УДК 519.6

І. В. Бейко, д-р техн. наук
Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

УЗАГАЛЬНЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ І УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ У ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

У статті будуються алгоритми для оптимізації керованих граф-операторних систем. Визначено і побудовано узагальнені оптимальні розв'язки задач оптимізації граф-операторних систем складених із підсистем, що описуються алгебраїчними, диференціальними, інтегро-диференціальними та узагальненими операторними рівняннями.

Ключові слова: *математична модель, керована система, граф-операторна система, узагальнені оптимальні розв'язки.*

Вступ. При побудові оптимального керування складними системами часто виникають практичні труднощі, які можуть бути пов'язані з відсутністю математичних моделей керованих процесів, із відсутністю оптимального керування у заданій множині допустимих керувань, із неповнотою даних про причинно-наслідкові залежності у взаємодії між підсистемами керованої системи, а також із технічними проблемами надмірної складності математичних моделей взаємодіючих підсистем, які не дозволяють скористатися наявними методами і алгоритмами побудови оптимальних керувань. Навіть і для класичної задачі відшукання оптимального керування $u:[t_0,T]\to\Omega\subset R^r$, яке максимізує функціонал

$$F(x,u)=\int_{t_0}^{T} h\big(x(t),t\big)\,dt$$

на траєкторіях $x:[t_0,T]\to R^n$ керованої системи

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\big(x(t),u(t),t\big),\ \ t\in\left[t_0,T\right] \tag{1}$$

при заданому початковому значенні $x(t_0)$, обмеженими диференційованими з ліпшицевими похідними функціями $h:R^n\times R\to R$, $f:R^n\times R^r\times R\to R^n$ та обмеженою замкнутою множиною Ω може не існувати оптимального керування у випадку неопуклої множини $\overline{f}\left(x,\Omega,t\right)\triangleq\left\{v\mid v=f\left(x,u,t\right),\ u\in\Omega\right\}$. Для таких випадків у роботі [1] побудовано узагальнені оптимальні керування. У даній роботі узагальнені оптимальні керування будуються для більш складних процесів, що описуються граф-операторними моделями з невідомою математичною моделлю у вигляді системи диференціальних рівнянь (1). Простим прикладом такого процесу є механічний рух перевернутого n-колінного маятника (на жорстких або на пружних стержнях) або механічний рух n фізичних тіл, пов'язаних складними силами й моментами попарної взаємодії. Побудова для таких процесів математичних моделей у вигляді систем диференціальних рівнянь (1) пов'язана з технічними трудношами, які різко зростають із зростанням n. З огляду на це, в даній роботі розвиваються методи побудови оптимальних керувань з використанням граф-операторних моделей. При цьому потреба у побудові математичних моделей у вигляді системи (1) відпадає. Процес побудови комп'ютеризованих граф-опереторних моделей здійснюється без особливих труднощів як для процесів із зосередженими параметрами, так і для складних процесів із розподіленими параметрами (задачі математичної фізики, екології, економіки, державного управління тощо).

Узагальнені оптимальні керування. Узагальнене оптимальне керування системою (1) за критерієм максимізації функціоналу $F\left(x,u\right)=\int\limits_{t_0}^{T} h\left(x(t),t\right)dt$ на траєкторіях $x:\left[t_0,T\right]\to R^n$ керованої системи (1) із неопуклою множиною $\overline{f}\left(x,\Omega,t\right)$ побудоване в роботі [1] як максимізатор $\overline{x}^0$ функціонала $\int\limits_{t_0}^{T} h\left(\overline{x}(t),t\right)dt$ на замкнутій множині $\overline{X}$,

$$\overline{X}\triangleq\left\{\overline{x}\mid\frac{d\overline{x}(t)}{dt}\in co\overline{f}\left(\overline{x}(t),\Omega,t\right),\ t\in[t_0,T]\right\},$$

