УКД 517.91:532.2

**І. М. Конет*,** д-р фіз.-мат. наук, професор,
**М. П. Ленюк**,** д-р фіз.-мат. наук, професор
*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,
**Національний технічний університет «ХПІ», м. Чернівці

# СКІНЧЕННІ ГІБРИДНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) — БЕССЕЛЯ — ФУР'Є ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Запроваджено скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене на сегменті полярної осі з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (Конторовича-Лєбєдєва) — Бесселя — Фур'є. Одержано інтегральне зображення аналітичного розв'язку відповідних задач статики, квазістатики та динаміки.

**Ключові слова:** *гібридний диференціальний оператор, функції Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, функції впливу, основна тотожність, логічна схема.*

**Вступ**. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1—5]. Одним із ефективних методів побудови точних аналітичних розв'язків таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень. Основні положення теорії скінченних гібридних інтегральних перетворень (СГІП) закладено в роботі [6]. Ця стаття присвячена запровадженню одного з типів СГІП та їх застосуванню при розв'язуванні задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

**Основна частина**. Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_2 = \left\{ r : r \in \left(R_0, R_1\right) \cup \left(R_1, R_2\right) \cup \left(R_2, R_3\right); R_0 > 0, R_3 < \infty \right\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\upsilon,(\alpha)} = \theta\left(r - R_0\right)\theta\left(R_1 - r\right)a_1^2 B_{\alpha_1} + \\ +\theta\left(r - R_1\right)\theta\left(R_2 - r\right)a_2^2 B_{\upsilon,\alpha_2} + \theta\left(r - R_2\right)\theta\left(R_3 - r\right)a_3^2 \frac{d^2}{dr^2}, \tag{1}$$

де $\theta\left(x\right)$ — одинична функція Гевісайда [7].

 

У рівності (1) беруть участь диференціальні оператори Конторовича-Лєбєдєва $B_{\alpha_1} = r^2 d^2/dr^2 + (2\alpha_1+1) r\, d/dr + \alpha_1^2 - \lambda^2 r^2$ [8], Бесселя $B_{\upsilon,\alpha_2} = d^2/dr^2 + (2\alpha_2+1) r^{-1} d/dr - (\upsilon^2 - \alpha_2^2) r^{-2}$ [9] та Фур'є $d^2/dr^2$ [10]; $2\alpha_j + 1 > 0$, $\upsilon \ge \alpha_2$, $\lambda \in (0,\infty)$.

**Означення.** Областю визначення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ назвемо множину $G$ вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\upsilon,\alpha_2}[g_2(r)]; g_3''\}$ неперервна на множині $I_2$;
2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^0 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0, \qquad \left(\alpha_{22}^3 \tfrac{d}{dr} + \beta_{22}^3\right) g_3(r)\Big|_{r=R_3} = 0; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0, \quad j,k = 1,2. \tag{3}$$

Будемо вважати в подальшому, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \ne 0$, $\alpha_{22}^3 \ge 0$, $\beta_{22}^3 \ge 0$, $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$.

Визначимо величини

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{1}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}, \quad \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}}, \quad \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r),v(r)\big) = \int_{R_0}^{R_3} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 dr, \; u\in G, \; v \in G. \tag{4}$$

Для $u \in G$ та $v \in G$ із умов спряження (3) випливає базова тотожність [6]

$$\left[u_k v_k' - u_k' v_k\right]\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[u_{k+1}v_{k+1}' - u_{k+1}' v_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k}, k = 1, 2. \quad (5)$$

Наявність базової тотожності (5) та крайових умов (2) дає можливість одержати рівність

$$\left(M_{\upsilon,(\alpha)}[u], v\right) = \left(u, M_{\upsilon,(\alpha)}[v]\right),$$

яка означає, що ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$ є самоспряженим оператором. Отже, його спектр дійсний. Оскільки $M_{\upsilon,(\alpha)}$ не має на множині $I_2$ особливих точок, то його спектр дискретний [6].

З метою знаходження власних чисел й відповідних їм власних вектор-функцій розглянемо задачу Штурма-Ліувілля: знайти на множині $I_2$ ненульовий розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$\begin{gathered}\left(B_{\alpha_1} + b_1^2\right)V_{\upsilon,(\alpha);1}\left(r,\beta\right) = 0,\, r \in \left(R_0, R_1\right),\\ \left(B_{\upsilon,\alpha_2} + b_2^2\right)V_{\upsilon,(\alpha);2}\left(r,\beta\right) = 0,\, r \in \left(R_1, R_2\right),\\ \left(d^2\big/dr^2 + b_3^2\right)V_{\upsilon,(\alpha);3}\left(r,\beta\right) = 0,\, r \in \left(R_2, R_3\right)\end{gathered} \quad (6)$$

з нульовими крайовими умовами

$$\begin{gathered}\left(\alpha_{11}^0 \, d\big/dr + \beta_{11}^0\right)V_{\upsilon,(\alpha);1}\left(r,\beta\right)\Big|_{r=R_0} = 0,\\ \left(\alpha_{22}^3 \, d\big/dr + \beta_{22}^3\right)V_{\upsilon,(\alpha);3}\left(r,\beta\right)\Big|_{r=R_3} = 0\end{gathered} \quad (7)$$

