УДК 519. 85

С. Ю. Протасов*, асистент,
А. М. Корнеев**
*Черкасский государственный технологический университет, г. Черкассы,
**ОАО «Хмельницкгаз» г. Хмельницкий

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА МНОГОМАССОВУЮ СИСТЕМУ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ВЛИЯНИЮ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Рассматривается метод определения внешних возмущений на динамическую систему, эквивалентных действию начальных значений выходных координат системы, основанный на применении интегральной формы задачи Коши и позволяющий решать точно или приближённо как прямые задачи анализа многомассовых систем, так и обратные задачи определения начальных значений искомых функций смещения сосредоточенных масс системы.

Ключевые слова: *многомассовые системы; функции смещения сосредоточенных масс системы; определения внешних возмущений на динамическую систему.*

Введение. При исследовании динамики многомассовых механических систем (также как систем другой физической природы, например, электрических цепей) важное значение имеет задача определения внешних сил (возмущений), эквивалентных влиянию начальных условий. Для решения этой задачи можно применить операционный метод или теорию δ -функций [1], что позволяет получить правые части дифференциальных уравнений (нагрузочные функции), действие которых при нулевых начальных условиях равно возмущениям от начальных значений координат и их производных в случае однородного уравнения. Рассмотрим иной подход к решению этой задачи [2].

Интегральный способ. Пусть дифференциальное уравнение переходного процесса относительно смещения i -й массы от положения равновесия или упругой силы, развиваемой в i, $(i+1)$ -м звене, имеет следующий вид:

$$Lx = f(t), \tag{1}$$

где L — дифференциальный оператор n-го порядка. Подчиним уравнение (1) общим начальным условиям для $t=0$

$$x^{(n-1)}\Big|_{t=0} = x^{(n-1)}(0);\; x^{(n-2)}\Big|_{t=0} = x^{(n-2)}(0);\ldots;\; x\Big|_{t=0} = x(0).$$

Положив

$$U(t)=x^{(n)}(t), \tag{2}$$

приведём уравнение (1) к интегральному виду [2]:

$$U(t)+\int_0^t K(t,\,y)u(y)dy=f(t)+\Phi(t), \tag{3}$$

где $\Phi(t)$ — функция образованная начальными условиями. Запишем её в следующей форме:

$$\Phi(t)=-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}x^{n-\mu}(0)a_{\nu-1}\frac{t^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}, \tag{4}$$

где $a_{\nu-1}$ — коэффициенты дифференциального оператора L.

Приняв, что

$$F(t)=f(t)+\Phi(t), \tag{5}$$

напишем дифференциальное уравнение

$$Lx=F(t).$$

Очевидно, что, если привести дифференциальное уравнение (5) к интегральному, то получим уравнение (3), которое, в свою очередь, будет эквивалентно дифференциальному уравнению (1) с начальными условиями (2). Необходимо заметить, что правая часть уравнения (5) содержит слагаемое $\Phi(t)$, что даёт в качестве частного решения фиктивное движение системы как «твердого тела».

Поскольку функция $\Phi(t)$ представляет собой полином (4), то частное решение, соответствующее ей, легко находится по известной левой части дифференциального уравнения. В самом деле, определяя частное решение в виде полинома с неопределёнными коэффициентами

$$x^{*}=P(t), \tag{6}$$

находим их значения из уравнения

$$L\big[P(t)\big]=\Phi(t).$$

Очевидно, что частное решение (6) должно быть удалено из общего решения уравнения (5).

Пример. Пусть задано дифференциальное уравнение переходного процесса

$$x^{IV}+a_0\ddot{x}+a_1x=f(t) \tag{7}$$

с начальными условиями общего вида

$$x\big|_{t=0}=x_0;\ \dot{x}\Big|_{t=0}=\dot{x}_0;\ \ddot{x}\Big|_{t=0}=\ddot{x}_0;\ \dddot{x}\Big|_{t=0}=\dddot{x}_0\,. \tag{8}$$

Полагая $x^{IV} = u(t)$, приводим к следующим равенствам:

$$x^{IV} = u(t);$$

$$\dddot{x} = \int_0^t u(t)dt + \dddot{x}_0;$$

$$\ddot{x} = \int_0^t (t-y)u(y)dy + \dddot{x}_0 t + \ddot{x}_0; \tag{9}$$

$$\dot{x} = \int_0^t \frac{(t-y)^2}{2!} u(y)dy + \frac{\dddot{x}_0 t^2}{2!} + \ddot{x}_0 t + \dot{x};$$

$$x = \int_0^t \frac{(t-y)^3}{3!} u(y)dy + \frac{\dddot{x}_0 t^3}{3!} + \frac{\ddot{x}_0 t^2}{2!} + \dot{x}_0 t + x_0 .$$