де через $co\overline{f}\left(x,\Omega,t\right)$ позначено замкнуту опуклу оболонку множини $\overline{f}\left(x,\Omega,t\right)$. Важливою особливістю такого узагальненого розв'язку $\overline{x}^0$ є те, що для кожного числа $\alpha>0$ існує вимірна вектор-функція $u^\alpha:[t_0,T]\to R^r$, для якої розв'язок x^α задачі Коші

$$\frac{dx^\alpha(t)}{dt}=f\left(x^\alpha(t),u^\alpha\left(t\right),t\right),\ t\in[t_0,T],\ x^\alpha(t_0)=x^0,$$

задовольняє нерівність $\max\limits_{t\in[0,T]}\left\|x^\alpha(t)-\overline{x}^0(t)\right\|\le\alpha$. У цьому зв'язку послідовність $\left\{u^{\alpha_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, визначену збіжною послідовністю $\alpha_k>0$,

$\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, називаємо узагальненим розв'язком задачі максимізації функціонала $F(x,u)$ на траєкторіях $x:[t_0,T]\to R^n$ задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t),u\left(t\right),t\right),\ t\in[t_0,T],\ x(t_0)=x^0\in R^n,$$

породженими множиною керувань $u:[t_0,T]\to\Omega\subset R^r$. Таке означення узагальненого розв'язку переноситься і на більш загальні задачі оптимізації, де разом із пошуком оптимальної вектор-функції u потрібно знайти також і оптимальні значення t_0, $x(t_0)$, T, $x(T)$, які для заданих функцій $f, h_i : R^n\times\Omega\times R\to R^n$ та $g_i : R\times R\times R^n\times R^n\to R$, $i=\overline{0,m}$ максимізують функціонал $F_0\left(x,u,t_0,T\right)$ при обмеженнях $F_i\left(x,u,t_0,T\right)\le 0$, $i=\overline{1,m}$, де

$$F_i\left(x,u,t_0,T\right) \triangleq \int\limits_{t_0}^{T} h_i\left(x(t),u(t),t\right)dt + g_i\left(t_0,T,x(t_0),x(T)\right)\le 0 .$$

Відома теорема принципу максимуму стверджує наступне. Якщо $\left(x^0,u^0,t_0^0,T^0\right)$ є оптимальним розв'язком, функції f, h_i, $i=\overline{0,m}$ та їх похідні по x є неперервними, функції g_i, $i=\overline{0,m}$ є неперервно диференційовними, то на нетривіальному розв'язку $\psi^0(t)$, $\lambda_0^0\ge 0$, λ_i^0, $i=\overline{0,m}$, системи

$$\frac{d\psi^0(t)}{dt} = -\psi^0(t)f_x'\left(x^0(t),u^0(t),t\right)+\sum_{i=0}^{m}\lambda_i h_{ix}'\left(x^0(t),u^0(t),t\right),$$

$$\psi^0(t_0^0)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i^0 g_{x(t_0)}'\left(t_0,T,x^0(t_0),x^0(T)\right),$$

$$\psi^0(T^0)=-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i^0 g_{x(T)}'\left(t_0,T,x^0(t_0),x^0(T)\right)$$

оптимальне керування $u^0(t)$ для всіх $t\in[t_0,T]$ є розв'язком локальної задачі оптимізації

$$u^0(t)=\arg\max_{u\in\Omega}\left\{\left(\psi^0, f\left(x^0,u,t\right)\right)-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i^0 h_i\left(x^0,u,t\right)\right\}.$$

Отже, для обчислення керування u^0, яке задовольняє теоремі принципу максимуму, можна скористатися наступним алгоритмом:

1) вибрати довільні початкові числа $\bar{\lambda}_i^0 \geq 0$, $\bar{t}_0$, $\bar{T}$, $\bar{\lambda}_i$, $i = \overline{0,m}$ та довільні вектори $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in R^n$ і обчислити розв’язок узагальненої задачі Коші для системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), u(t), t\right),$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t) f_x'\left(x(t), \bar{u}(t), t\right) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i h_{ix}'\left(x(t), \bar{u}(t), t\right),$$

$$\bar{u}(t) = \arg\max_{u \in \Omega} \left[\left(\psi, f\left(x, u, t\right)\right) - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i h_i\left(x, u, t\right)\right]$$