та однорідними умовами спряження

$$\begin{gathered}\Big[\left(\alpha_{j1}^k \, d\big/dr + \beta_{j1}^k\right)V_{\upsilon,(\alpha);k}\left(r,\beta\right) - \\ -\left(\alpha_{j2}^k \, d\big/dr + \beta_{j2}^k\right)V_{\upsilon,(\alpha);k+1}\left(r,\beta\right)\Big]\Big|_{r=R_k} = 0,\, j,k = 1,2,\end{gathered} \quad (8)$$

де $b_j \equiv b_j(\beta) = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,3}$; $\beta$ — спектральний параметр, а $V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta\right) = \left\{V_{\upsilon,(\alpha);1}\left(r,\beta\right); V_{\upsilon,(\alpha);2}\left(r,\beta\right); V_{\upsilon,(\alpha);3}\left(r,\beta\right)\right\}$ — відповідна йому спектральна вектор-функція.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $\left(B_{\alpha_1} + b_1^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = C_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_1\right)$ та $v_2 = D_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_1\right)$ [8]; для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\upsilon,\alpha_2} + b_2^2\right)v = 0$ — функції

Бесселя $v_1 = J_{\upsilon,\alpha_2}(b_2 r)$ та $v_2 = N_{\upsilon,\alpha_2}(b_2 r)$ [9]; для диференціального рівняння Фур'є $\left(d^2/dr^2 + b_3^2\right)v = 0$ — тригонометричні функції $v_1 = \cos b_3 r$ та $v_2 = \sin b_3 r$ [10].

Якщо покласти

$$\begin{aligned} V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta) &= A_1 C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1) + B_1 D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1),\ r \in (R_0, R_1), \\ V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta) &= A_2 J_{\upsilon,\alpha_2}(b_2 r) + B_2 N_{\upsilon,\alpha_2}(b_2 r),\ r \in (R_1, R_2)\ , \\ V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta) &= A_3 \cos b_3 r + B_3 \sin b_3 r,\ r \in (R_2, R_3), \end{aligned} \qquad (9)$$

то крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення величин $A_j$, $B_j$ $(j = \overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему рівнянь

$$\begin{gathered} X^{01}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1) A_1 + X^{21}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1) B_1 = 0, \\ X^{11}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1) A_1 + X^{12}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1) B_1 - \\ -u^{11}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(b_2 R_1) A_2 - u^{12}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(b_2 R_1) B_2 = 0, \\ \upsilon^{21}_{\upsilon,\alpha_2;\varphi 1}(\beta_2 \mathrm{P}_2) \mathrm{A}_2 + \upsilon^{22}_{\upsilon,\alpha_2;\varphi 1}(\beta_2 \mathrm{P}_2) \mathrm{B}_2 - \\ -\varpi^{21}_{\varphi 2}(\beta_3 \mathrm{P}_2) \mathrm{A}_3 - \varpi^{22}_{\varphi 2}(\beta_3 \mathrm{P}_2) \mathrm{B}_3 = 0,\ \varphi = 1,2 \\ v^{31}_{22}(b_3 R_3) A_3 + v^{32}_{22}(b_3 R_3) B_3 = 0. \end{gathered} \qquad (10)$$

Однорідна алгебраїчна система рівнянь (10) має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю [11]:

$$\begin{aligned} &\delta_{\upsilon,(\alpha)}(\beta) \equiv \delta_{22}(b_3 R_2, b_3 R_3) A_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta) - \delta_{12}(b_3 R_2, b_3 R_3) A_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta) = \\ &= \delta_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1) B_{\upsilon,\alpha_2;2}(\beta) - \delta_{\alpha_1;21}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1) B_{\upsilon,\alpha_2;1}(\beta) = 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

У рівності (11) беруть участь функції:

$$\begin{gathered} \delta_{\alpha_1;j1}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1) = X^{01}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1) X^{12}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1) - \\ -X^{02}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1) X^{11}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1), \\ \delta_{\upsilon,\alpha_2}(b_2 R_1, b_2 R_2) = u^{11}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(b_2 R_1) u^{22}_{\upsilon,\alpha_2;k1}(b_2 R_2) - \\ -u^{12}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(b_2 R_1) u^{21}_{\upsilon,\alpha_2;k1}(b_2 R_2),\ j,k = 1,2, \\ \delta_{j2}(b_3 R_2, b_3 R_3) = v^{21}_{j2}(b_3 R_2) v^{32}_{22}(b_3 R_3) - v^{22}_{j2}(b_3 R_2) v^{31}_{22}(b_3 R_3), \\ A_{\upsilon,(\alpha);j} = \delta_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1) \delta_{\upsilon,\alpha_2;2j}(b_2 R_1, b_2 R_2) - \\ -\delta_{\alpha_1;21}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1) \delta_{\upsilon,\alpha_2;1j}(b_2 R_1, b_2 R_2), \end{gathered}$$

$$B_{\upsilon,(\alpha);j}\left(\beta\right)=\delta_{\upsilon,\alpha_2;j1}\left(b_2R_1,b_2R_2\right)\delta_{22}\left(b_3R_2,b_3R_3\right)-$$
$$-\delta_{\upsilon,\alpha_2;j2}\left(b_2R_1,b_2R_2\right)\delta_{12}\left(b_3R_2,b_3R_3\right).$$

