УДК 621.3720619(045)

А. В. Васильев, канд. техн. наук
Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины, г. Киев

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ S-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрено применение операционного метода S-преобразований к аппроксимационному решению линейных дифференциальных уравнений с производными целого и дробного порядков и параметрической идентификации на основе использования функций отклика на внешнее воздействие. Описан вычислительный эксперимент по решению прямой и обратной задач на примере уравнения Баглея-Торвика в среде системы Mathematica®.

Ключевые слова: *аппроксимация сигналов, дробное исчисление, параметрическая идентификация, математическое моделирование динамических систем, операционные методы анализа.*

Введение. При исследованиях динамических систем наиболее часто встречаются две задачи: для заданных структуры математической модели, коэффициентов, начальных условий и внешнего воздействия определить отклик системы (например, решить интегро-дифференциальное уравнение). Такую задачу обычно называют прямой. Если задана структура математической модели, начальные условия, внешнее воздействие и отклик на нее, но неизвестны коэффициенты уравнений, то процесс нахождения коэффициентов составляет существо обратной задачи. Последняя носит название задачи параметрической идентификации. Так как информация об отклике системы получается как результат наблюдения (измерения) поведения системы, которые сопровождаются различного рода ошибками, исследователи прибегают к методам повторных экспериментов, фильтрации сигналов, их осреднения, что часто превращает обратную задачу в некорректную. В последнее время большой интерес получили динамические системы, математические модели которых содержат интегро-дифференциальные операторы нецелых (дробных) порядков, методы исследования которых проходят в настоящее время период интенсивной разработки [1]. В данной работе рассматриваются операционные методы решения прямой и обратной задач для линейных динамических систем, на примере дифференциального уравнения, включающего производные как целого, так и дробного порядков. Использован операционный метод S-преобразований [2]. Вычислительные эксперименты выполнены в среде системы Mathematica®.

Постановка задачи. Математическая модель динамической системы представлена в форме:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot {}_0^C D_t^{\beta_k} \left(x(t) \right) = f(t). \tag{1}$$

при следующих ограничениях и начальных условиях:

$$a_1 \neq 0;\ n \geq \beta_1 > n-1 \geq \beta_2 > \cdots \beta_n \geq 0\ , \tag{2}$$

$$x^{(r)}(0) = x_{r0},\ r := 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1\ . \tag{3}$$

В выражении (1) использовано обозначение дифференциального оператора нецелого порядка ${}_0^C D_t^{\beta}$ в форме Капуто [1, 2]:

$$J^{\beta}\left(x(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\, x(\tau) d\tau\ , \tag{4}$$

$${}_0^C D_t^{\beta}\left(x(t) \right) = J^{n-\beta}\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right),\ n-1 \leq \beta < n\ . \tag{5}$$

В выражениях (1—5) порядки дифференциальных операторов β_k могут принимать как дробные, так и целые значения.

При решении прямой задачи необходимо найти решение (1) при известных ограничениях (2—3). Решение обратной задачи предполагает определение неизвестных коэффициентов a_k при известных решении $x(t)$ и начальных условиях (3).

Метод S-преобразований. Приведем в ретроспективном плане основные соотношения, представляющие существо операционного метода S-преобразований. Для сигнала $x(t),\ 0 \leq t < T$ и линейно-независимой системы базисных функций $\vec{S}(t) = \left[s_1(t),\ s_2(t),\ \cdots\ s_m(t) \right]^*$ под прямым S-преобразованием понимают систему выражений (6):

$$\begin{gathered} \vec{X} = W^{-1} \cdot \vec{Q}, \\ w_{ij} = \int_0^T s_i(t) \cdot s_j(t) dt,\ i, j := 1,\ 2, \ldots,\ m, \\ q_i = \int_0^T x(t) \cdot s_i(t) dt,\ i := 1,\ 2, \ldots,\ m, \end{gathered} \tag{6}$$

в которой сигналу $x(t)$ сопоставляется его операционный аналог $x(t)\ \Leftrightarrow\ \vec{X}$ — вектор коэффициентов аппроксимирующего полинома в системе базисных функций $\vec{S}(t)$. Обратное S-преобразование определяется выражением (7), которое восстанавливает сигнал в виде аппроксимации по известному изображению $\vec{X}$:

$$x_a(t) = \vec{X}^* \cdot \vec{S}(t) = \vec{S}(t)^* \cdot \vec{X} = \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot s_i(t). \tag{7}$$

Операции интегрирования с порядком β — $\left(J^{\beta}\left(x(t)\right) = \right.$ $\left. = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} x(\tau) d\tau \right)$ в операционной области соответствует выражение (8):

$$\vec{Y} = P^{\beta} \cdot \vec{X}, \tag{8}$$

где P^{β} — операционная матрица интегрирования целого или дробного порядка, элементы которой определяются выбранной системой базисных функций [2], $\vec{Y}$ — изображение интеграла сигнала $x(t)$. Существо применения S-преобразования покажем на примере дифференциального уравнения смешанного порядка, известного как уравнение Баглея-Торвика [3].

