УДК 519.6

А. П. Громик, викладач
Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам’янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ У ВИГЛЯДІ КІЛЬЧАСТОГО СЕКТОРА

У статті методом інтегральних перетворень розв’язано задачу математичного моделювання нестаціонарних температурних полів в тонких циліндрично-ізотропних пластинах у вигляді кільчастого сектора. Одержано точні аналітичні розв’язки алгоритмічного характеру, зручні для якісного аналізу та числових розрахунків на ЕОМ. Розглянуто випадки симетрії та асиметрії задачі теплопровідності відносно серединної площини пластини з урахуванням поведінки коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь пластини.

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, інтегральні перетворення, головні розв’язки.*

Вступ. Проблеми математичного моделювання реальних фізичних процесів, зокрема процесів теплопереносу в тонких пластинах та масивних тілах у декартовій та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [1—5]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв’язків математичних моделей процесів теплопереносу в тонких пластинах різної геометричної форми присвячено роботи автора [6—9]. У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв’язки математичних моделей нестаціонарних процесів теплопереносу (початково-крайових задач) для тонких циліндрично-ізотропних пластин у вигляді кільчастого сектора.

Основна частина. I. Задача математичного моделювання нестаціонарного теплопереносу в тонкій циліндрично-ізотропної пластині у вигляді кільчастого сектора, через бічні поверхні $z = \pm\delta$ якої відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона, в припущеннях, що:

a) термопружні характеристики пластини не залежать від температури;
b) пластина підігрівається неперервно розподіленими джерелами тепла;

c) через поверхні $r = R_0$, $r = R$ (або $r = R_0$ або $r = R$) відбувається теплообмін за законом Ньютона або ці поверхні підтримуються при заданому тепловому режимі чи піддаються дії теплового потоку;
d) задача теплопровідності симетрична відносно серединної площини пластини і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z = \pm\delta$ пластини рівні, зводиться до побудови обмеженого в області

$$\Pi = \left\{\left(\tau, r, \varphi\right): 0 < \tau < \infty,\ r \in \left(R_0, R\right), R_0 > 0, R < \infty, \varphi \in \left(0, \varphi_0\right), \varphi_0 < 2\pi\right\}$$

розв’язку рівняння теплопровідності [5]

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)T + \chi^2 T = f\left(\tau, r, \varphi\right) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$T\left(\tau, r, \varphi\right)\Big|_{\tau=0} = g\left(r, \varphi\right), \tag{2}$$

крайовими умовами на радіальних поверхнях

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + \beta_1 h_{r1}\right)T\Big|_{r=R_0} &= h_{r1} t_1^c\left(\tau, \varphi\right) \equiv \psi_1\left(\tau, \varphi\right), \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \beta_2 h_{r2}\right)T\Big|_{r=R} &= h_{r2} t_2^c\left(\tau, \varphi\right) \equiv \psi_2\left(\tau, \varphi\right) \end{aligned} \tag{3}$$

та одними з крайових умов

$$T\Big|_{\varphi=0} = g_1\left(\tau, r\right), T\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_1\left(\tau, r\right), \tag{4}$$

$$T\Big|_{\varphi=0} = g_2\left(\tau, r\right), \frac{\partial T}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_2\left(\tau, r\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_3\left(\tau, r\right), T\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_3\left(\tau, r\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_4\left(\tau, r\right), \frac{\partial T}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_4\left(\tau, r\right) \tag{7}$$

на гранях клина, де $a = \lambda C_v^{-1}$ — коефіцієнт температуропровідності; λ — коефіцієнт теплопровідності; C_v — об’ємна теплоємність; $\chi^2 = 2\alpha_z \Lambda^{-1}$; α_z — коефіцієнт теплообміну з бічних поверхонь $z = \pm\delta$ пластини; $\Lambda = 2\lambda\delta$ — приведений коефіцієнт теплопровідності; 2δ — товщина пластини; $h_{rj} = \alpha_{rj}\lambda^{-1} \geq 0$ — відносні коефіцієнти теплообміну через поверхні $r = R_0$ та $r = R$; α_{rj} — коефіцієнти теплообміну через ці поверхні; $t_j^c\left(\tau, \varphi\right)$ — температура середовища на цих поверхнях;

β_j — коефіцієнти зв'язності крайових умов; $f(\tau, r, \varphi) = \Lambda^{-1}\left(2\alpha_z t_c(\tau, r, \varphi) + W(\tau, r, \varphi)\right)$; $t_c(\tau, r, \varphi)$ — температура середовища, що омиває пластину; $W(\tau, r, \varphi)$ — потужність теплових джерел.