Корінь $\beta_n$ трансцендентного рівняння (11) підставимо в систему (10) й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. Якщо вибрати $A_1=-A_0X^{02}_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0,b_{1n}\right)$, $B_1=A_0X^{01}_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0,b_{1n}\right)$, де величина $A_0$ підлягає визначенню, то перше рівняння системи (10) стає тотожністю; $b_{jn}=\left(\beta_n^2+k_j^2\right)^{1/2}a_j^{-1}$, $k_j^2\geq 0$, $j=\overline{1,3}$.

Розглянемо стосовно $A_2$, $B_2$ алгебраїчну систему рівнянь

$$u^{11}_{\upsilon,\alpha_2;j2}\left(b_{2n}R_1\right)A_2+u^{12}_{\upsilon,\alpha_2;j2}\left(b_{2n}R_1\right)B_2=$$
$$=A_0\delta_{\alpha_1;j1}\left(\lambda R_0,\lambda R_1,b_{1n}\right),\ j=1,2. \tag{12}$$

Визначник алгебраїчної системи (12)

$$q_{\upsilon,\alpha_2}\left(\beta_n\right)\equiv u^{11}_{\upsilon,\alpha_2;12}\left(b_{2n}R_1\right)u^{12}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(b_{2n}R_1\right)-$$
$$-u^{11}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(b_{2n}R_1\right)u^{12}_{\upsilon,\alpha_2;12}\left(b_{2n}R_1\right)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{b_{2n}^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}\neq 0.$$

Отже, алгебраїчна система (12) має єдиний розв'язок [11]:

$$A_2=A_0\left[q_{\upsilon,\alpha_2}\left(\beta_n\right)\right]^{-1}\left[\delta_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0,\lambda R_1,b_{1n}\right)u^{12}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(b_{2n}R_1\right)-\right.$$
$$\left.-\delta_{\alpha_1;21}\left(\lambda R_0,\lambda R_1,b_{1n}\right)u^{12}_{\upsilon,\alpha_2;12}\left(b_{2n}R_1\right)\right],$$
$$B_2=A_0\left[q_{\upsilon,\alpha_2}\left(\beta_n\right)\right]^{-1}\left[\delta_{\alpha_1;21}\left(\lambda R_0,\lambda R_1,b_{1n}\right)u^{11}_{\upsilon,\alpha_2;12}\left(b_{2n}R_1\right)-\right.$$
$$\left.-\delta_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0,\lambda R_1,b_{1n}\right)u^{11}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(b_{2n}R_1\right)\right]. \tag{13}$$

При відомих $A_2$, $B_2$ розглянемо алгебраїчну систему рівнянь стосовно $A_3$, $B_3$:

$$v^{21}_{j2}\left(b_{3n}R_2\right)A_3+v^{22}_{j2}\left(b_{3n}R_2\right)B_3=-A_0\left[q_{\upsilon,\alpha_2}\left(\beta_n\right)\right]^{-1}A_{\upsilon,(\alpha);j}\left(\beta_n\right). \tag{14}$$

Визначник алгебраїчної системи (14)

$$v^{21}_{12}\left(b_{3n}R_2\right)v^{22}_{22}\left(b_{3n}R_2\right)-v^{21}_{22}\left(b_{3n}R_2\right)v^{22}_{12}\left(b_{3n}R_2\right)=c_{22}b_{3n}\neq 0.$$

Отже, система (14) має єдиний розв'язок [11]:

$$A_3=A_{\upsilon,(\alpha);2}\left(\beta_n\right)v^{22}_{12}\left(b_{3n}R_2\right)-A_{\upsilon,(\alpha);1}\left(\beta_n\right)v^{22}_{22}\left(b_{3n}R_2\right)\equiv\omega_{\upsilon,(\alpha);2}\left(\beta_n\right),$$
$$B_3=A_{\upsilon,(\alpha);1}\left(\beta_n\right)v^{21}_{22}\left(b_{3n}R_2\right)-A_{\upsilon,(\alpha);2}\left(\beta_n\right)v^{21}_{12}\left(b_{3n}R_2\right)\equiv-\omega_{\upsilon,(\alpha);1}\left(\beta_n\right). \tag{15}$$

Ми прийняли, що $A_0=c_{22}b_{3n}q_{\upsilon,\alpha_2}(\beta_n)$, $(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2)$.