Операционная форма математической модели динамической системы. К уравнению Баглея-Торвика сводится, в частности, процесс движения пластины, погруженной в Ньютоновскую жидкость [3]. Выбор этого уравнения для рассмотрения предлагаемого метода параметрической идентификации обусловлен двумя причинами. Первая состоит в том, что уравнение Баглея-Торвика является уравнением смешанного порядка, в котором присутствуют наряду с оператором дробного порядка обычные производные целого порядка. Вторая связана с наличием аналитического решения, которое может быть использовано в качестве исходной информации для решения идентификационной задачи и сравнения аппроксимационного решения с аналитическим. При некоторых упрощающих предположениях уравнение имеет вид:

$$\begin{gathered} a \cdot y''(t) + b \cdot {}_0D_t^{3/2}\left(y'(t)\right) + c \cdot y(t) = f(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ t > 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Перед применением S-преобразования приведем уравнение (9) к эквивалентному интегральному, путем двукратного интегрирования с переменным верхним пределом:

$$a \cdot y(t) + b \cdot {}_0J_t^{1/2}\left(y(t)\right) + c \cdot {}_0J_t^{2}\left(y(t)\right) = {}_0J_t^{2}\left(f(t)\right). \tag{10}$$

Применяя к уравнению (10) S-преобразование и разрешая полученное выражение относительно изображения $\vec{Y}$, получим:

$$\vec{Y} = \left(a \cdot \vec{E} + b \cdot P^{1/2} + c \cdot \vec{P}^2\right)^{-1} \cdot \vec{P}^2 \cdot \vec{F}, \tag{11}$$

$$y_a(t) = \vec{Y} * \cdot \vec{S}(t). \tag{12}$$

Выражения (11) и (12) записаны в форме, дающей решение прямой задачи анализа процесса. Для решения идентификационной задачи результат S-преобразования необходимо записать в следующей форме:

$$R = E \cdot \vec{Y} + P^{1/2} \cdot \vec{Y} + \vec{P}^2 \cdot \vec{Y}, \tag{13}$$

$$\vec{A} = \left[a \;\; b \;\; c\right]^* \; = \; R^+ \cdot P^2 \cdot \vec{F}. \tag{14}$$

В выражениях (13—14) приняты следующие обозначения: E — единичная матрица, R^+ — псевдообратная по отношению к R матрица. Для решения идентификационной задачи изображение решения $\vec{Y}$ предполагается известным. В следующем разделе рассмотрим программу решения прямой и обратной задач в среде системы Mathematica® с соответствующими комментариями.

Иллюстративный пример. Задано уравнение (9) при правой части следующего вида:

$$f(t) = \begin{cases} 8, (0 \le t < 1) \\ 0, (t > 0) \end{cases} \tag{15}$$

и следующих отсчетах решения, осредненных по 30 подинтервалам в диапазоне изменения аргумента $(0 \le t < 30)$:

```
{0.91358, 4.97345, 7.44432, 7.16411, 4.79545, 1.4063, -1.83798, -4.01785,
 -4.67991, -3.88737, -2.11353, -0.035339, 1.69677, 2.64222, 2.66199, 1.90771,
 0.728613, -0.462671, -1.31999, -1.65229, -1.45247, -0.868268, -0.133333,
 0.514743, 0.903695, 0.965236, 0.737152, 0.334413, -0.0970842, -0.427875}
```

Необходимо оценить значения коэффициентов уравнения и получить аппроксимационное решение уравнения (10).