Згідно з [10] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ за правилами:

$$F_{m,ik}\left[f(\varphi)\right] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \tag{8}$$

$$F_{m,ik}^{-1}\left[f_{m,ik}\right] = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} F_{m,ik}\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right] &= -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \left[U_{m,ik}(\varphi_0)\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} - U_{m,ik}(0)\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}\right] - \\ &- \left[f(\varphi_0)\left.\frac{dU_{m,ik}}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} - f(0)\left.\frac{dU_{m,ik}}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}\right] \equiv -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}(f), \end{aligned} \tag{10}$$

де

$$\beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}, U_{m,11}(\varphi) = \sin\frac{\pi m \varphi}{\varphi_0};$$

$$\beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}, U_{m,12}(\varphi) = \sin\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0};$$

$$\beta_{m,21} = \beta_{m,12}\frac{\pi m}{\varphi_0}, U_{m,21}(\varphi) = \cos\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0};$$

$$\beta_{m,22} = \beta_{m,11}, U_{m,22}(\varphi) = \cos\frac{\pi m \varphi}{\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,11}(f) = \frac{\pi m}{\varphi_0}\left[f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0)\right];$$

$$\Phi_{m,12}(f) = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21}(f) = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0);$$

$$\Phi_{m,22}\left(f\right) = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + \left(-1\right)^{m}\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$\varepsilon_0^{ik} = 0,\quad \varepsilon_m^{ik} = 1$ при $ik = 11,12,21,\quad m = 1,2,...;\quad \varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2}, \varepsilon_m^{22} = 1$ при $m = 1,2,...$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$ за правилом (8) внаслідок тотожності (10) крайовим задачам (1)—(3),(4),...,(1)—(3),(7) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області

$$\Pi' = \left\{\left(\tau, r\right); 0 < \tau < \infty; 0 < R_0 < r < R < \infty\right\}$$

розв’язку рівняння теплопровідності В-параболічного типу [11]

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T_{m,ik}}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\beta_{m,ik}^2}{r^2}\right)T_{m,ik} + \chi^2 T_{m,ik} = \Im_{m,ik}\left(\tau, r\right) \tag{11}$$

з початково-крайовими умовами

$$\left.T_{m,ik}\left(\tau, r\right)\right|_{\tau=0} = g_{m,ik}\left(r\right), \tag{12}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} + h_1\right)\left.T_{m,ik}\right|_{r=R_0} = \psi_{1,m,ik}\left(\tau\right),\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + h_2\right)\left.T_{m,ik}\right|_{r=R} = \psi_{2,m,ik}\left(\tau\right), \tag{13}$$

де

$$\Im_{m,ik}\left(\tau, r\right) = f_{m,ik}\left(\tau, r\right) + r^{-2}\Phi_{m,ik}\left(T\right).$$

До задачі (11)—(13) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Ганкеля 2-го роду щодо радіальної змінної r [12]:

$$H_\nu\left[f\left(r\right)\right] = \int_{R_0}^{R} f\left(r\right) f_\nu\left(\gamma_n r, \gamma_n R\right) r dr \equiv f_n, \tag{14}$$

$$H_\nu^{-1}\left[f_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{f_\nu\left(\gamma_n r, \gamma_n R\right)}{\left\|f_\nu\left(\gamma_n r, \gamma_n R\right)\right\|} \equiv f\left(r\right), \tag{15}$$

$$\begin{gathered} H_\nu\left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} f\right] = -\gamma_n^2 f_n + \\ + R_0 f_\nu\left(\gamma_n R_0, \gamma_n R\right)\left.\left(-\frac{df}{dr} + h_1 f\right)\right|_{r=R_0} + \\ + R f_\nu\left(\gamma_n R, \gamma_n R\right)\left.\left(\frac{df}{dr} + h_{21} f\right)\right|_{r=R_0}, \end{gathered} \tag{16}$$

де $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — корені трансцендентного рівняння Бесселя 2-го роду

$$c_{1\nu} f_\nu(\gamma R_0, \gamma R) + \gamma^2 R_0 g_\nu(\gamma R_0, \gamma R) = 0,$$

що утворюють дискретний спектр, $f_\nu(\gamma_n r, \gamma_n R) = c_{2\nu} U_{\nu,0}(\gamma_n r, \gamma_n R) - -\gamma_n^2 R V_{\nu,0}(\gamma_n r, \gamma_n R)$ — відповідна спектральна функція з квадратом норми

$$\left\| f_\nu(\gamma_n r, \gamma_n R) \right\|^2 = \int_{R_0}^{R} f_\nu^2(\gamma_n r, \gamma_n R) r dr,$$

$$U_{\nu,\alpha}(x,y) = J_{\nu,\alpha}(x) N_{\nu,\alpha}(y) - J_{\nu,\alpha}(y) N_{\nu,\alpha}(x),\ c_{1\nu} = \frac{\nu}{R_0} + h_1,$$

$$V_{\nu,\alpha}(x,y) = J_{\nu,\alpha}(x) N_{\nu+1,\alpha+1}(y) - J_{\nu+1,\alpha+1}(y) N_{\nu,\alpha}(x), c_{2\nu} = \frac{\nu}{R} + h_2,$$

$$J_{\nu,\alpha}(x) = x^{-\alpha} J_\nu(x), N_{\nu,\alpha}(x) = x^{-\alpha} N_\nu(x).$$

$$g_m(\gamma_n r, \gamma_n R) = c_{2m} V_{\nu,0}(\gamma_n r, \gamma_n R) + \gamma_n^2 R U_{m+1,1}(\gamma_n r, \gamma_n R),$$

$J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ — функції Бесселя 1-го і 2-го роду ν -го порядку.