за початковими даними $x\left(\bar{t}_0\right) = \bar{x}$, $\psi\left(\bar{t}^0\right) = \sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i^0 g_{\bar{x}}'\left(\bar{t}_0, \bar{T}, \bar{x}, \bar{\bar{x}}\right)$;

2) (основний цикл) за допомогою градієнтного методу обчислити мінімізатор $\left(\bar{t}_0, \bar{T}, \bar{x}, \bar{\bar{x}}, \bar{\lambda}^0, \bar{\lambda}\right)$ функції

$$\bar{F}\left(\bar{t}_0, \bar{T}, \bar{x}, \bar{\bar{x}}, \bar{\lambda}^0, \bar{\lambda}\right) \triangleq \left\|\psi\left(\bar{T}\right) - \sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i^0 g_{\bar{x}}'\left(\bar{t}_0, \bar{T}, \bar{x}, \bar{\bar{x}}\right)\right\|^2$$

при обмеженнях

$$\bar{t}_0 < \bar{T},\ \bar{\lambda}^0 \equiv \left(\bar{\lambda}_0^0, \bar{\lambda}_1^0, \ldots, \bar{\lambda}_m^0\right) \geq 0,\ \bar{\lambda} \equiv \left(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m\right)$$

(ефективні чисельні алгоритми для обчислення мінімізатора $\left(\bar{t}_0, \bar{T}, \bar{x}, \bar{\bar{x}}, \bar{\lambda}^0, \bar{\lambda}\right)$ будуються в залежності від вигляду функцій f, h, g та допустимої множини Ω [4—6]).

Інший клас методів обчислення оптимального розв’язку базується на апроксимації шуканих функцій x^0 і u^0 параметричними функціями $\bar{u}(p,t)$ та $\bar{x}(p,t)$ із наступним обчисленням оптимального значення векторного параметра p як мінімізатора функціоналу $F_0\left(\bar{x}(p,\cdot), \bar{u}(p,\cdot), \bar{t}_0(p), \bar{T}(p)\right)$ при обмеженнях $F_i\left(\bar{x}(p,\cdot), \bar{u}(p,\cdot), \bar{t}_0(p), \bar{T}(p)\right) \leq 0$, $i = \overline{1,m}$.

Узагальнений оптимальний розв’язок будується як функція $\bar{x}$ із множини $\bar{X} \triangleq \left\{\bar{x} \mid \frac{d\bar{x}(t)}{dt} \in co\bar{f}\left(\bar{x}(t), \Omega, t\right),\ t \in \left[t_0, T\right]\right\}$, яка максимізує функціонал $\bar{F}_0\left(x, t_0, T\right)$ при обмеженнях $\bar{F}_i\left(x, t_0, T\right) \leq 0$, $i = \overline{1,m}$, де

$$\bar{F}_i\left(x, t_0, T\right) \triangleq \int_{t_0}^{T} \bar{h}_i\left(x(t), t\right) dt + \bar{g}_i\left(t_0, T, x(t_0), x(T)\right) \leq 0.$$

У більш загальних випадках узагальнені функціонали

$$F_i(x,u) \triangleq B_i^0\left(x(t_0), x(T), u, \int_{t_0}^{T} B_i^1\left(\dot{x}(t), x(t), u(t), t,\right.\right.$$

$$\left.\left.\int_{t_0}^{t} B_i^2\left(\dot{x}(s), x(s), u(s), s, \dot{x}(t), x(t), u(t), t\right) ds\right) dt \right).$$

визначаються на траєкторіях узагальнених алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$f\left(x(t_0), u, \dot{x}(t), x(t), u(t), t, \int_{D(t,u,x)} f^1\left(x(s), u(s), s, x(t), u(t), t\right) ds \right) = 0 .$$

Аналогічно формулюються і узгальнені крайові задачі.