Підставивши визначені величини $A_j$, $B_j$ згідно формул (13) та (15) у рівності (9), отримуємо функції:

$$
\begin{gathered}
V_{\upsilon,(\alpha);1}\left(r,\beta_n\right)=c_{22}b_3q_{\upsilon,\alpha_2}\left(\beta_n\right)\left[X^{01}_{\alpha_{1;11}}\left(\lambda R_0,b_{1n}\right)D_{\alpha_1}\left(\lambda r,b_{1n}\right)-\right.\\
\left.-X^{02}_{\alpha_{1;11}}\left(\lambda R_0,b_{1n}\right)C_{\alpha_1}\left(\lambda r,b_{1n}\right)\right],\\
V_{\upsilon,(\alpha);2}\left(r,\beta_n\right)=c_{22}b_{3n}\left[\delta_{\alpha_1;21}\left(\lambda R_0,\lambda R_1,b_{1n}\right)\psi^1_{\upsilon,\alpha_2;12}\left(b_{2n}R_1,b_{2n}r\right)-\right.\\
\left.-\delta_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0,\lambda R_1,b_{1n}\right)\psi^1_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(b_{2n}R_1,b_{2n}r\right)\right],\\
\psi^1_{\upsilon,\alpha_2;j2}\left(b_{2n}R_1,b_{2n}r\right)=u^{11}_{\upsilon,\alpha_2;j2}\left(b_{2n}R_1\right)N_{\upsilon,\alpha_2}\left(b_{2n}r\right)-\\
-u^{12}_{\upsilon,\alpha_2;j2}\left(b_{2n}R_1\right)J_{\upsilon,\alpha_2}\left(b_{2n}r\right),\ j=1,2,\\
V_{\upsilon,(\alpha);3}\left(r,\beta_n\right)=\omega_{\upsilon,(\alpha);2}\left(\beta_n\right)\cos b_{3n}r-\omega_{\upsilon,(\alpha);1}\left(\beta_n\right)\sin b_{3n}r\ .
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Введемо до розгляду квадрат норми власної функції:

$$
\begin{gathered}
\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2=\int_{R_0}^{R_3}\left[V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right]^2\sigma(r)dr\equiv\\
\equiv\int_{R_0}^{R_1}\left[V_{\upsilon,(\alpha);1}\left(r,\beta_n\right)\right]^2\sigma_1r^{2\alpha_1-1}dr+\int_{R_1}^{R_2}\left[V_{\upsilon,(\alpha);2}\left(r,\beta_n\right)\right]^2\sigma_2r^{2\alpha_2+1}dr+\\
+\int_{R_2}^{R_3}\left[V_{\upsilon,(\alpha);3}\left(r,\beta_n\right)\right]^2\sigma_3dr.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Згідно з роботою [6] справедливі такі теореми.

**Теорема 1** (про дискретний спектр). Корені $\beta_n$ трансцендентного рівняння (11) складають дискретний спектр ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta=0$ й на додатній півосі $\beta>0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

**Теорема 2** (про дискретну функцію). Система власних вектор-функцій $\left\{V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена.

**Теорема 3** (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r)\in G$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині $I_2$ рядом Фур'є за системою $\left\{V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$
g\left(r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3}g\left(\rho\right)V_{\upsilon,(\alpha)}\left(\rho,\beta_n\right)\sigma\left(r\right)d\rho\frac{V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)}{\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}.
\tag{18}
$$

Ряд Фур'є (18) визначає пряме $H_{\upsilon,(\alpha)}$ й обернене $H_{\upsilon,(\alpha)}^{-1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині $I_2$ ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$ [6]:

$$H_{\upsilon,(\alpha)}\left[g(r)\right]=\int\limits_{R_0}^{R_3} g(r)V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)\,dr\equiv\tilde{g}_n, \tag{19}$$

$$H_{\upsilon,(\alpha)}^{-1}\left[\tilde{g}_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n\frac{V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\equiv g(r). \tag{20}$$

В основі застосування запровадженого формулами (19), (20) СГІП до розв'язання відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ знаходиться основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$.

**Теорема 4** (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f=\left\{B_{\alpha_1}\left[g_1(r)\right];B_{\upsilon,\alpha_2}\left[g_2(r)\right];g_3''(r)\right\}$ неперервна на множині $I_2$, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0}=g_0,\quad \left(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3\right)g_3(r)\Big|_{r=R_3}=g_R \tag{21}$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk},\ j,k=1,2, \tag{22}$$

то справедлива основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $M_{\upsilon,(\alpha)}$:

$$\begin{aligned} H_{\upsilon,(\alpha)}\left[M_{\upsilon,(\alpha)}\left[g(r)\right]\right]=&-\beta_n^2\tilde{g}_n-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\tilde{g}_{jn}+\left(-\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)\times\\ &\times\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}a_1^2g_0+\left(\alpha_{22}^3\right)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3g_R+\\ &+\sum_{k=1}^{2}h_k\left[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^k(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

