

УДК 532.72:532.546:532.4:519:63

А. П. Власюк, д-р техн. наук,

О. М. Степанченко, ст. викладач.

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ РОЗЧИНЕННЯ СОЛЬОВОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Побудовано математичну модель задачі дифузійного розчинення сольового включення, що омивається фільтраційним потоком підземних вод. Розроблено обчислювальний алгоритм розв'язку відповідної крайової задачі. Чисельний розв'язок отримано методом скінченних різниць з використанням чисельних конформних відображень. Побудовано математичну модель задачі дифузійного розчинення сольового включення в ґрунтовому масиві, що омивається фільтраційним потоком підземних вод. Розроблено обчислювальний алгоритм розв'язку відповідної крайової задачі. Чисельний розв'язок отримано методом скінченних різниць з використанням чисельного методу конформних відображень. На основі проведених чисельних експериментів визначено розподіл концентрації в ґрунтовому масиві та кількість винесених фільтраційним потоком речовин при різних значеннях параметрів.

Ключові слова: *математичне моделювання, математична модель, крайова задача, монотонна різницева схема, метод скінченних різниць, чисельний метод конформних відображень, сольове включення, розчинення, масоперенос, фільтрація.*

1. Вступ

Залягання солей в основах гідротехнічних споруд у вигляді включень призводить до негативних наслідків, а саме: утворення карстових порожнин, зменшення несучої здатності ґрунтів, порушення стійкості споруди та ін., оскільки в процесі фільтрації води вони омиваються фільтраційним потоком, розчиняються і виносяться з ґрунту шляхом масопереносу.

У роботах [1; 2] отримано аналітичний розв'язок задачі винесення солей з основи плоского флютбета. При цьому коефіцієнти рівняння переносу солей відповідним чином усереднені. Робота [3] присвячена чисельному розв'язуванню стаціонарної задачі виносу розчинених речовин з основи гідротехнічної споруди.

У цій статті розглядається побудова математичної моделі та чисельний розв'язок задачі розчинення сольового включення, що омивається потоком підземних вод у випадку залежності компонент кое-

фіцієнта конвективної дифузії від швидкості фільтрації та криволінійності меж області фільтрації.

2. Постановка задачі та її математична модель

Розглянемо процес розчинення солей та інших водорозчинних порід, що залягають у вигляді включення в основі гідротехнічної споруди. В результаті чого відбувається винесення їх фільтраційним потоком, утворення та еволюція карстової порожнини (рис.1).

Будемо вважати ґрунт однорідно-ізотропним відносно фільтраційних і дифузійних властивостей.

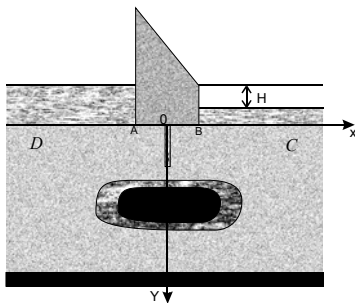


Рис. 1. Утворення і еволюція карстової порожнини в основі гідротехнічної споруди

Утворення карстової порожнини відбувається внаслідок процесу фільтрації води (що є ідеальною нестискуваною рідиною) за законом Дарсі в недеформованому ізотропному ґрунті та розчинення і винесення солей з сольового включення внаслідок масопереносу.

Математичну модель даної задачі в спрощеній постановці в загальноприйнятих позначеннях в ізотермічних умовах опишемо наступною крайовою задачею [11—13]:

- диференціальним рівнянням конвективної дифузії розчинених у воді солей

$$D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_y \frac{\partial c}{\partial y} - \gamma (c - C_*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1)$$

- рівняннями фільтрації підземних вод

$$V_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

при таких крайових умовах:

- а) для п'езометричного напору

$$h|_{AD} = h(0, y) = H_1, \quad h|_{BC} = h(a, y) = H_2, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AB \cup DC} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma_\Phi} = 0; \quad (3)$$

б) для концентрації розчинених солей

$$c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad (4)$$

$$c|_{AD} = c(0, y, t) = \tilde{C}_1(y, t), \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{AB \cup CD} = \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0 \cup y=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{BC} = \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad (6)$$

$$\left[\delta D \frac{\partial c}{\partial n} + (-D + \delta V_n) c \right] \Big|_{\Gamma_\Phi} = -DC_m, \quad (7)$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{C_m S_l} \int_S \left(V_n c - D \frac{\partial c}{\partial n} \right) dS. \quad (8)$$