Узагальнені крайові задачі та узагальнені оптимальні керування. В узагальнених крайових задачах шукані функції $x : D \to R^n$ і $u : D \to R^r$ є функціями багатьох змінних $(t,s) \in D \subset R \times R^{n_s}$, а обмеження на оптимальні функції задаються узагальненими операторними інтегро-диференціальними рівняннями

$$\overline{f}_{ij}^k\left(t,s,x,u\right) \triangleq f_{ij}^k\left(t,s,u\left(t,s\right), F^{f_{ij}^k}\left(x,t,s\right)\right) = 0, \tag{2}$$

$$(t,s) \in D_j^i(x,u)\ ,\ k = \overline{1, k_{ij}}\ ,$$

та нерівностями

$$\overline{g}_{ij}^l\left(t,s,x,u\right) \triangleq g_{ij}^l\left(t,s,u\left(t,s\right), F^{g_{ij}^l}\left(x,t,s\right)\right) \le (<) 0, \tag{3}$$

$$(t,s) \in D_j^i(x,u)\ ,\ l = \overline{1, l_{ij}}\ ,$$

де f_{ij}^k і g_{ij}^k — задані функції, $D_j^i(x,u) \subset D$ — задані j-параметричні підмножини, $j = \overline{1, m+1}$, $D_0^i(x,u) \triangleq \left\{t_q^i(x,u), s_q^i(x,u)\right\}_{q=1}^{q_i} \subset D$ — задані дискретні підмножини, $i = \overline{1, i_j}$, а $F^{f_{ij}^k}$ і $F^{g_{ij}^k}$ — задані композиції операторів F_1, F_2 і F_3, де F_1 є оператором диференціювання,

$$F_1\left(x,t,s,\alpha,\beta\right) \triangleq \left(x(t,s), \frac{\partial}{\partial t} x(t,s), \frac{\partial}{\partial s} x(t,s), \ldots, \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial t^{\alpha} \partial s^{\beta}} x(t,s) \right),$$

оператор F_2 визначає зв'язки на заданій дискретній множині

$$\Omega(t,s) \triangleq \left\{ t^i(t,s), s^i(t,s), \alpha^i, \beta^i \right\}_{i=1}^{n_\Omega},$$

$$F_2\left(F_1,x,t,s,\Omega\right)\triangleq\Big(F_1\left(x,t+t^1(x,t),s+s^1(x,t),\alpha^1,\beta^1\right),$$
$$F_1\left(x,t+t^2(x,t),s+s^2(x,t),\alpha^2,\beta^2\right),\ldots,$$
$$F_1\left(x,t+t^{n_\Omega}(x,t),s+s^{n_\Omega}(x,t),\alpha^{n_\Omega},\beta^{n_\Omega}\right)\Big)=$$
$$=\Bigg(x\left(t+t^1(t,s),s+s^1(t,s)\right),\ldots,\frac{\partial^{\alpha^1+\beta^1}}{\partial t^{\alpha^1}\partial s^{\beta^1}}x\left(t+t^1(t,s),s+s^1(t,s)\right),$$
$$x\left(t+t^2(t,s),s+s^2(t,s)\right),\ldots,\frac{\partial^{\alpha^2+\beta^2}}{\partial t^{\alpha^2}\partial s^{\beta^2}}x\left(t+t^2(t,s),s+s^2(t,s)\right),\ldots,$$
$$x\left(t+t^{n_\Omega},s+s^{n_\Omega}\right),\frac{\partial}{\partial t}x\left(t+t^{n_\Omega},s+s^{n_\Omega}\right),\ldots,\frac{\partial^{\alpha^{n_\Omega}+\beta^{n_\Omega}}}{\partial t^{\alpha^{n_\Omega}}\partial s^{\beta^{n_\Omega}}}x\left(t+t^{n_\Omega},s+s^{n_\Omega}\right)\Bigg),$$

а F_3 є оператором інтегрування на заданій континуальній множині $\tilde{\Omega}\left(t,s,x,u\right)\subset R\times R^{n_s}$,

$$F_3\left(x,u,t,s,\varphi,\tilde{\Omega}\right)\triangleq\iint\limits_{\tilde{\Omega}(t,s,x,u)}\varphi\Big(t,s,u(t,s),F_1\left(x,t+\tau,s+\sigma,\alpha,\beta\right)\Big)d\tau d\sigma.$$

Отже, у загальному випадку вся наявна різнорідна інформація про причинно-наслідкові залежності описується граф-операторною системою [4], у якої *s*-та підсистема *k*-го вузла

$$A_{ks}\left(x_{ks},z_{ks},u_{ks}\right)=0,\ z_{ks}=\varphi_{ks}(x,u)\in Z_{ks},\ s=\overline{1,N_{ks}},\ k=\overline{1,N_k},$$

яка визначена за частинними функціями $A_{ks}:X_{ks}\times Z_{ks}\times U_{ks}\to W_{A_{ks}}$, описує залежності між станом $x_{ks}\in X_{ks}$ ks-ої підсистеми, її локальними керуваннями $u_{ks}\in U_{ks}$ та впливом $z_{ks}\in Z_{ks}$ на ks-ту підсистему інших підсистем.