Інтегральний оператор H_m за правилом (14) внаслідок тотожності (16) крайовій задачі (11)—(13) ставить у відповідність задачу Коші.

$$\frac{dT_{m,ik,n}}{d\tau} + a\omega^2 T_{m,ik,n} = \Big[\Im_{m,ik,n}(\tau) + \\ + R_0 f_{\beta_{m,ik}}(\gamma_n R_0, \gamma_n R) \psi_{1,m,ik}(\tau) + R f_{\beta_{m,ik}}(\gamma_n R, \gamma_n R) \psi_{2,m,ik}(\tau) \Big], \tag{17}$$

$$T_{m,ik,n}(\tau)\Big|_{\tau=0} = g_{m,ik,n},\ \omega_n^2 = \chi^2 + \gamma_n^2. \tag{18}$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі (17),(18) є функція

$$T_{m,ik,n}(\tau) = e^{-a\omega_n^2 \tau} \tilde{g}_{m,ik} + a\int_0^\tau e^{-a\omega_n^2(\tau - s)} \times \Big[\Im_{m,ik,n}(s) + \\ + R_0 f_m(\gamma_n R_0, \gamma_n R) \psi_{1,m,ik}(s) + R f_m(\gamma_n R, \gamma_n R) \psi_{2,m,ik}(s) \Big] ds. \tag{19}$$

Застосувавши до функції, визначеної формулою (19), обернене перетворення Ганкеля 2-го роду за правилом (15) та обернене скінченне перетворення Фур'є за правилом (9), одержуємо функцію

$$T_{ik}(\tau, r, \varphi) = a\int_0^\tau \int_{R_0}^{R} \int_0^{\varphi_0} G_{ik}(\tau - s, r, \rho, \varphi, \alpha) f(s, \rho, \alpha) \rho d\alpha d\rho ds +$$

$$+a\int_0^{\tau}\int_0^{\varphi_0} W_{ik}^{в}\left(\tau-s,r,\varphi,\alpha\right)\psi_1\left(s,\alpha\right)d\alpha ds+$$
$$+a\int_0^{\tau}\int_0^{\varphi_0} W_{ik}^{з}\left(\tau-s,r,\varphi,\alpha\right)\psi_2\left(s,\alpha\right)d\alpha ds+ \qquad (20)$$
$$+\int_{R_0}^{R}\int_0^{\varphi_0} G_{ik}\left(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha\right)g\left(\rho,\alpha\right)\rho d\alpha d\rho+$$
$$+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R} H_{ik}\left(\tau-s,r,\rho,\varphi\right)\rho^{-1}d\rho ds,$$

яка описує структуру нестаціонарного температурного поля в тонкій циліндрично-ізотропній пластині у вигляді кільчастого сектора.

У формулі (20) беруть участь головні розв’язки:
функція Коші

$$G_{ik}\left(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha\right)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}\left(r,\rho\right)U_{m,ik}\left(\alpha\right)U_{m,ik}\left(\varphi\right), \qquad (21)$$

внутрішня радіальна функція Гріна

$$W_{ik}^{в}\left(\tau,r,\varphi,\alpha\right)=R_0G_{ik}\left(\tau,r,R_0,\varphi,\alpha\right), \qquad (22)$$

зовнішня радіальна функція Гріна

$$W_{ik}^{з}\left(\tau,r,\varphi,\alpha\right)=RG_{ik}\left(\tau,r,R,\varphi,\alpha\right), \qquad (23)$$

та функції

$$H_{ik}\left(\tau,r,\rho,\varphi\right)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}\left(r,\rho\right)\Phi_{m,ik}\left(T\left(\rho\right)\right)U_{m,ik}\left(\varphi\right) \qquad (24)$$

відповідної крайової задачі, де

$$G_{m,ik}\left(r,\rho\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a\gamma_n^2\tau}\frac{f_m\left(\gamma_nr,\gamma_nR\right)f_m\left(\gamma_n\rho,\gamma_nR\right)}{\left\|f_m\left(\gamma_nr,\gamma_nR\right)\right\|^2}. \qquad (25)$$

Проаналізуємо формулу (20) в залежності від типу крайових умов на гранях $\varphi = 0$ і $\varphi = \varphi_0$ пластини.