Тут: $c(x, y, t)$ — концентрація солей в рідкій фазі, \vec{V} — вектор швидкості фільтраційного потоку, $h = \frac{p}{\rho_1 g} \pm y$ — гідростатичний напір, де знак «+» відповідає напрямку осі « OY » вгору, а знак «-» — вниз; p — тиск рідини; ρ_1 — густина фільтраційного розчину; g — прискорення вільного падіння; D — коефіцієнт конвективної дифузії, \vec{n} — нормаль до межі фронту розчинення, Γ_Φ — межа фронту розчинення сольового включення, δ — товщина дифузійного примежевого шару в околі межі фронту розчинення сольового включення. Умови (7), (8) задають крайові умови на межі фронту розчинення сольового включення, зокрема (8) задає кінематичну умову на межі фронту розчинення, l — геометричний параметр, що характеризує сімейство фронтів розчинення, $S(l)$ — площа зони повного розчинення, що заключена між початковим і кінцевим положенням фронту розчинення.

Можна показати на основі робіт [7—9], що при певних вимогах на коефіцієнти рівняння (1) та крайові умови (2)—(6) задача (1)—(8) коректно поставлена.

Для розв'язання крайової задачі (1)—(8) використаємо метод скінченних різниць з використанням чисельних конформних відображень в оберненій постановці та запис вихідної задачі в змінних φ , ψ області комплексного потенціалу з подальшим чисельним розв'язанням перетвореної задачі в змінних φ , ψ даної області [4—6].

3. Постановка задачі фільтрації в фізичній області та її зведення до конформного відображення

Розглянемо постановку задачі фільтрації в фізичній області та її зведення до конформного відображення областей. Для цього запишемо задачу фільтрації рідини в основі гідротехнічної споруди в прямій постановці

$$V_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, V_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (9)$$

$$h|_{AD} = h(0, y) = H_1, h|_{BC} = h(a, y) = H_2, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\Gamma_\Phi} = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{AB \cup DC} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0, y=Q} = 0. \quad (11)$$

Задачу фільтрації (9)—(11) після введення потенціалу фільтрації $\varphi = -kh$ та функції течії $\psi = \psi(x, y)$, існування якої впливає з умови нерозривності потоку, можна записати так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (x, y) \in G_z, \quad (12)$$

$$\varphi|_{AD} = \varphi(0, y) = 0, \quad \varphi|_{BC} = \varphi(a, y) = \varphi_1, \quad (13)$$

$$\psi|_{AB} = \psi(x, 0) = 0, \quad \psi|_{DC} = \psi(x, b) = Q, \quad \psi|_{\Gamma_\Phi} = \psi|_{MM_1KN_1N} = Q_0 \quad (14)$$

Тут: Q — повна фільтраційна витрата рідини, яку потрібно знайти в процесі розв’язування даної задачі яка є невідомою; Q_0 — деяка частина фільтраційної витрати, яка теж є невідомою.

Для розв’язку задачі фільтрації та побудови гідродинамічної сітки течії, потрібно знайти комплексний потенціал $\omega = \omega(z)$ або характеристичну функцію $z = z(\omega)$, на основі яких визначаються інші фільтраційні характеристики фільтраційного потоку.

Проведемо в фізичній області від тіла, що розчиняється, нескінченно тонкий розріз по лінії течії (рис. 2).

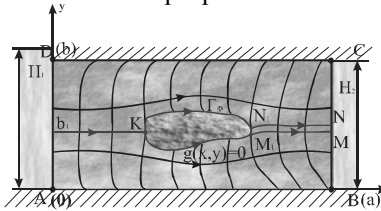


Рис. 2. Область фільтрації з тонким розрізом

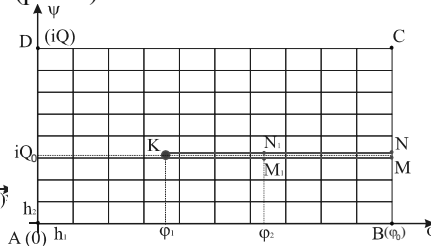


Рис. 3. Параметричний прямокутник з тонким розрізом в області комплексного потенціалу

В області комплексного потенціалу йому відповідає відрізок MM_1 (рис. 3). Зауважимо, що M_1KN_1 відповідає межі сольового включення, а N_1N і M_1M — нескінченно тонкому розрізу. Цей параметричний прямокутник співпадає в даному випадку з областю комплексного потенціалу в площині (φ, ψ) (потенціал — функція течії).