Подставив значения x и его производных в дифференциальное уравнение (7), получим следующее интегральное уравнение:

$$u(t) + \int_0^t K(t,y)u(y)dy = f(t) - \Phi(t). \tag{10}$$

При этом ядро уравнения

$$K(t,y) = a_0(t-y) + a_1 \frac{(t-y)^3}{3!}.$$

Функция, образованная начальными условиями движения, будет иметь вид

$$\Phi(t) = \dddot{x}_0 \left(a_0 t + a_1 \frac{t^3}{3!} \right) + \ddot{x}_0 \left(a_0 + a_1 \frac{t^2}{2!} \right) + \dot{x}_0 a_1 t + x_0 a_1. \tag{11}$$

Уравнению (10) или, дифференциальному уравнению (7) может соответствовать дифференциальное уравнение

$$x^{IV} + a_0 \ddot{x} + a_1 x = f(t) + \Phi(t) \tag{12}$$

при нулевых начальных условиях. В этом случае частное решение, записанное в виде интеграла Коши, и будет его общим решением.

Пусть реакция системы на единичный импульс представлена функцией $B_1(t)$. Тогда

$$x = \int_0^t \left[f(t) - \Phi(y) \right] B_1(t-y)dy. \tag{13}$$

Первый интеграл

$$I_1 = \int_0^t f(y)B_1(t-y)dy$$

представляет собой частное решение уравнения (7) от правой части $f(t)$. Второй интеграл

$$I_2 = -\int_0^t \Phi(y) B_1(t-y)dy,$$

очевидно, должен дать частное решение того же уравнения, эквивалентное возмущениям, вносимым начальными условиями.

Подставив во второй интеграл значение $\Phi(t)$ (11), получим

$$I_2 = -\dddot{x}_0 \int_0^t \left(a_0 y + a_1 \frac{y^3}{3!} \right) B_1(t-y)dy -$$

$$- \ddot{x}_0 \int_0^t \left(a_0 + a_1 \frac{y^2}{2!} \right) B_1(t-y)dy - \dot{x}_0 a_1 \int_0^t y B_1(t-y)dy -$$

$$-x_0 a_1 \int_0^t B_1(t-y)dy. \qquad (14)$$

Учитывая, что

$$\int_0^t \frac{y^k}{k!} B_1(t-y)dy = B_1^{(-k-1)}(t),$$

и проинтегрировав равенство (14), найдём

$$I_2 = -\dddot{x}_0 \left[a_0 B_1^{(-2)}(t) + a_1 B_1^{(-4)}(t) \right] - \ddot{x}_0 \left[a_0 B_1^{(-1)}(t) + a_1 B_1^{(-3)}(t) \right] -$$

$$-\dot{x}_0 a_1 B_1^{(-2)}(t) - x_0 a_1 B_1^{(-1)}(t).$$

Воспользовавшись соотношением

$$B_1^{(k)}(t) = \left(\frac{t^3}{3!} \right)^k - a_0 B_1^{(k-2)}(t) - a_1 B_1^{(k-4)}(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

и выполнив элементарные преобразования, получим

$$I_2 = x_0 \left[1 - a_1 B_1^{(-1)}(t) \right] + \dot{x}_0 \left[t - a_1 B_1^{(-2)}(t) \right] + \ddot{x}_0 B_1^{(-1)}(t) +$$

$$+\dddot{x}_0 B_1(t) - \dddot{x}_0 \frac{t^3}{3!} - \ddot{x}_0 \frac{t^2}{2!} - \dot{x}_0 t - x_0 \qquad (15)$$

или, после подстановки

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{a_0}},$$

$$I_2 = x_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau) \right] + \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left[\tau - c_1 B_1^{(-2)}(\tau) \right] + \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} B_1^{(1)}(\tau) +$$

$$+\dddot{x}_0 \frac{1}{a_0\sqrt{a_0}} B_1(\tau) - \dddot{x}_0 \frac{1}{a_0\sqrt{a_0}} \frac{\tau^3}{3!} - \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} \frac{\tau^2}{2!} - \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \tau - x_0. \qquad (16)$$