1^0. Нехай на гранях $\varphi = 0$ та $\varphi = \varphi_0$ задано крайові умови 1-го роду (умови (4)). У цьому випадку

$$H_{11}\left(\tau,r,\rho,\varphi\right)=\frac{2\pi}{\varphi_0^2}\sum_{m=0}^{\infty}m\varepsilon_m^{ik}G_{m,11}\left(r,\rho\right)\left[g_1\left(\rho\right)+\left(-1\right)^{m+1}\omega_1\left(\rho\right)\right]\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}. \qquad (26)$$

Якщо визначити нижню $W^{н}_{\varphi,11}(\tau,r,\rho,\varphi)$ та верхню $W^{в}_{\varphi,11}(\tau,r,\rho,\varphi)$ тангенціальні функції Гріна крайової задачі (1)—(3), (4) то її розв'язком буде функція

$$\begin{aligned} T_{11}(\tau,r,\varphi) &= \int_{R_0}^{R}\int_{0}^{\varphi_0} G_{11}(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha)\, g(\rho,\alpha)\, d\alpha\, d\rho + \\ &+\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R}\int_0^{\varphi_0} G_{11}(\tau-s,r,\rho,\varphi,\alpha)\, f(s,\rho,\alpha)\, d\alpha\, d\rho\, ds + \\ &+a\int_0^{\tau}\int_0^{\varphi_0} W^{в}_{11}(\tau-s,r,\varphi,\alpha)\,\psi_2(s,\alpha)\, d\alpha\, ds + \\ &+a\int_0^{\tau}\int_0^{\varphi_0} W^{з}_{11}(\tau-s,r,\varphi,\alpha)\,\psi_2(s,\alpha)\, d\alpha\, ds + \\ &+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R} [W^{н}_{\varphi,11}(\tau-s,r,\rho,\varphi)\, g_1(s,\rho) + \\ &+W^{в}_{\varphi,11}(\tau-s,r,\rho,\varphi)\,\omega_1(s,\rho)]\rho^{-1} d\rho\, ds, \end{aligned} \tag{27}$$

де

$$W^{н}_{\varphi,11}(\tau,r,\rho,\varphi) = \frac{2\pi}{\varphi_0^2} t^{-a\chi^2\tau} \sum_{m=1}^{\infty} m G_{m,11}(r,\rho) \sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}, \tag{28}$$

$$W^{в}_{\varphi,11}(\tau,r,\rho,\varphi) = \frac{2\pi}{\varphi_0^2} e^{-a\chi^2\tau} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} G_{m,11}(r,\rho) \sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}. \tag{29}$$

2^0. Нехай на грані $\varphi = 0$ задано крайову умову 1-го роду, а на грані $\varphi = \varphi_0$ задано крайову умову 2-го роду (умови (5)). У цьому випадку функції Гріна

$$W^{н}_{\varphi,12}(\tau,r,\rho,\varphi) = \frac{\pi}{\varphi_0^2} e^{-a\chi^2\tau} \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) G_{m,12}(r,\rho) \sin\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}, \tag{30}$$

$$W^{в}_{\varphi,12}(\tau,r,\rho,\varphi) = \frac{2}{\varphi_0^2} e^{-a\chi^2\tau} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m} G_{m,12}(r,\rho) \sin\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}. \tag{31}$$

Функція $T_{12}(\tau,r,\varphi)$ визначається формулою (27) із заміною в головних розв'язках індекса 11 на індекс 12 і функцій g_1,ω_1 на функції g_2,ω_2.

3^0. Нехай на грані $\varphi = 0$ задано крайову умову 2-го роду, а на грані $\varphi = \varphi_0$ задано крайову умову 1-го роду (умови (6)). У цьому випадку функції Гріна

$$W^{н}_{\varphi,21}\left(\tau,r,\rho,\varphi\right) = -\frac{2}{\varphi_0^2}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=1}^{\infty}G_{m,21}\left(r,\rho\right)\cos\frac{\pi\left(2m+1\right)\varphi}{2\varphi_0}, \quad (32)$$

$$W^{в}_{\varphi,21}\left(\tau,r,\rho,\varphi\right) = \frac{\pi}{\varphi_0^2}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-1\right)^m G_{m,21}\left(r,\rho\right)\cos\frac{\pi\left(2m+1\right)\varphi}{2\varphi_0}. \quad (33)$$

Функція $T_{21}\left(\tau,r,\varphi\right)$ визначається формулою (27) із заміною в головних розв'язках індекса 11 на індекс 21 і функцій g_1,ω_1 на функції g_3,ω_3.