4. Математична модель задачі фільтрації в оберненій постановці

Розглянемо математичну модель задачі фільтрації в оберненій постановці. Для побудови різницевої гідродинамічної сітки фільтраційного потоку в безрозмірних змінних області комплексного потенціалу $\omega = \varphi + i\psi$, де ψ — функція течії, сформулюємо обернену задачу фільтрації до (13), (15):

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}; \quad (15)$$

$$g_1(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0 \text{ або } y(\varphi, 0) = 0, \quad \varphi \in (0, \varphi_0), \quad (16)$$

$$g_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0 \text{ або } y(\varphi, Q) = 0, \quad \varphi \in (0, \varphi_0), \quad (17)$$

$$g_3(x(0, \psi), y(0, \psi)) = 0 \text{ або } y(0, \psi) = 0, \quad \psi \in (0, Q), \quad (18)$$

$$g_4(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) = 0 \text{ або } y(\varphi_0, \psi) = 0, \quad \psi \in (0, Q), \quad (19)$$

$$g_0(x, y) = 0; \quad (x, y) \in \Gamma_0(M_1KN_1); \quad (20)$$

$$x(\varphi, Q_1 - 0) = x(\varphi, Q_1 + 0), \quad y(\varphi, Q_1 - 0) = y(\varphi, Q_1 + 0); \\ \varphi \in \gamma_{12}, (x, y) \in MM_1 \cup NN_1. \quad (21)$$

На $KN_1 \cup KM_1$ $x(\varphi, \psi)$ і $y(\varphi, \psi)$ задані або задовольняють деякому рівнянню, а на $MM_1 \cup NN_1$ — умови "вільного" розрізу.

Тут: $g_0(x, y) = 0$ — рівняння контуру сольового включення, $g_i(x, y) = 0$, $i = \overline{1, 4}$ — рівняння контурів Γ_i , $i = \overline{1, 4}$ — границь області фільтрації G_ω .

5. Запис математичної моделі задачі масопереносу в змінних φ , ψ області комплексного потенціалу

Запишемо математичну модель задачі масопереносу в змінних φ , ψ області комплексного потенціалу, використавши методику переходу до змінних φ , ψ області комплексного потенціалу [4—6]. При цьому математична модель (1), (4)—(8) з урахуванням руху межі сольового включення в результаті розчинення прийме вигляд

$$V^2(\varphi, \psi) D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} \right) - V^2(\varphi, \psi) \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \gamma(c - C_*) + \\ + \frac{x_\varphi}{\Im} \left(\frac{\partial c}{\partial \varphi} y_\psi - \frac{\partial c}{\partial \psi} y_\varphi \right) + \frac{y_\varphi}{\Im} \left(\frac{\partial c}{\partial \varphi} x_\psi - \frac{\partial c}{\partial \psi} x_\varphi \right) = \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right)_{(\varphi, \psi)}, \quad (22)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = \tilde{C}_0(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (23)$$

$$c(0, \psi, t) = \tilde{C}_1(\psi, t), \quad (\varphi, \psi) \in \Gamma_3(AD), \quad (24)$$

$$\frac{\partial c(\varphi, 0, t)}{\partial \psi} = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \Gamma_1(AB), \quad (25)$$

$$\frac{\partial c(\varphi, Q_0, t)}{\partial \psi} = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \Gamma_2(CD), \quad (26)$$

$$\frac{\partial c(\varphi_0, \psi, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \Gamma_4(BC). \quad (27)$$

На KM_l та KN_l задаються відповідно умови

$$\frac{\partial c(\varphi, Q_0 - 0, t)}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial c(\varphi, Q_0 + 0, t)}{\partial \psi} = 0, \quad (28)$$

якщо абсолютно непроникне тіло

$$c(\varphi, Q_0 - 0, t) = C_m, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad (29)$$

або

$$c(\varphi, Q_0 + 0, t) = C_m, \quad \left(\mp V \delta \frac{\partial c}{\partial \psi} + c \right) \Big|_{\Gamma_\phi} = C_m, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad (30)$$

де верхній знак відповідає розміщенню розчинної межі вздовж лінії $\psi = Q_0 + 0$, а нижній — $\psi = Q_0 - 0$.

На рухомій межі фронту розчинення маємо

$$\frac{dl_0}{dt} = \frac{1}{C_m \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{V^2(\varphi, Q_0(t))}} \int \left(-D \frac{\partial c}{\partial \psi} \Big|_{\psi=Q_0(t)} \right) d\varphi. \quad (31)$$

6. Чисельний метод розв'язку задачі фільтрації

На основі [4—6], використовуючи розроблений там алгоритм, знайдемо чисельний розв'язок задачі фільтрації в оберненій постановці (15)—(21). Для знаходження чисельного розв'язку задачі (15)—(21) покриємо область розв'язку задачі різницевою сіткою $\omega_{h_1 h_2 \tau} = \{(\varphi_i, \psi_j, t_k)\}$, де $\varphi_i = ih_1$, $i = \overline{0, n}$; $\psi_j = jh_2$, $j = \overline{0, m}$; h_1, h_2 — кроки відповідно по 0φ і 0ψ ; $t_k = k\tau$, τ — крок по часу}. В зв'язку з цим знайдемо: координати внутрішніх вузлів сітки (x_{ij}, y_{ij}) , які є прообразами точок (φ_i, ψ_j) , $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$; координати вузлів «віль-

ного» розрізу (x_{im_1}, y_{im_1}) , $i = \overline{n_1, n_2}$, що є прообразами точок межі Γ_0 сольового включення $g(x, y) = 0$; Q — повну фільтраційну витрату та Q_0 — часткову фільтраційну витрату рідини.