У рівності (23) прийняті позначення:

$$\tilde{g}_{1n}=\int\limits_{R_0}^{R_1}g_1(r)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1r^{2\alpha_1-1}dr,$$

$$\tilde{g}_{2n}=\int\limits_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2r^{2\alpha_2+1}dr,$$

$$\tilde{g}_{3n} = \int\limits_{R_2}^{R_3} g_3(r) V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 dr;$$

$$h_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} a_1^2 c_{11}^{-1}, \;\; h_2 = \sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1} a_2^2 c_{12}^{-1},$$

$$Z_{\upsilon,(\alpha);j2}^{k}(\beta_n) = \left(\alpha_{j2}^{k} \, d\big/dr + \beta_{j2}^{k}\right) V_{\upsilon,(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k}, \; k = 1,2 .$$

Логічну схему застосування запровадженого СГІП покажемо на типових задачах математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

**Задача 1** (статики). Побудувати обмежений в області

$$Д = \{(r,z) : r \in I_2, \, z \in (-\infty, +\infty)\}$$

розв'язок еліптичної системи диференціальних рівнянь [12]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \gamma_1^2 u_1 + B_{\alpha_1}[u_1] = -f_1(r,z), \; r \in (R_0, R_1), \\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 u_2 + B_{\upsilon,\alpha_2}[u_2] = -f_2(r,z), \; r \in (R_1, R_2), \\ &\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \gamma_3^2 u_3 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} = -f_3(r,z), \; r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \tag{24}$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_{11}^{0} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^{0}\right) u_1(r,z)\Big|_{r=R_0} = g_0(z), \\ &\left(\alpha_{22}^{3} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{3}\right) u_3(r,z)\Big|_{r=R_3} = g_R(z) \end{aligned} \tag{25}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^{k}\right) u_k(r,z) - \left(\alpha_{j2}^{k} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^{k}\right) u_{k+1}(r,z)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(z), \tag{26}$$

$$j,k = 1,2.$$

Запишемо систему (24) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + B_{\alpha_1} - \gamma_1^2\right) u_1(r,z) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + B_{\upsilon,\alpha_2} - \gamma_2^2\right) u_2(r,z) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \gamma_3^2\right) u_3(r,z) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(r,z) \\ f_2(r,z) \\ f_3(r,z) \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Інтегральний оператор $H_{\upsilon,(\alpha)}$ згідно правила (19) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{\upsilon,(\alpha)}[...] = \Bigg[ \int_{R_0}^{R_1} \cdots V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta_n)\times$$
$$\times\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr \int_{R_2}^{R_3} \cdots V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 dr \Bigg]. \tag{28}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (28) до системи (27) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (23) маємо крайову задачу: побудувати обмежений на декартовій осі $|z|<\infty$ розв'язок звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{d^2}{dz^2}-(\beta_n^2+\gamma_j^2+k_j^2)\right]\tilde{u}_{jn}(z) = -\tilde{f}_n(z)+$$
$$+\left(-\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0(z)+$$
$$+\left(\alpha_{22}^3\right)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)\sigma_3 g_R(z)+ \tag{29}$$
$$+\sum_{k=1}^{2}h_k\left[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^k(\beta_n)\omega_{2k}(z)-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}(z)\right]\equiv -\tilde{F}_n(z).$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\} = = \gamma_1^2 > 0$. Покладемо всюди $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \ge 0$, $k_3^2 = \gamma_1^2 - -\gamma_3^2 \ge 0$, $\sum_{j=1}^{3}\tilde{u}_{jn} = \tilde{u}_n(z)$. Диференціальне рівняння (29) набуває вигляду

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}-\left(\beta_n^2+\gamma_1^2\right)\right]\tilde{u}_n(z) = -\tilde{F}_n(z). \tag{30}$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком диференціального рівняння (30) є функція

$$\tilde{u}_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\zeta|}}{2\omega_n}\tilde{F}_n(\zeta)d\zeta,\quad \omega_n = \left(\beta_n^2+\gamma_1^2\right)^{1/2}. \tag{31}$$

При цьому функція $\tilde{u}_n(z)$ буде обмежена на $(\pm\infty)$, якщо функція $\tilde{F}_n(z)$ буде мати при $|z|\to\infty$ скінченне граничне значення або $\tilde{F}_n(\pm\infty)=0$.

Оператор $H_{\upsilon,(\alpha)}^{-1}$ згідно правила (20) як обернений до (28) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{\upsilon,(\alpha)}^{-1}[\cdots]=\begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2\right)^{-1} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2\right)^{-1} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2\right)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (32) за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_n(z)\right]$, де функція $\tilde{u}_n(z)$ визначена формулою (31). У результаті низки елементарних перетворень отримуємо єдиний розв'язок еліптичної крайової задачі (24)—(26):

$$u_j(r,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[W_{\upsilon,(\alpha);3j}\left(r,z,\zeta\right)g_R\left(\zeta\right)+W_{\upsilon,(\alpha);1j}\left(r,z,\zeta\right)g_0\left(\zeta\right)\right]d\zeta+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}h_k\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[R_{\upsilon,(\alpha);2k}^{j}\left(r,z,\zeta\right)\omega_{2k}\left(\zeta\right)-R_{\upsilon,(\alpha);1k}^{j}\left(r,z,\zeta\right)\omega_{1k}\left(\zeta\right)\right]d\zeta+ \quad (33)$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{R_{j-1}}^{R_j}H_{\upsilon,(\alpha);jm}\left(r,\rho,z,\zeta\right)f_m\left(\rho,\zeta\right)\sigma_m\varphi_m\left(\rho\right)d\rho d\zeta,\ j=\overline{1,3},$$

де $\varphi_1(\rho)=\rho^{2\alpha_1-1}$, $\varphi_2(\rho)=\rho^{2\alpha_2+1}$, $\varphi_3(\rho)=1$.