Решение однородного дифференциального уравнения (7) с начальными условиями (8) в функциях переходного процесса записывается, как известно, следующим образом:

$$x = x_0\left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau)\right] + \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left[\tau - c_1 B_1^{(-2)}(\tau)\right] +$$

$$+\ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} B_1^{(1)}(\tau) + \dddot{x}_0 \frac{1}{a_0\sqrt{a_0}} B_1^{(1)}(\tau). \qquad (17)$$

Сравнивая решения (16) и (17), замечаем, что они различаются одним полиномом

$$-\dddot{x}_0 \frac{1}{a_0\sqrt{a_0}} \frac{\tau^3}{3!} - \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} \frac{\tau^2}{2!} - \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \tau - x_0,$$

образованным начальными условиями движения. Этот полином является частным решением (6) дифференциального уравнения

$$x^{IV} + a_0 \ddot{x} + a_1 x = -\Phi(t), \qquad (18)$$

где $\Phi(t)$ — функция, определённая равенством (11).

Найдем частное решение уравнения (18) в виде полинома

$$x^* = At^3 + Bt^2 + Ct + D. \qquad (19)$$

Дифференцируя полином (19) и подставляя значение его производных в уравнение (18), а затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим, что

$$A = -\frac{\dddot{x}_0}{3!}; \quad B = -\frac{\ddot{x}_0}{2!}; \quad C = -\dot{x}_0; \quad D = -x_0.$$

Тогда частное решение уравнения (19) записываем в виде

$$x^* = -\frac{\dddot{x}_0}{3!} t^3 - \frac{\ddot{x}_0}{2!} t^2 - \dot{x}_0 t - x_0,$$

или, после перехода к аргументу Φ,

$$x^* = -\frac{\dddot{x}_0}{a_0\sqrt{a_0}\,3!}\tau^3 - \frac{\ddot{x}_0}{a_0\,2!}\tau^2 - \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{a_0}}\tau - x_0. \qquad (20)$$

Следовательно, если вычесть частное решение (20) из общего решения уравнения (12), записанного для нулевых начальных условий, то оно совпадает с решением уравнения (1) при начальных условиях общего вида, заданных величинами (2).

Обратная задача. При некоторых общих предположениях разрешима и обратная задача, когда внешние нагрузки, т.е. правые части дифференциальных уравнений, представляются в виде эквивалентных им начальных условий движения.

В целях упрощения записи положим, что

$$F_{i,i+1} \equiv x,$$

и рассмотрим дифференциальное уравнение переходного процесса

$$Lx = \Phi_i(t). \tag{21}$$

Считая его начальные условия нулевыми и полагая

$$x^{(r)} = u(t),$$

приведём уравнение (1) к интегральному уравнению Вольтерра II рода

$$u(t) + \int_0^t K(t, y)u(y)dy = \Phi_i(t). \tag{22}$$

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$Lx = 0 \tag{23}$$

с дифференциальным оператором

$$L = \frac{d^r}{dt^r} + p_1 \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} + p_2 \frac{d^{r-2}}{dt^{r-2}} + \ldots + p_r$$

и начальными условиями для $t = 0$

$$\begin{gathered} x^{(r-1)}(0) = x_0^{(r-1)};\ x^{(r-2)}(0) = x_0^{(r-2)} \ldots; \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0;\ x(0) = x_0. \end{gathered} \tag{24}$$

Положив, как и прежде, $x^{(r)} = u(t)$, запишем следующее интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (23) с начальными условиями (24):

$$u(t) + \int_0^t K(t, y)u(y)dy = F(t). \tag{25}$$

В этом уравнении свободная функция $F(t)$ образованна за счёт начальных условий движения (24). В соответствии с равенством (4) она записывается следующим образом:

$$F(t) = -\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{\nu} x_0{}^{r-\mu} p_{\nu-1} \frac{t^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}, \tag{26}$$

где $p_{\nu-1}$ — коэффициенты дифференциального оператора L. Расписывая двойную сумму (26), получаем

$$F(t) = -\left[p_1 x_0^{(r-1)} + p_2 x_0^{(r-2)} + \ldots + p_r x_0 \right] -$$

$$-\left[p_2 x_0^{(r-1)} + p_3 x_0^{(r-2)} + \ldots + p_r \dot{x}_0 \right] \frac{t}{1!} -$$

$$-\left[p_3 x_0^{(r-1)} + p_4 x_0^{(r-2)} + \ldots + p_r \ddot{x}_0 \right] \frac{t^2}{2!} - \ldots -$$

$$-\left[p_{r-1} x_0^{(r-1)} + p_r x_0^{(r-2)} \right] \frac{t^{(r-2)}}{(r-2)!} - p_r x_0^{(r-1)} \frac{t^{(r-1)}}{(r-1)!}. \qquad (27)$$