Программа решения прямой и обратной задач

- Задание шага разбиения аргумента и порядка базисной системы функций

```
m = 30; h = 1.0;
```

- Задание базисной системы функций

```
v[i_, h_, t_] := If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0];
V = Table[v[i, h, t], {i, m}];
```

- Задание вида операционной матрицы интегрирования в системе базисных функций V

$$\mathbf{H}[\beta\_,\, h\_,\, m\_] :=$$
$$\frac{h^{\beta}}{\mathbf{Gamma}[\beta + 2]} *$$
$$\mathbf{Table}\Big[\mathbf{Which}\Big[i < j,\, 0,\, i == j,\, 1,\, i > j,$$
$$(i - j + 1)^{\beta+1} - 2\,(i - j)^{\beta+1} + (i - j - 1)^{\beta+1}\Big],\, \{i,\, m\},\, \{j,\, m\}\Big];$$

- Определение операционных матриц интегрирования необходимых порядков

$$\mathbf{P}_{05} = \mathbf{H}[0.5,\, h,\, m];\ \mathbf{P}_{20} = \mathbf{H}[2.0,\, h,\, m];$$

- Нахождение изображения правой части уравнения (10)

$$\mathbf{f} := \mathbf{If}\Big[0 \le t < 1,\, 4\,t^2,\, 8\,t - 4\Big];$$
$$\mathbf{F} := \mathbf{Table}\Big[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f\, dt,\, \{i,\, m\}\Big];$$

- Решение прямой задачи в операционной области

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Inverse}[a * \mathbf{E1} + b * \mathbf{P}_{05} + c * \mathbf{P}_{20}].\mathbf{F};$$

- Аппроксимация решения прямой задачи

$$\mathbf{ya} = \mathbf{Y}.\mathbf{V};$$

- Определение вида идентификационной матрицы

$$\mathbf{R} = \mathbf{Transpose}[\{\mathbf{E1}.\mathbf{Y},\, \mathbf{P}_{05}.\mathbf{Y},\, \mathbf{P}_{20}.\mathbf{Y}\}];$$

- Решение обратной задачи (параметрической идентификации)

$$\mathbf{A} = \mathbf{PseudoInverse}[\mathbf{R}].\mathbf{F}$$
$$\vec{A} = \{1,\ 0.5,\ 0.5\};$$

- Задание новых значений параметров прямой задачи

$$\mathbf{m} = 300;\ \mathbf{h} = 0.1;\ \mathbf{a} = 1;\ \mathbf{b} = 0.5;\ \mathbf{c} = 0.5;$$

- Визуализация аппроксимационного решения прямой задачи

$$\mathbf{Plot}[\mathbf{Y}.\mathbf{V},\, \{t,\, 0,\, 30\}]$$

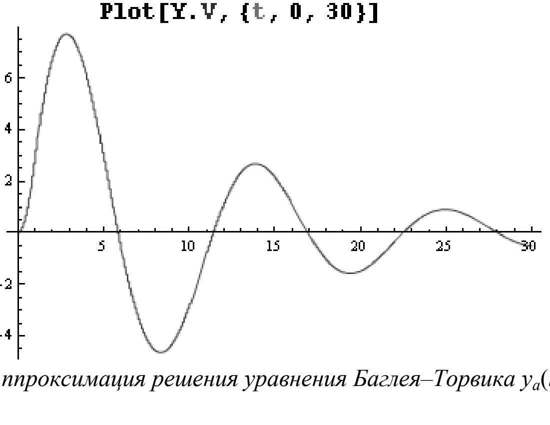

Рис. 1. *Аппроксимация решения уравнения Баглея–Торвика* $y_a(t)$.

Заключение. В рассмотренном иллюстративном примере не приводятся численные результаты решения прямой задачи ввиду их громоздкости. Рассмотренный подход может быть использован для нахождения параметров математических моделей исследуемых динамических систем на основе данных экспериментальных исследований.

Список использованной литературы:

1. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. — К. : НАН Украины, 2008. — 256 с.
2. Васильев А. В. Метод численного решения линейных дифференциальных уравнений с производными нецелого порядка по Капуто и с переменными коэффициентами / А. В. Васильев // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський, 2009. — Вип. 2. — С. 3—14.
3. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego: Academic Press. — 1999. — 340 p.
4. Wolfram S. The Mathematica Book / S. Wolfram. — Champain, Il: Wolfram Media & Cambridge University Press. — 1999. — 1470 p.

The application of S-transform operational method for approximate solution of linear differential equations with derivatives of integer and non-integer order has been considered. S-transform method also was applied to parametric identification problem for above equations based on given response function. Computer experiment connected with solution of direct and inverse problems for Bagley-Torvik equation was described. Computations were fulfilled in Mathematica® program area.

Key words: *signal approximation, fractional calculus, parametric identification, dynamical system modeling, operational analysis methods.*

Отримано 15.06.10