У рівності (33) беруть участь головні розв'язки еліптичної крайової задачі (24)—(26):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\upsilon,(\alpha);1j}\left(r,z,\zeta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\zeta|}}{2\omega_n}\times$$
$$\times\frac{V_{\upsilon,(\alpha);1}\left(R_0,\beta_n\right)V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\left(-\alpha_{11}^{0}\right)\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1},\ j=\overline{1,3}; \quad (34)$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{\upsilon,(\alpha);3j}\left(r,z,\zeta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\zeta|}}{2\omega_n}\times$$
$$\times\frac{V_{\upsilon,(\alpha);3}\left(R_3,\beta_n\right)V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\alpha_{22}^{3}\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}\sigma_3,\ j=\overline{1,3}; \quad (35)$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{j}_{\upsilon,(\alpha);1k}\left(r,z,\zeta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}Z^{k}_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta_n)\frac{e^{-\omega_n|z-\zeta|}}{2\omega_n}\times \\ \times\frac{V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2},k=1,2,\ j=\overline{1,3}; \tag{36}$$

$$R^{j}_{\upsilon,(\alpha);2k}(r,z,\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\zeta|}}{2\omega_n}\times \\ \times Z^{k}_{\upsilon,(\alpha);12}\left(\beta_n\right)\frac{V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2},k=1,2,\ j=\overline{1,3}; \tag{37}$$

4) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$H_{\upsilon,(\alpha);jm}\left(r,\rho,z,\zeta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\zeta|}}{2\omega_n}\times \\ \times\frac{V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)V_{\upsilon,(\alpha);m}\left(\rho,\beta_n\right)}{\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2},\ j,m=\overline{1,3}. \tag{38}$$

**Задача 2** (квазістатики). Побудувати обмежений в області $Д_1=\left\{\left(t,r\right):t\in\left(0,\infty\right);r\in I_2=\left(R_0,R_1\right)\cup\left(R_1,R_2\right)\cup\left(R_2,R_3\right);\ \ R_0>0,R_3<\infty\right\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [12]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1^2u_1-a_1^2B_{\alpha_1}\left[u_1\right]=f_1\left(t,r\right),\ r\in\left(R_0,R_1\right),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2u_2-a_2^2B_{\upsilon,\alpha_2}\left[u_2\right]=f_2\left(t,r\right),\ r\in\left(R_1,R_2\right), \tag{39}$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2u_3-a_3^2\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}=f_3\left(t,r\right),\ r\in\left(R_2,R_3\right)$$

з початковими умовами

$$u_j\left(t,r\right)\Big|_{t=0}=g_j\left(r\right),\ j=\overline{1,3},\ r\in\left(R_{j-1},R_j\right), \tag{40}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\,\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)u_1(t,r)\Big|_{r=R_0}=g_0(t),\ \ \left(\alpha_{22}^3\,\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^3\right)u_3(t,r)\Big|_{r=R_3}=g_R \tag{41}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}\right)u_{k}(t,r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}(t,r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=\omega_{jk}(t), \tag{42}$$

$$j,k=1,2.$$

Запишемо систему (39) й початкові умови (40) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2B_{\alpha_1}\right)u_1(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2B_{\upsilon,\alpha_2}\right)u_2(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-a_3^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\end{bmatrix}. \tag{43}$$

Застосуємо до задачі (43) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (28). Внаслідок основної тотожності (23) отримуємо задачу Коші

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{d}{dt}+\gamma_j^2+k_j^2+\beta_n^2\right)\tilde{u}_{jn}(t)=\tilde{f}_n(t)+\\ +\left(-\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}V_{\upsilon,(\alpha);1}\left(R_0,\beta_n\right)g_0(t)+\\ +\left(\alpha_{22}^{3}\right)^{-1}a_3^2\sigma_3V_{\upsilon,(\alpha);3}\left(R_3,\beta_n\right)g_R+\\ +\sum_{k=1}^{2}h_k\left[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^{k}\left(\beta_n\right)\omega_{2k}-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^{k}\left(\beta_n\right)\omega_{1k}\right]\equiv\tilde{F}_n(t),\end{gathered} \tag{44}$$

$$\tilde{u}_n\left(t\right)\big|_{t=0}\equiv\sum_{j=1}^{3}\tilde{u}_{jn}\left(t\right)\big|_{t=0}=\tilde{g}_n. \tag{45}$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}=\gamma_2^2>0$. Покладемо всюди $k_2^2=0$, $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\geq 0$, $k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\geq 0$. Рівняння (44) набуде вигляду

$$\left(\frac{d}{dt}+\beta_n^2+\gamma_2^2\right)\tilde{u}_n(t)=\tilde{F}_n(t). \tag{46}$$