Складена із усіх підсистем граф-операторна модель

$$A(x,u)\triangleq\left(A_1(x,u),\ldots,A_{N_k}(x,u)\right)=0,\ x\triangleq\left(x_1,\ldots,x_{N_k}\right),$$
$$x_k\triangleq\left(x_{k1},\ldots,x_{kN_{ks}}\right),\ u\triangleq\left(u_1,\ldots,u_{N_k}\right),\ u_k\triangleq\left(u_{k1},\ldots,u_{kN_{ks}}\right),$$
$$A_s(x,u)\triangleq\Big(A_{1s}\left(x_{s1},\varphi_{1s}(x,u),u_{1s}\right),\ldots,A_{N_ks}\left(x_{N_ks},\varphi_{N_ks}(x,u),u_{N_ks}\right)\Big),$$

разом із «підсистемою спостереження» $v=C\left(x,u\right)$ називається $B\delta$-адекватною на множині $V\times U$, якщо система $A\left(x,u\right)=0,\ C\left(x,u\right)=v$ визначає значення $w\triangleq B\left(x,u\right)$ з точністю δ, тобто для всіх $u\in U$, $v\in V$ виконується нерівність $\left\|w-B(\overline{x},u)\right\|\leq\delta$, де $\overline{x}$ — будь-яка із реально можливих траєкторій модельованої системи в умовах керування u та спостереження $v = C(\bar{x}, u)$.

Отже, якщо граф-операторна модель $A(x,u) = 0$ із підсистемою спостереження $C(x,u) = v$ є $B\delta$-адекватною на множині $V \times U$, то існує функція F , яка за умов $C(x,u) = v$ задовольняє нерівність $\max\limits_{u\in U} \max\limits_{v\in V} \left\| F(v,u) - B(x,u) \right\| \le \delta$. Існування такої функції F забезпечується існуванням розв'язуючого оператора $\Re^\delta : \left(P \times W_A \times W_C \right) \to W_B$, який для частинних функцій $A : (X \times U) \to W_A$, $B : (X \times U) \to W_B$ та $C : (X \times U) \to W_C$ за мірою $\mu : 2^{W_B} \to \mathrm{R}^+$ задовольняє на допустимій множині $M \subset X \times U$ нерівність

$$\max_{x\in P_M(u)} d\left(\Re^\delta, u, M \right) \le \delta,\ P_M(u) \triangleq \left\{ x \in X \mid (x,u) \in M \right\},$$

$$d\left(\Re^\delta, u, M \right) \triangleq \mu\left(\left\{ w \mid w = B(x,u) - \Re^\delta\left(u, A(x,u), C(x,u) \right),\ (x,u) \in M \right\} \right).$$

Теорема 1 [2]**.** Якщо на множині M існує розв'язуючий оператор $\Re^\delta$, то граф-операторна модель є $B\delta$-адекватною для на множині M , $F(v,u) = \Re\left(u, 0, v \right)$ і оптимальне керування $u^* \in D \subset U$, яке на допустимій множині D максимізує функціонал $B(x,u)$ за даними спостережень $C(x,u) = v$, обчислюється як максимізатор значення $F(v,u)$ на множині D .