4^0. Нехай на гранях $\varphi = 0$ та $\varphi = \varphi_0$ задано крайові умови 2-го роду (умови (7)). У цьому випадку функції Гріна

$$W^{н}_{\varphi,22}\left(\tau,r,\rho,\varphi\right) = -\frac{2}{\varphi_0^2}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{22}G_{m,21}\left(r,\rho\right)\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}, \quad (34)$$

$$W^{в}_{\varphi,22}\left(\tau,r,\rho,\varphi\right) = \frac{2}{\varphi_0^2}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{22}\left(-1\right)^m G_{m,21}\left(r,\rho\right)\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}. \quad (35)$$

Функція $T_{22}\left(\tau,r,\varphi\right)$ також визначається формулою (23) із заміною в головних розв'язках індекса 11 на індекс 22 і функцій g_1,ω_1 на функції g_4,ω_4.

II. Якщо задача теплопровідності несиметрична відносно серединної площини пластини і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z = \pm\delta$ пластини рівні, то нестаціонарне температурне поле визначає скалярна величина [1]

$$t\left(\tau,r,\varphi,z\right) = T\left(\tau,r,\varphi\right) + \frac{z}{\delta}T^*\left(\tau,r,\varphi\right) = T_1\left(\tau,r,\varphi\right) + \frac{z}{\delta}T_2\left(\tau,r,\varphi\right). \quad (36)$$

Функції $T_j\left(\tau,r,\varphi\right)$ є обмеженим в області П розв'язком сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності B-параболічного типу [11]

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T_j}{\partial\tau} - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)T_j + \chi_j^2 T_j = f_j\left(\tau,r,\varphi\right),\; j = 1,2 \quad (37)$$

з початковими умовами

$$T_j\left(\tau,r,\varphi\right)\Big|_{\tau=0} = g_j\left(r,\varphi\right),\;\; j = 1,2, \quad (38)$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+h_1\right)T_j\Big|_{r=R_0}=\psi_{1j}\left(\tau,\varphi\right),\ \left(\frac{\partial}{\partial r}+h_2\right)T_j\Big|_{r=R}=\psi_{2j}\left(\tau,\varphi\right) \quad (39)$$

та одними з крайових умов

$$T_j\Big|_{\varphi=0}=g_{1j}\left(\tau,r\right),\ T_j\Big|_{\varphi=\varphi_0}=\omega_{1j}\left(\tau,r\right), \quad (40)$$

$$T_j\Big|_{\varphi=0}=g_{2j}\left(\tau,r\right),\frac{\partial T_j}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0}=-\omega_{2j}\left(\tau,r\right), \quad (41)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0}=g_{3j}\left(\tau,r\right),T_j\Big|_{\varphi=\varphi_0}=\omega_{3j}\left(\tau,r\right), \quad (42)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0}=g_{4j}\left(\tau,r\right),\frac{\partial T_j}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0}=-\omega_{4j}\left(\tau,r\right) \quad (43)$$

на гранях клина, де

$\chi_1^2=2\alpha_z\Lambda^{-1},\chi_2^2=6\Lambda^{-1}\left(\alpha_z+2r_z^{-1}\right),r_z=2\delta\lambda^{-1}$ — коефіцієнт термоопору, $f_1\left(\tau,r,\varphi\right)=\Lambda^{-1}\left(2\alpha_z t_+^c\left(\tau,r,\varphi\right)+W\left(\tau,r,\varphi\right)\right)$,

$$f_2\left(\tau,r,\varphi\right)=\Lambda^{-1}\left(6\alpha_z t_-^c\left(\tau,r,\varphi\right)+W^*\left(\tau,r,\varphi\right)\right),\ t_\pm^c=\frac{\left(t_c^+\pm t_c^-\right)}{2},$$

$t_c^\pm$ — температура середовища, що омиває поверхні $z=\pm\delta$; $W\left(\tau,r,\varphi\right)$, $W^*\left(\tau,r,\varphi\right)$ — потужності теплових джерел.

Згідно з формулами (20)—(25) одержуємо, що

$$\begin{aligned}T_{ijk}\left(\tau,r,\varphi\right)=&\,a\int_0^\tau\int_{R_0}^R\int_0^{\varphi_0}G_{j,ik}\left(\tau-s,r,\rho,\varphi,\alpha\right)f_j\left(s,\rho,\alpha\right)\rho d\alpha d\rho ds+\\&+a\int_0^\tau\int_0^{\varphi_0}W_{j,ik}^{в}\left(\tau-s,r,\varphi,\alpha\right)\psi_{1j}\left(s,\alpha\right)d\alpha ds+\\&+a\int_0^\tau\int_0^{\varphi_0}W_{j,ik}^{з}\left(\tau-s,r,\varphi,\alpha\right)\psi_{2j}\left(s,\alpha\right)d\alpha ds+\\&+\int_{R_0}^R\int_0^{\varphi_0}G_{j,ik}\left(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha\right)g_j\left(\rho,\alpha\right)\rho d\alpha d\rho+\\&+a\int_0^\tau\int_{R_0}^R H_{j,ik}\left(\tau-s,r,\rho,\varphi\right)\rho^{-1}d\rho ds,\end{aligned} \quad (44)$$