Розв'язком задачі Коші (46), (45) є функція

$$\tilde{u}_n\left(t\right)=e^{-\left(\beta_n^2+\gamma_2^2\right)t}\tilde{g}_n+\int_0^t e^{-\left(\beta_n^2+\gamma_2^2\right)\left(t-\tau\right)}\tilde{F}_n\left(\tau\right)d\tau. \tag{47}$$

Введемо до розгляду головні розв'язки параболічної крайової задачі (39)—(42):

1) породжені неоднорідністю системи (39) функції впливу

$$H_{\upsilon,(\alpha);jk}\left(t,r,\rho\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\beta_n^2+\gamma_2^2\right)t}\frac{V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)V_{\upsilon,(\alpha);k}\left(\rho,\beta_n\right)}{\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}; \tag{48}$$

$$j,k=\overline{1,3},$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\upsilon,(\alpha);1j}\left(t,r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma_2^2)t}\frac{V_{\upsilon,(\alpha);1}\left(R_0,\beta_n\right)V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}; \tag{49}$$

$$j=\overline{1,3},$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{\upsilon,(\alpha);3j}\left(t,r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma_2^2)t}\frac{V_{\upsilon,(\alpha);3}\left(R_3,\beta_n\right)V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\alpha_{22}^3\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}a_3^2\sigma_3; \tag{50}$$

$$j=\overline{1,3},$$

4) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\upsilon,(\alpha);2k}^{j}\left(t,r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\beta_n^2+\gamma_2^2\right)t}Z_{\upsilon,(\alpha);12}^{k}(\beta_n)\frac{V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}; \tag{51}$$

$$k=1,2,\ j=\overline{1,3},$$

$$R_{\upsilon,(\alpha);1k}^{j}\left(t,r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\beta_n^2+\gamma_2^2\right)t}Z_{\upsilon,(\alpha);22}^{k}\left(\beta_n\right)\frac{V_{\upsilon,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}; \tag{52}$$

$$k=1,2,\ j=\overline{1,3}.$$

Застосуємо до матриці-елемента $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (47), за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (32). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного розв'язку параболічної задачі (39)—(42):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\left[W_{\upsilon,(\alpha);1j}\left(t-\tau,r\right)g_0(\tau)+W_{\upsilon,(\alpha);3j}\left(t-\tau,r\right)g_R(\tau)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}H_{\upsilon,(\alpha);j1}\left(t-\tau,r,\rho\right)\left[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)\right]\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t \int_{R_1}^{R_2} H_{\upsilon,(\alpha);j2}\left(t-\tau,r,\rho\right)\left[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)\right]\sigma_2\rho^{2\alpha_2+1}d\rho d\tau + \quad (53)$$

$$+\int_0^t \int_{R_2}^{R_3} H_{\upsilon,(\alpha);j3}\left(t-\tau,r,\rho\right)\left[f_3\left(\tau,\rho\right)+\delta_+\left(\tau\right)g_3\left(\rho\right)\right]\sigma_3 d\rho d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} h_k \int_0^t \left[R^j_{\upsilon,(\alpha);2k}\left(t-\tau,r\right)\omega_{2k}(\tau)-R^j_{\upsilon,(\alpha);1k}\left(t-\tau,r\right)\omega_{1k}(\tau)\right]d\tau, \quad j=\overline{1,3},$$

де $\delta_+(t)$ — дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$ [7].

**Задача 3** (динаміки). Побудувати обмежений в області $Д_1$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу [7]

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\gamma_1^2 u_1-a_1^2 B_{\upsilon,\alpha_1}\left[u_1\right]=f_1\left(t,r\right), r\in\left(R_0,R_1\right),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\gamma_2^2 u_2-a_2^2 B_{\upsilon,\alpha_2}\left[u_2\right]=f_2\left(t,r\right), r\in\left(R_1,R_2\right), \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+\gamma_3^2 u_3-a_3^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}=f_3\left(t,r\right), \quad r\in\left(R_2,R_3\right).$$

з початковими умовами

$$u_j\left(t,r\right)\Big|_{t=0}=\varphi_j(r), \quad \frac{\partial u_j\left(t,r\right)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi_j(r), \quad j=\overline{1,3}, \quad (55)$$

крайовими умовами (41) та умовами спряження (42).