Умови існування розв'язуючого оператора отримані у роботі [2]. Алгоритми побудови функції F суттєво спрощуються у випадку лінійного по x функціонала

$$B(x,u) \triangleq \sum_{i=1}^{N} (c_i, x_i) + f_{N+1}(u)$$

і лінійних по x підсистем граф-операторної системи. Якщо k-та підсистема, $k = \overline{1,N}$, описується в гільбертових просторах X_k, U_k лінійним по x операторним рівнянням

$$A_{k,k}x_k + A_{k,k-1}x_{k-1} + \ldots + A_{k,1}x_1 + f_k(u) = 0,\ k = 1,2,\ldots,N,$$

то функція F будується за розв'язком $y\left(A, c \right) \triangleq \left(y_N, y_{N-1}, \ldots, y_1 \right)$ системи

$$c_k + \sum_{j=k}^{N} A_{j,k}^* y_k = 0,\ k = N, N-1, \ldots, 1 ,$$

у вигляді $F(u)=\sum_{i=1}^{N}\left(y_i, f_i(u)\right)+f_{n+1}(u)$ і тому оптимальне керування u^*, яке максимізує функціонал $B(x,u)$, обчислюється як максимізатор функціонала $F(u)$ на допустимій множині D. Звідси випливає, що для частинного випадку

$$D \triangleq D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_{\mathrm{N}},\ f_i(u) \equiv f_i(u_i),\ f_{\mathrm{N}+1}(u) \equiv \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} f_i(u_i),\ \ u_i \in D_i\ ,$$

оптимальним керуванням i -ю підсистемою, $i=\overline{1,N}$, є максимізатор

$$u_i^* \triangleq \arg\max_{u_i \in D_i}\left[y(A,c), f_i(u_i)+\overline{f}_i(u)\right].$$

Проте, у випадку нелінійних рівнянь та нерівностей (1), (2) і/або нелінійного функціоналу $B(x,u)$ побудова функції F є надто трудомісткою і тому для чисельної побудови оптимального розв’язку використовують градієнтні методи, а у випадку опуклих функцій – методи узагальнених градієнтів. За допомогою множин $\Omega(\alpha_r)$ тих функцій (x,u), які при $\overline{h}_{ij}^k \triangleq -\overline{f}_{ij}^k$ для всіх $j=\overline{0,m+1}$, $i=\overline{1,i_j}$ задовольняють нерівностям

$$\overline{f}_{ij}^k\left(t,s,x,u\right) \le \alpha_r,\ \overline{h}_{ij}^k\left(t,s,x,u\right) \le \alpha_r,\ (t,s)\in D_j^i(x,u),\ k=\overline{1,k_{ij}}\ ,$$

$$\overline{g}_{ij}^l\left(t,s,x,u\right) \le 0,\ \ (t,s)\in D_j^i(x,u),\ l=\overline{1,l_{ij}}\ ,$$

визначаємо узагальнений розв’язок оптимізаційної задачі як підпослідовність послідовності $\left\{\left(x_r,u_r\right)\right\}_{r=1}^{\infty} \in \Omega\left(\alpha_r\right)$, для якої виконуються нерівності $B\left(x_k,u_k\right) \le \inf\limits_{(x,u)\in\Omega(\alpha_r)} B(x,u)+\alpha_r$ на деякій монотонно спадній послідовності $\alpha_r \to 0$.

Побудова узагальненого розв’язку чисельними методами [4; 5] здійснюється за допомогою обчислення такої послідовності функцій $\left(x_r\left(t,s\right),u_r\left(t,s\right)\right)$ у вкладених множинах $X^{n_x(r)} \subset X^{n_x(r)+1}$, $U^{n_u(r)} \subset U^{n_u(r)+1}$ параметричних функцій

$$\left(x_r\left(t,s\right),u_r\left(t,s\right)\right) \triangleq \left(x_{n_x(r)}\left(p_r,t,s\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,t,s\right)\right) \in X^{n_x(r)} \times U^{n_u(r)}$$

визначених параметрами $p_r \in R^{n_x(r)}$ і $q_r \in R^{n_u(r)}$, що для будь-якого значення $\alpha>0$ знайдеться число r таке, що виконуються нерівності

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{f}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right) \le \alpha\ ,\ k=\overline{1,k_{ij}},$$

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{h}_{ij}^k \left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_k,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_k,\cdot,\cdot\right)\right) \le \alpha \ , k=\overline{1,k_{ij}} \ ,$$