де

$$G_{j,ik}\left(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha\right)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi_j^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}\left(r,\rho\right)U_{m,ik}\left(\alpha\right)U_{m,ik}\left(\varphi\right),\quad(45)$$

$$W_{j,ik}^{в}\left(\tau,r,\varphi,\alpha\right)=R_0G_{j,ik}\left(\tau,r,R_0,\varphi,\alpha\right),\quad(46)$$

$$W_{j,ik}^{з}\left(\tau,r,\varphi,\alpha\right)=RG_{j,ik}\left(\tau,r,R,\varphi,\alpha\right),\quad(47)$$

$$H_{j,ik}\left(\tau,r,\rho,\varphi\right)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi_j^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}\left(r,\rho\right)\Phi_{m,ik}\left(T_j\left(\rho\right)\right)U_{m,ik}\left(\varphi\right),\quad(48)$$

$$G_{m,ik}\left(r,\rho\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a\gamma_n^2\tau}\frac{f_m\left(\gamma_n r,\gamma_n R\right)f_m\left(\gamma_n\rho,\gamma_n R\right)}{\left\|f_m\left(\gamma_n r,\gamma_n R\right)\right\|^2}.\quad(49)$$

Зазначимо, що формули (26)—(35) залишаються вірними для кожного $j=1,2$.

III. Якщо задача теплопровідності несиметрична відносно серединної площини пластини і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z=\pm\delta$ пластини різні, то функції $T_j\left(\tau,r,\varphi\right)$ є обмеженим в області П розв'язком параболічної системи диференціальних рівнянь теплопровідності

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T_1}{\partial\tau}-a\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)T_1+\dfrac{\alpha_+}{C}T_1+\dfrac{\alpha_-}{C}T_2=af_1\left(r,\varphi\right),\\ \dfrac{\partial T_2}{\partial\tau}-a\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)T_2-\dfrac{3}{C}\left(\alpha_++\dfrac{4}{r_z}\right)T_2+\dfrac{3\alpha_-}{C}T_1=af_2\left(r,\varphi\right),\end{cases}\quad(50)$$

з початково-крайовими умовами (38), (39) та одними з крайових умов (40)—(43), де $\alpha_\pm=\alpha_z^+\pm\alpha_z^-$, $\alpha_z^\pm$ — коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z=\pm\delta$ пластини, $C=2\delta c_v$ — теплоємність пластини,

$$f_1\left(\tau,r,\varphi\right)=\Lambda^{-1}\left(\alpha_+t_+^c\left(\tau,r,\varphi\right)+\alpha_-t_-^c\left(\tau,r,\varphi\right)+W\left(\tau,r,\varphi\right)\right),$$

$$f_2\left(\tau,r,\varphi\right)=\Lambda^{-1}\left(3\alpha_+t_-^c\left(\tau,r,\varphi\right)+3\alpha_-t_+^c\left(\tau,r,\varphi\right)+W^*\left(\tau,r,\varphi\right)\right).$$

Інтегральний оператор Фур'є $F_{m,ik}$ мішаним задачам (50), (38), (39), (40)—(50), (38), (39), (43) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області Π' розв'язку системи диференціальних рівнянь теплопровідності В-параболічного типу [11]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{1,m,ik}}{\partial \tau} - a\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\nu_{m,ik}^2}{r^2}\right)T_{1,m,ik} + \\ + \dfrac{\alpha_+}{C}T_{1,m,ik} + \dfrac{\alpha_-}{C}T_{2,m,ik} = a\Im_{1,m,ik}(\tau, r), \\ \dfrac{\partial T_{1,m,ik}}{\partial \tau} - a\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\nu^2}{r^2}\right)T_{2,m,ik} - \\ - \dfrac{3}{C}\left(\alpha_+ + \dfrac{4}{r_z}\right)T_{2,m,ik} - \dfrac{3\alpha_-}{C}T_{1,m,ik} = a\Im_{2,m,ik}(\tau, r) \end{cases} \quad (51)$$

з початково-крайовими умовами

$$T_{j,m,ik}(\tau, r)\Big|_{\tau=0} = g_{j,m,ik}(r);\ j = 1,2, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\partial}{\partial r} + h_1\right)T_{j,m,ik}\Big|_{r=R_0} = \psi_{1j,m,ik}(\tau, \varphi), \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + h_2\right)T_{j,m,ik}\Big|_{r=R} = \psi_{2j,m,ik}(\tau, \varphi), \end{aligned} \quad (53)$$