Запишемо систему (54) й початкові умови (55) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1^2-a_1^2 B_{\alpha_1}\right)u_1\left(t,r\right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_2^2-a_2^2 B_{\upsilon,\alpha_2}\right)u_2\left(t,r\right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_3^2-a_3^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_3\left(t,r\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\left(t,r\right) \\ f_2\left(t,r\right) \\ f_3\left(t,r\right) \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$\begin{bmatrix} u_1\left(t,r\right) \\ u_2\left(t,r\right) \\ u_3\left(t,r\right) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \varphi_1\left(r\right) \\ \varphi_2\left(r\right) \\ \varphi_3\left(r\right) \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_1\left(t,r\right) \\ u_2\left(t,r\right) \\ u_3\left(t,r\right) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \psi_1\left(r\right) \\ \psi_2\left(r\right) \\ \psi_3\left(r\right) \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}=$ $=\gamma_3^2>0$ Покладемо всюди $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\geq 0$, $k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=0$. Застосуємо до задачі (56), (57) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (28). Внаслідок основної тотожності (23) маємо задачу Коші

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta_n^2+\gamma_3^2\right)\tilde{u}_n(t)=\tilde{F}_n(t)\,,\ \tilde{u}_n(t)\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}_n,\ \ \frac{d\tilde{u}_n(t)}{dt}\Big|_{t=0}=\tilde{\psi}_n.\quad (58)$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (58) є функція

$$\tilde{u}_n(t)=\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\tilde{\psi}_n+\frac{d}{dt}\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\tilde{\varphi}_n+ +\int_0^t\frac{\sin\omega_n\left(t-\tau\right)}{\omega_n}\tilde{F}_n(\tau)d\tau,\omega_n=\left(\beta_n^2+\gamma_3^2\right)^{1/2}.\quad (59)$$

Застосувавши до матриці-елемента $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (59), за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (32), маємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку розглянутої гіперболічної задачі:

$$u_j\left(t,r\right)=$$
$$=\sum_{m=1}^{3}\int_0^t\int_{R_{m-1}}^{R_m}H_{\upsilon,(\alpha);jm}\left(t-\tau,r,\rho\right)\left[f_m\left(\tau,\rho\right)+\psi_m\left(\rho\right)\delta_+\left(\tau\right)\right]\sigma_m\varphi_m^*\left(\rho\right)d\rho d\tau+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1}^{3}\int_{R_{m-1}}^{R_m}H_{\upsilon,(\alpha);jm}\left(t,r,\rho\right)\varphi_m\left(\rho\right)\sigma_m\varphi_m^*\left(\rho\right)d\rho+\quad (60)$$
$$+\int_0^t\left[W_{\upsilon,(\alpha);1j}\left(t-\tau,r\right)g_0\left(\tau\right)+W_{\upsilon,(\alpha);3j}\left(t-\tau,r\right)g_R\left(\tau\right)\right]d\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}h_k\int_0^t\left[R^j_{\upsilon,(\alpha);2k}\left(t-\tau,r\right)\omega_{2k}\left(\tau\right)-R^j_{\upsilon,(\alpha);1k}\left(t-\tau,r\right)\omega_{1k}\left(\tau\right)\right]d\tau,\ \ j=\overline{1,3}.$$

У рівностях (60) беруть участь функції $\varphi_1^*(r)=r^{2\alpha_1-1}$, $\varphi_2^*(r)=r^{2\alpha_2+1}$, $\varphi_3^*(r)=1$ та головні розв'язки задачі: функції впливу $H_{\upsilon,(\alpha);jm}(t,r,\rho)$, функції Гріна $W_{\upsilon,(\alpha);1j}(t,r)$, $W_{\upsilon,(\alpha);3j}(t,r)$ та функції Гріна $R^j_{\upsilon,(\alpha);ik}(t,r)$, визначені формулами (48)—(52), в яких функція $\exp[-(\beta_n^2+\gamma_2^2)t]$ замінена на функцію $\left(\omega_n^{-1}\sin\omega_n t\right)$, $\omega_n=\sqrt{\beta_n^2+\gamma_3^2}$.

Зауважимо, що наведені задачі статики, квазістатики й динаміки поліпараметричні. Це дає можливість безпосередньо із загальних структур виділяти необхідні практично важливі випадки (у рамках розглянутої моделі).

**Висновки.** Запроваджено гібридне інтегральне перетворення, породжене на сегменті $\left[R_0, R_3\right]$ полярної осі з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (Конторовича-Лєбєдєва) — Бесселя — Фур'є. Одержано інтегральні зображення точних аналітичних розв’язків задач статики, квазістатики та динаміки в кусково-однорідних середовищах.

## Список використаних джерел:


1. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
3. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
4. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.
5. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
6. Комаров Г. М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г. М. Комаров, М. П. Ленюк, В. В. Мороз. — Чернівці : Прут, 2001. — 228 с.
7. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
8. Ленюк М. П., Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. — Чернівці : Прут, 2002. — 280 с.
9. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с.
10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз,1959. — 468 с.
11. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
12. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.



The scinchenne hybrid integral transformation generated on the segment of arctic axis with two points of interface by a hybrid differential operator (Contorovicha-Lebedeva-Besselya-Four'e) is inculcated. The integral image of analytical decision of the proper tasks of statics, cvazistatici and dynamics is got.



**Key words:** *hybrid differential operator, Cauchy functions, main solutions, hybrid integral transform, influence functions, basic identity, logical chart.*

**Отримано:** 3.06.2010