Допустим теперь, что правая часть дифференциального уравнения (21) имеет вид полинома

$$\Phi_i(t) = \sum_{k=0}^{r-1} b_k \frac{t_k}{k!}. \qquad (28)$$

Потребуем тождественного равенства функций (27) и (28) и на этом основании положим равными коэффициенты при одинаковых степенях аргумента t. В результате получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & b_{r-1} = -x_0^{(r-1)} p_r; \\ & b_{r-2} = -x_0^{(r-1)} p_{r-1} - x_0^{(r-2)} p_r; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ & b_0 = -x_0^{(r-1)} p_1 - x_0^{(r-2)} p_2 - \cdots - x_0 p_r. \end{aligned} \qquad (29)$$

Поскольку матрица уравнений (29) имеет треугольный вид

$$\begin{pmatrix} p_r & 0 & \ldots & 0 \\ p_{r-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

то исключение неизвестных легко выполняется по методу Гаусса.

Очевидно, что

$$x_0^{(r-1)} = \frac{b_{r-1}}{p_r};$$

$$x_0^{(r-2)} = \frac{b_{r-2} - \frac{p_{r-1}}{p_r} b_{r-1}}{p_r}; \qquad (30)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Определив начальные условия уравнения (23) по формулам (30), заметим, что интегральные уравнения (22) и (25) эквивалентны. Из этого вывода следует, что неоднородное уравнение с нулевыми начальными условиями (21) также эквивалентно, в определённом смысле, уравнению (28) с начальными условиями (30).

Нетрудно заметить, что при таком способе приведения уравнение (23) потеряет частное решение, соответствующее правой части уравнения (21). Поскольку правая часть уравнения (21) представлена полиномом (28), то его частное решение определяет статику системы, т.е. её движение как «твердого тела» и может быть без трудностей найдено методом неопределённых коэффициентов. Поясним этот вывод небольшим примером.

Рассмотрим трехмассовую систему со свободными концами. Пусть к первой массе этой системы приложена внешняя сила $f_1(t)$. Дифференциальные уравнения переходного процесса такой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{12} + \omega_{12}^2 x_{12} - \frac{c_{12}}{m_2} x_{23} &= \frac{c_{12}}{m_1} f_1(t); \\ \ddot{x}_{23} + \omega_{23}^2 x_{23} - \frac{c_{23}}{m_2} x_{12} &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\omega_{12}^2 = c_{12} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}; \quad \omega_{23}^2 = c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}.$$

Уравнение для упругой силы в узле

$$\begin{aligned} x_{12}^{IV} + a_0 \ddot{x}_{12} + a_1 x_{12} &= \frac{c_{12}}{m_1} \left[\ddot{f}_1(t) + c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} f_1(t) \right]; \\ x_{23}^{IV} + a_0 \ddot{x}_{23} + a_1 x_{23} &= \frac{c_{12} c_{23}}{m_1 m_2} f_1(t), \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= c_{12} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}; \\ a_1 &= c_{12} c_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}. \end{aligned} \tag{33}$$

Допустим, что для дифференциальных уравнений (31) заданы следующие начальные условия для $t = 0$:

$$x_{12}(0) = 0; \quad \dot{x}_{12}(0) = 0; \quad x_{23}(0) = 0; \quad \dot{x}_{23}(0) = 0. \tag{34}$$

Из системы (31) при подстановке $t = 0$ и заданных значений (34) находим

$$\begin{gathered} \ddot{x}_{12}(0) = \frac{c_{12}}{m_1} f_1(0); \; \dddot{x}_{12}(0) = \frac{c_{12}}{m_1} f_1(0); \\ \dddot{x}_{23}(0) = \ddot{x}_{23}(0) = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Пусть $f_1(t) = f_0 = \text{const}$. Тогда начальные условия уравнения (32), с учётом величин (34) и равенства (35), будут следующими:

$$x_{12}(0) = 0;\ \dot{x}_{12}(0) = 0;\ \ddot{x}_{12}(0) = \frac{c_{12}}{m_1} f_0;\ \dddot{x}_{12}(0) = 0;$$
$$x_{23}(0) = 0;\ \dot{x}_{23}(0) = 0;\ \ddot{x}_{23}(0) = 0;\ \dddot{x}_{23}(0) = 0, \tag{36}$$

