.0440	-10.5548	-10.4051	-10.3623	-10.3653
6	$(-0.50, 0.50)$	3.3503	5.1271	5.8788	5.9709	5.9712
7	$(-0.50, 1.00)$	6.3833	8.7100	9.8493	9.8897	9.8962
8	$(-0.50, 1.50)$	4.8476	7.1660	7.9155	8.4007	8.4097
9	$(-0.50, 2.00)$	3.7618	6.0219	6.8235	7.2415	7.2455

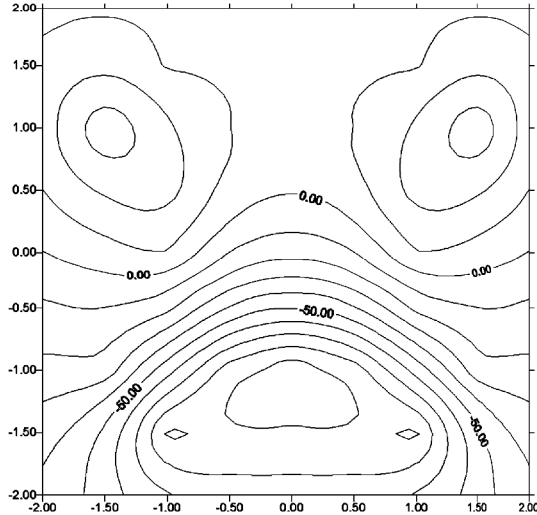


Рис. 3. Лінії рівня наближеного розв'язку для прикладу 2

Висновок. Переваги запровадженої методики очевидні: зменшення об'єму оперативної пам'яті комп'ютера при формуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка апроксимує операторне рів-

няння (у 64 рази!), можливість уникнути числової нестійкості, яка може виникнути при непомірному збільшенні розв'язуваних систем, а також можливість розпаралелення процедури розв'язування задач.

Список використаних джерел:

1. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп / Ж.-П. Серр. — М. : РХД, 2003. — 132 с.
2. Захаров Е. В. Метод численного решения интегральных уравнений в краевых задачах с абелевой группой симметрий конечного порядка / Е. В. Захаров, С. И. Сафронов, Р. П. Тарасов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1990. — Т. 30, № 11. — С. 1661—1674.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 400 с.
4. Atkinson K. The numerical solution of first-kind logarithmic-kernel integral equations on smooth open arcs / K. Atkinson, I. H. Sloan // Mathematics of Computation. — 1991. — Vol. 56, № 193. — P. 119—139.
5. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М. : Наука, 1986. — 544 с.
6. Захаров Е. В. Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала / Е. В. Захаров, С. И. Сафронов, Р. П. Тарасов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1992. — Т. 2, № 1. — С. 40—58.
7. Mochurad L. I. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L. I. Mochurad, Y. S. Harasym, V. A. Ostudin // International Journal of Computing. — 2009. — Vol. 8, № 2. — P. 149—156.
8. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики / В.П. Ильин. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 336 с.

The numerical solution of some boundary value problem in potential theory with eight order Abelian group of symmetry is considered.

Key words: *Laplace equation, integral equations, the potential theory, the Abelian group of symmetry, matrix of Fourier transformation, the collocation method.*

Отримано: 23.11.2009