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{g}_{ij}^l \left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_k,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_k,\cdot,\cdot\right)\right) \le 0, \ \ l=\overline{1,l_{ij}} \ ,$$

$$B\left(x_{n_x(r)}\left(p_k,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_k,\cdot,\cdot\right)\right) \le \inf_{(x,u)\in\Omega(\alpha)} B(x,u)+\alpha \ .$$

Теорема 2. Якщо для вибраних послідовностей вкладених множин X^r, U^r, $r=\overline{1,\infty}$, і для опуклих по (p,q) функціоналів $B\left(x_r\left(p,\cdot,\cdot\right),u_r\left(q,\cdot,\cdot\right)\right)$, $\overline{g}_{ij}^k\left(t,s,x_r\left(p,\cdot,\cdot\right),u_r\left(q,\cdot,\cdot\right)\right)$ та лінійних функціоналів $\overline{f}_{ij}^k\left(t,s,x_r\left(p,\cdot,\cdot\right),u_r\left(q,\cdot,\cdot\right)\right), k=\overline{1,k_{ij}}$, для кожного $\alpha>0$ знайдеться число r таке, що множина параметрів $p\in R^r$ і $q\in R^r$, які задовольняють нерівності

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{f}_{ij}^k \left(t,s,x_r\left(p,\cdot,\cdot\right),u_r\left(q,\cdot,\cdot\right)\right) \le \alpha \ , k=\overline{1,k_{ij}} \ ,$$

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{h}_{ij}^k \left(t,s,x_r\left(p,\cdot,\cdot\right),u_r\left(q,\cdot,\cdot\right)\right) \le \alpha \ , k=\overline{1,k_{ij}} \ ,$$

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{g}_{ij}^k \left(t,s,x_r\left(p,\cdot,\cdot\right),u_r\left(q,\cdot,\cdot\right)\right) \le \alpha \ , l=\overline{1,l_{ij}} \ ,$$

$$B\left(x_r\left(p,\cdot,\cdot\right),u_r\left(q,\cdot,\cdot\right)\right) \le \inf_{(x,u)\in\Omega(\alpha)} B(x,u)+\alpha \ ,$$

має відкриту підмножину, то узагальнений оптимальний розв'язок міститься в послідовності $\left\{x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right\}_{r=2}^{\infty}$, що обчислюється за формулами:

$$p_{r+1}=p_r-h_r v_r/\left\|v_r\right\|, \ q_{r+1}=q_r-h_r w_r/\left\|w_r\right\|,$$

$$\left(v_r,w_r\right)=\begin{cases} \overline{\nabla}_{(p,q)}\overline{f}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right), \\ \text{якщо}\,\overline{f}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right)=z, \\ \overline{\nabla}_{(p,q)}\overline{h}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right), \\ \text{якщо } \overline{h}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right)=z, \\ \overline{\nabla}_{(p,q)}\overline{g}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right), \\ \text{якщо } \overline{g}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right)=z, \\ \overline{\nabla}_{(p,q)}B\left(x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right), \\ \text{якщо } \ z\le 0, \end{cases}$$

$$z = \max\left\{ \max_{j=\overline{0,m+1}} \max_{i=\overline{1,i_j}} \max_{k=\overline{1,k_{ij}}} \max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{f}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right),\right.$$

$$\max_{j=\overline{0,m+1}} \max_{i=\overline{1,i_j}} \max_{k=\overline{1,k_{ij}}} \max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{h}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right),$$

$$\left.\max_{j=\overline{0,m+1}} \max_{i=\overline{1,i_j}} \max_{k=\overline{1,k_{ij}}} \max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{g}_{ij}^k\left(t,s,x_{n_x(r)}\left(p_r,\cdot,\cdot\right),u_{n_u(r)}\left(q_r,\cdot,\cdot\right)\right)\right\},$$

$$\lim_{r\to\infty} h_r = 0\,,\ \lim_{r\to\infty} n_x(r) = \infty\,,\ \lim_{r\to\infty} n_u(r) = \infty\,,\ \sum_{r=1}^{\infty} h_r = \infty\,,\ h_r > 0\,.$$

Доведення теореми 2 здійснюється за допомогою встановлення існування для кожного $\alpha > 0$ такого натурального числа $r = r(\alpha)$, для якого функції $x_r(p,\cdot,\cdot)$ і $u_r(q,\cdot,\cdot)$ належать множині $\Omega(\alpha)$.