де

$$\Im_{j,m,ik}(\tau, r) = f_{j,m,ik} + r^{-2}\Phi_{m,ik}(T_{jj});\ j = 1,2.$$

До задачі (52),(53) застосуємо інтегральне перетворення Ганкеля 2-го роду за правилом (14). Внаслідок тотожності (16) одержуємо задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{1,m,ik,n}}{\partial \tau} + \omega_1^2 T_{1,m,ik,n} + \dfrac{\alpha_-}{C}T_{2,m,ik,n} = \\ = a\Re_{1,m,ik,n}(\tau),\ \omega_1^2 = a\gamma_n^2 + \dfrac{\alpha_+}{C} \\ \dfrac{\partial T_{2,m,ik,n}}{\partial \tau} - \dfrac{3\alpha_-}{C}T_{1,m,ik,n} + \omega_2^2 T_{2,m,ik,n} = \\ = a\Re_{2,m,ik,n}(\tau),\ \omega_2^2 = a\gamma_n^2 + \dfrac{3}{C}\left(\alpha_+ + \dfrac{4}{r_z}\right), \end{cases} \quad (54)$$

$$T_{j,m,ik,n}(\tau)\Big|_{\tau=0} = g_{j,m,ik,n},\ j = 1,2, \quad (55)$$

де

$$\Re_{j,m,ik,n}(\tau) = \Im_{j,m,ik,n} + R_0 f_m(\gamma_n R_0, \gamma_n R)\psi_{1j,m,ik}(\tau) + \\ + R f_m(\gamma_n R, \gamma_n R)\psi_{2j,m,ik}(\tau).$$

Позначимо через $\beta_{\pm} = \frac{2}{\Lambda}\left(\alpha_{+} + \frac{3}{r_z}\right) \pm \frac{1}{\Lambda}\sqrt{\left(\alpha_{+} + \frac{6}{r_z}\right)^2 + 3\alpha_{-}^2} > 0.$

Оскільки характеристичне рівняння

$$\Phi(z) \equiv z^2 + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)z + \omega_1^2\omega_2^2 - 3\left(\frac{\alpha_{-}}{C}\right)^2 = 0$$

системи звичайних диференціальних рівнянь (54) має дійсні різні корені $z_{1,2} = -a\left(\gamma_n^2 + \beta_{\pm}^2\right)$, то розв'язуюча матриця (фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші) цієї системи обчислюється за правилом [13]

$$G_n(\tau,) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} e^{\tau z}\begin{bmatrix} z + \omega_1^2 & -\frac{\alpha_{-}}{C} \\ -\frac{3\alpha_{-}}{C} & z + \omega_2^2 \end{bmatrix}\frac{dz}{\Phi(z)} =$$

$$= \frac{e^{-a\tau\gamma_n^2}}{2q_0}\begin{bmatrix} \gamma_0^{+}e^{-a\tau\beta_{-}^2} - \gamma_0^{-}e^{-a\tau\beta_{+}^2} & \frac{\alpha_{-}}{C}\left(e^{-a\tau\beta_{+}^2} - e^{-a\tau\beta_{-}^2}\right) \\ \frac{3\alpha_{-}}{C}\left(e^{-a\tau\beta_{+}^2} - e^{-a\tau\beta_{-}^2}\right) & \gamma_0^{+}e^{-a\tau\beta_{+}^2} + \gamma_0^{-}e^{-a\tau\beta_{-}^2} \end{bmatrix} = e^{-a\tau\gamma_n^2}Q(\tau), \tag{56}$$

де $q_0 = \sqrt{\left[\left(\alpha_{+} + \frac{6}{r_z}\right)^2 + 3\alpha_{-}^2\right]}$, $\gamma_0^{\pm} = q_0 \pm \left(\alpha_{+} + \frac{6}{r_z}\right)$.

Покладемо:

$$T_{m,ik,n}(\tau,) = \begin{bmatrix} T_{1,m,ik,n}(\tau) \\ T_{2,m,ik,n}(\tau) \end{bmatrix},\ g_{m,ik,n} = \begin{bmatrix} g_{1,m,ik,n} \\ g_{2,m,ik,n} \end{bmatrix},\ \psi_{1,m,ik}(\tau) = \begin{bmatrix} \psi_{11,m,ik}(\tau) \\ \psi_{12,m,ik}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\psi_{2,m,ik}(\tau) = \begin{bmatrix} \psi_{21,m,ik}(\tau) \\ \psi_{22,m,ik}(\tau) \end{bmatrix},\ \Re_{m,ik,n}(\tau) = \begin{bmatrix} \Re_{1,m,ik,n}(\tau,) \\ \Re_{2,m,ik,n}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі (54), (55) є вектор-функція

$$T_{m,ik,n}(\tau) = G_n(\tau)g_{m,ik,n} + a\int_0^{\tau} G_n(\tau - s)\Re_{m,ik,n}(s)ds. \tag{57}$$