а правые части уравнения (32) примут такой вид:

$$f_{12} = c_{12}c_{23}\frac{m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} f_0;$$
$$f_{23} = c_{12}c_{23}\frac{f_0}{m_1 m_2}. \tag{37}$$

Поскольку заданное уравнение является неполным, т.е. не содержит нечётных производных, то при $r = 4$ коэффициенты формул (29) будут следующими:

$$p_4 = a_1;\ p_3 = 0;\ p_2 = a_0;\ p_1 = 0.$$

В то же время правые части дифференциальных уравнений (37) являются постоянными величинами и поэтому коэффициенты в разложении нагрузочной функции (28), за исключением b_0, все равны нулю. С учётом этого обстоятельства равенства (29) для первого уравнения (32) с правой частью f_{12} будут следующими:

$$\begin{aligned}
&0 = -\dddot{x}_0 a_1;\\
&0 = -\ddot{x}_0 \cdot 0 - \dddot{x}_0 a_1;\\
&0 = -\ddot{x}_0 \cdot 0 - \dddot{x}_0 a_0 - \dot{x}_0 a_1;\\
&c_{12}c_{23}\frac{(m_2 + m_3) f_0}{m_2 m_3} = -\dddot{x}_0 \cdot 0 - \ddot{x}_0 a_0 - \dot{x}_0 \cdot 0 - x_0 a_1,
\end{aligned} \tag{38}$$

откуда эквивалентные начальные условия будут

$$\dddot{x}_0 = 0;\ \ddot{x}_0 = 0;\ \dot{x}_0 = 0;\ x_0 = -c_{12}c_{23}\frac{m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}\cdot\frac{f_0}{a_1}.$$

Подставляя значение a_1 из формулы (3), получаем

$$x_0 = -\mu_1 f_0, \tag{39}$$

где

$$\mu_1 = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Эквивалентные начальные условия для правой части f_{23} находятся подобным же образом:

$$\dddot{x}_0 = 0;\ \ddot{x}_0 = 0;\ \dot{x}_0 = 0;\ x_0 = -c_{12}c_{23}\frac{m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}\cdot\frac{f_0}{a_1}.$$

Выполнив операцию деления, найдём, что

$$x_0 = -\mu_2 f_0,$$

где

$$\mu_2 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Запишем расчётные начальные условия дифференциальных уравнений (32) как сумму условий (36) и (39)

$$\begin{aligned} &x_{12}(0) = -\mu_1 f_0;\ \dot{x}_{12}(0) = 0;\ \ddot{x}_{12}(0) = \frac{c_{12}}{m_1} f_0;\ \dddot{x}_{12}(0) = 0; \\ &x_{23}(0) = \mu_2 f_0;\ \dot{x}_{23}(0) = 0;\ \ddot{x}_{23}(0) = 0;\ \dddot{x}_{23}(0) = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Решение уравнений (32) при начальных условиях (40) согласно формулам (5) будет

$$\begin{aligned} &x_{12} = -\mu_1 f_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau)\right] + \frac{c_{12} f_0}{m_1 a_0} B_1^{(1)}(\tau); \\ &x_{23} = -\mu_2 f_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau)\right]. \end{aligned} \tag{41}$$

Покажем, что решения (41) не содержат статических перемещений и, следовательно, статической составляющей упругой силы, возникающей в звеньях системы.

Заменяя в уравнениях (32) с правыми частями (37) аргумент $\left(t = \frac{\tau}{\sqrt{a_0}}\right)$, получаем

$$\begin{aligned} &F_{12}^{IV} + \ddot{F}_{12} + c_1 F_{12} = c_{12} c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3 a_0^2} f_0; \\ &F_{23}^{IV} + \ddot{F}_{23} + c_1 F_{23} = c_{12} c_{23} \frac{1}{m_1 m_2 a_0^2} f_0. \end{aligned} \tag{42}$$

Преобразуем правые части уравнений (42) следующим образом:

$$f_{12} = c_{12} c_{23} \frac{(m_2 + m_3 + m_1 - m_1)}{m_1 m_2 m_3 a_0^2} f_0 = \frac{a_1}{a_0^2} f_0 - \frac{c_{12} c_{23} m_1}{m_1 m_2 m_3 a_0^2} f_0;$$

$$f_{12} = c_1 f_0 - \frac{c_{12} c_{23} m_1 (m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 m_2 m_3 a_0^2 (m_1 + m_2 + m_3)} = c_1 f_0 - c_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} f_0,$$