Висновки. У статті побудовано чисельні методи відшукання узагальнених розв’язків задач оптимального керування складними системами з використанням представленої у граф-операторній моделі інформації про причинно-наслідкові залежності у взаємодії підсистем складної керованої системи. Цим обґрунтована можливість автоматизованого відшукання узагальнених оптимальних розв’язків задач оптимального керування також і в тих випадках, коли відсутня математична модель керованої системи у вигляді явних диференціальних рівнянь.

Список використаних джерел:

1. Бейко І. В. Випукла апроксимація керованого процесу і метод побудови узагальнених оптимальних режимів / І. В. Бейко // Український математичний журнал. — 1973. — Т. XXV, Вип. 3. — С. 343—346.
2. Бейко І. В. Функції оцінювання інформації в теорії оптимальних агрегованих моделей і оптимальних систем / І. В. Бейко // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 43—54.
3. Бейко І. В. Уніфікована методологія розв‘язуючих операторів як новітня інформаційна технологія для відшукання нових знань і прийняття оптимальних рішень (англійською мовою). Proc. "The Information Technology Contribution to the Building of a Safe Regional Environment", AFCEA, Europe Seminar / І. В. Бейко. — К., 1998, С. 44—50.
4. Бейко І. В. Розвиток методів розв’язуючих та асимптотично-розв’язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей / І. В. Бейко // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. — 2002. — Вип. 3. — С. 10—15.
5. Бейко І. В. Методи і алгоритми розв’язування задач оптимізації / І. В. Бейко, Б. М. Бублик, П. М. Зінько. — К. : Вища шк., 1983. — 512 с.
6. Бейко И. В. Численные методы решения задач оптимального управления / И. В. Бейко, М. Ф. Бейко. — К. : Знание, 1968. — С. 44.

In the paper we develop algorithms for control graph-operator systems optimization. The generalized optimal solutions are defined and constructed for graph-operator optimal control problems. The considered graph-operator systems are composed of heterogeneous subsystems, that are described by differential, integral and generalized operator equations.

Key words: *mathematical model, control system, graph-operator system, generalized optimal solutions.*

Отримано 17.10.2010

УДК 338.22.021.4

Ю. В. Білогай, студентка,
Т. А. Дунаєва, канд. фіз.-мат. наук
Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ФОРМУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ТОВАРНОГО ПОРТФЕЛЮ ПІДПРИЄМСТВА НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ОБМЕЖЕНЬ СИСТЕМ

У статті розглянуто основні теоретичні аспекти теорії обмежень систем, зокрема процес прийняття управлінських рішень у формуванні найвигіднішого для підприємства товарного портфелю, сформульовано задачу лінійного програмування на основі показників, які використовує теорія обмежень та порівняно результати, отримані на основі ТОС та АВС.

Ключові слова: *теорія обмежень систем,прийняття управлінських рішень,товарний портфель,максимізація прибутку.*

Постановка проблеми. Будь-яка зміна в економічної ситуації на певному рівні веде за собою різного плану зміни і в управлінні. В наш час, коли рівень реального платоспроможного попиту є недостатнім та нестабільним, а стан економіки характеризують як кризу перевиробництва, все більше менеджерів починають замислюватись над правильністю свого підходу до управління організаціями, що, в свою чергу, призводить до виникнення нових течій, теорій, методів. Однією з нових теорій в управлінні є теорія обмеження систем.

Аналіз останніх досліджень. Теорія обмежень систем була розроблена Е. Голдраттом[1]. Однодумцями та прибічниками даної теорії також є У. Детмер [4], Е. Шрагенхайм [3], Т. Корбетт [2]. В роботах українських економістів огляд теорії обмежень систем наведено у Ю. Плієвої, А. Карпова [5], С. Гвоздьова [6].

Постановка задачі. Поставленим завданням є перегляд основних здобутків теорії обмежень та побудова математичної моделі для