Повертаючись у формулі (57) до оригіналів, одержуємо вектор-функцію

$$T_{ik}(\tau, r, \varphi) = Q(\tau)\int_{R_0}^{R}\int_0^{\varphi_0} G_{ik}^{*}(\tau, r, \rho, \varphi, \alpha)\, g(\rho, \alpha)\rho d\alpha d\rho +$$

$$+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R}\int_0^{\varphi_0} Q(\tau-s)G_{ik}^{*}(\tau-s,\rho,\varphi,\alpha)f(s,\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho ds+$$

$$+a\int_0^{\tau}\int_0^{\varphi_0} Q(\tau-s)\Big[W_{ik}^{в,*}(\tau-s,r,\varphi,\alpha)\psi_1(s,\alpha)+ \tag{58}$$

$$+W_{ik}^{з,*}(\tau-s,r,\varphi,\alpha)\psi_2(s,\alpha)\Big]d\alpha ds+$$

$$+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R} Q(\tau-s)H_{ik}^{*}(\tau-s,r,\rho,\varphi)\rho^{-1}d\alpha ds,$$

яка описує структуру шуканого нестаціонарного температурного поля в тонкій циліндрично-ізотропної пластині у вигляді кільчастого сектора.

У формулі (58) беруть участь функції:

$$G_{ik}^{*}(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}(r,\rho)U_{m,ik}(\alpha)U_{m,ik}(\varphi), \tag{59}$$

$$W_{ik}^{в,*}(\tau,r,\varphi,\alpha)=R_0G_{ik}^{*}(\tau,r,R_0,\varphi,\alpha), \tag{60}$$

$$W_{ik}^{з,*}(\tau,r,\varphi,\alpha)=RG_{ik}^{*}(\tau,r,R,\varphi,\alpha), \tag{61}$$

$$H_{ik}^{*}(\tau,r,\rho,\varphi)=$$

$$=\begin{bmatrix}H_{1,ik}^{*}(\tau,r,\rho,\varphi)\\ H_{2,ik}^{*}(\tau,r,\rho,\varphi)\end{bmatrix}=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}(r,\rho)\begin{bmatrix}\Phi_{m,ik}(T_1(\rho))\\ \Phi_{m,ik}(T_2(\rho))\end{bmatrix}U_{m,ik}(\varphi). \tag{62}$$

Зазначимо, що:

1) аналіз формул (58) в залежності від типу крайових умов на гранях клина ідентичний до аналізу формули (20) з пункту I;
2) при $\alpha_z^{+}=\alpha_z^{-}$ формули (58) співпадають із формулами (44), а при $\alpha_z^{+}=\alpha_z^{-}, t_c^{+}=t_c^{-}, W^{*}=0, T^{*}=0$ — з формулою (20);
3) випадок зміни φ в межах від φ_1 до φ_2 зводиться до розглянутого нами заміною $\varphi'=\varphi-\varphi_1(\varphi_0\equiv\varphi_2-\varphi_1)$.

Висновки. Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки алгоритмічного характеру математичних моделей нестаціонарного теплопереносу в тонкій циліндрично-ізотропній пластині у вигляді кільчастого сектора з урахуванням симетрії відносно серединної площини пластини та поведінки коефіцієнтів теплообміну через бічні поверхні пластини.

Список використаних джерел:

1. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.

2. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
4. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
5. Подстригач Я. С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1972. — 308 с.
6. Громик А. П. Математичне моделювання нестаціонарних температурних полів в тонкій ізотропній напівсмузі-пластинці / А. П. Громик // Математическое моделирование : сб. науч. тр. НАН Украины. Ин-т математики. — К., 1996. — С. 81—84.
7. Громик А. П. Нестаціонарна крайова задача теорії теплопровідності тонких циліндрично-ізотропних кругових пластин / А. П. Громик, І. М. Конет // Доповіді НАН України. Математика, природознавство, технічні науки. — 1999. — № 10. — С. 16—20.
8. Громик А. П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля у тонких необмежених циліндрично-ізотропних пластинках з круговим отвором / А. П. Громик // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — 2000. — Т. 5, № 3. — С. 123—129.
9. Громик А. П. Математичне моделювання нестаціонарних температурних полів в тонкій циліндрично-ізотропній пластині у вигляді необмеженого кільчастого сектора / А. П. Громик // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — 2005. — Т. 10, № 2. — С. 164—174.
10. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
11. Матійчук М. І. Параболічні сингулярні крайові задачі / М. І. Матійчук. — К. : Ін-т математики НАН України, 1999. — 176 с.
12. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 60 с.
13. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман — М. : Наука, 1964. — 444 с.

In this article by the method of integral transformations the task of mathematical design of the unstationary temperature fields is untied in cylinder-izotrophic plates as an unlimited ring-shaped sector. The exact analytical upshots of algorithmic character are got, comfortable for the high-quality analysis and numerical calculations on COMPUTER. The cases of symmetry and asymmetry of task of heat conductivity are considered in relation to the middle plane of plate taking into account the conduct of coefficients of heat exchange from the lateral surfaces of plate.

Key words: *heart conduction equation, integral transformation, main solutions.*

Отримано 07.03.10