откуда

$$c_1 \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} f_0 = \mu_1 c_1 f_0; \tag{43}$$

$$f_{23} = \frac{c_{12}c_{23}}{m_1 m_2 a_0^2} f_0 = c_{12}c_{23} \frac{m_3(m_2 + m_3 + m_1)}{m_1 m_2 m_3 (m_2 + m_3 + m_1) a_0^2} f_0;$$

$$f_{23} = \frac{c_{12}c_{23}}{m_1 m_2 a_0^2} f_0 = \mu_2 c_1 f_0. \tag{44}$$

Поскольку дифференциальные уравнения уже приведены к аргументу τ , частные решения в форме Коши будут следующими:

$$\begin{aligned} x_{12}^* &= \mu_1 c_1 \int_0^\tau B(\tau - y)dy = \mu_1 c_1 B^{(-1)}(\tau); \\ x_{23}^* &= \mu_2 c_1 \int_0^\tau B(\tau - y)dy = \mu_2 c_1 B^{(-1)}(\tau). \end{aligned} \tag{45}$$

Частные решения, записанные в такой форме, учитывают, конечно, действие статических сил. Однако величина сил, действующих статически, может быть получена также как частное решение уравнений (42), но найдено другим методом. Например, при постоянных правых частях уравнений (42) было бы уместным искать их частные решения также в виде некоторых постоянных величин x_{12}^* и x_{23}^* .

Подставляя постоянную величину x_{12}^* в левую часть первого уравнения системы (42) и учитывая значение правой части равенства (43), находим

$$c_1 F_{12}^* = \mu_1 c_1 f_0,$$

или

$$x_{12}^* = \mu_1 f_0. \tag{46}$$

Если учесть ускорение системы как твердого тела, то

$$\left(x_{12}\right)_{cm} = f_0 - \mu_1 f_0 = f_0\left(1 - \mu_1\right),$$

где

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Следовательно,

$$\left(x_{12}\right)_{cm} = f_0\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right).$$

Таким образом, форма частного решения (46) определяет статическую слагаемую упругой силы, развиваемой в звене. Точно так же определим, что для правой части (44) частное решение второго уравнения (42)

$$x_{23}^{*} = \left(x_{23}\right)_{cm} = \mu_2 f_0. \tag{47}$$

Запишем общее решение уравнений (42) для заданных начальных условий (36) с учётом частных решений (45):

$$\begin{aligned} x_{12} &= \frac{c_{12}}{m_1 a_0} f_0 B_1^{(1)}(\tau) + \mu_1 f_0 c_1 B_1^{(-1)}(\tau); \\ x_{23} &= \mu_2 f_0 c_1 B_1^{(-1)}(\tau). \end{aligned} \tag{48}$$

Эти решения отличаются от решений (41) только на величины (46) и (47). Прибавляя к правой части равенства (41) величины статических сил (46) и (47), получим формулы (48).

Следовательно, в приведенном неоднородном уравнении начальными условиями не учтена лишь статическая составляющая решения.

Вывод. Таким образом, задача определения внешних возмущений на динамическую систему, эквивалентных действию начальных значений выходных координат системы, решается на основе применения интегральной формы задачи Коши. Рассматриваемый метод позволяет решать точно или приближённо как прямые задачи анализа многомассовых систем, так и обратные задачи определения начальных значений искомых функций смещения сосредоточенных масс системы.

Список использованной литературы:

1. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1975. — 304 с.
2. Дячук О. А. Перетворення моделей динамічних систем : наукові праці Донецького національного технічного університету : Серія «Інформатика, кібернетика і обчислювальна техніка» (ІК-2007) / О. А. Дячук. — Донецьк. : ДонНТУ, 2007. — В. 8(120) — С. 99—106.
3. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, т.1, Линейные уравнения Вольтерра. / Г. Мюнтц — М. : ГПТИ, 1934. — 198 с.

The method of determination of external indignations is examined on the dynamic system, equivalent an action initial values of output coordinates of the system, based on application of integral form of task Koshi and allowing to decide exactly or approximately both direct tasks of analysis of the multimass systems and reverse tasks of determination of initial values of the sought after functions of displacement of concentrated the masses of the system.

Key words: *multimass systems; functions of displacement of concentrated the masses of the system; determination of external indignations on the dynamic system.*

Отримано: 26.09.2009