7. Чисельний метод розв'язування крайової задачі масопереносу

Для розв'язку крайової задачі масопереносу (22)—(31) використаємо локально-одновимірний метод О. А. Самарського [10]. У результаті розщеплення крайової задачі (22)—(31), одержуємо дві крайові задачі.

а) Вздовж осі 0φ маємо

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{2V^2(\varphi, \psi)D} (c - C_*) = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{DV^2} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (32)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = \tilde{C}_0(\varphi, \psi), \quad (33)$$

$$c(0, \psi, t) = \tilde{C}_1(\psi, t), \quad \frac{\partial c(\varphi_0, \psi, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad \psi \in (0, Q_0) \cup (Q_0, Q), \quad (34)$$

$$c(\varphi_0, Q_1, t) = C_m, \quad \left(\mp V \delta \frac{\partial c(\varphi_0, Q_0, t)}{\partial \psi} + c(\varphi_0, Q_0, t) \right) \Big|_{\Gamma_\Phi} = C_m. \quad (35)$$

б) Вздовж осі 0ψ маємо:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} - \frac{\gamma}{2DV^2(\varphi, \psi)} (c - C_*) = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{DV^2} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (36)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = \tilde{C}_0(\varphi, \psi), \quad (37)$$

$$\frac{\partial c(\varphi, 0, t)}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial c(\varphi, Q, t)}{\partial \psi} = 0, \quad (38)$$

$$c(\varphi, Q_1 \pm 0, t) = C_m, \quad \text{або} \quad \left(\mp V \delta \frac{\partial c}{\partial \psi} + c \right) \Big|_{\Gamma_\Phi} = C_m, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad (39)$$

$$\frac{dl_0}{dt} = \frac{1}{C_m \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{V^2(\varphi, Q_0(t))}} \int \left(-D \frac{\partial c}{\partial \psi} \Big|_{\psi=Q_0(t)} \right) d\varphi. \quad (40)$$

Для побудови різницевої схеми задачі (31)—(35) використаємо монотонну різницеву схему. В зв'язку з цим, на основі (31) маємо:

$$\chi \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial c}{\partial \varphi} + f_1 = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{DV^2(\varphi, \psi)} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (41)$$

де

$$\chi = \frac{1}{1 + \frac{h_1 |V|}{2D}}, \quad r = \frac{-1}{D}, \quad f_1 = -\frac{\gamma}{2V^2(\varphi, \psi)D}(c - C_*).$$

Тоді монотонна різницева схема для (41) має вигляд

$$\begin{aligned} \chi \frac{C_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + C_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_+ \frac{C_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + \\ + r_- \frac{C_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + f_1 = \frac{\sigma}{DV_{ij}^2} \frac{C_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - C_{ij}^k}{\tau}, \end{aligned} \quad (42)$$

де

$$\begin{aligned} r_+ &= 0,5(r + |r|) = 0,5\left(-\frac{1}{D} + \frac{1}{D}\right) \equiv 0, \\ r_- &= 0,5(r - |r|) = 0,5\left(-\frac{1}{D} - \frac{1}{D}\right) = -\frac{1}{D}, \\ C_{i,j}^0 &= \tilde{C}_0(ih_1, jh_2), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$C_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} = \tilde{C}_1\left(jh_2, \left(k + \frac{1}{2}\right)\tau\right), \quad k = 1, 2, \dots, K_1 - 1, \quad j = \overline{0, m}, \quad (44)$$

$$C_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} = C_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}, \quad C_{i,m}^{k+\frac{1}{2}} = C_m \quad \text{або} \quad V_{ij}\delta \frac{C_{i,m}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i,m-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_2} + C_{i,m}^{k+\frac{1}{2}} = C_m \quad (45)$$

Провівши деякі перетворення (42) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{(\chi - h_1 r_-)\tau}{h_1^2} C_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{2\chi\tau}{h_1^2} + \frac{r_+\tau}{h_1} - \frac{r_-\tau}{h_1} + \frac{\sigma}{DV_{ij}^2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma\tau}{DV_{ij}^2} \right) C_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \\ + \frac{(\chi + h_1 r_+)\tau}{h_1^2} C_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{DV_{ij}^2} \left(\frac{1}{2} \gamma\tau C_* + \sigma \right) C_{ij}^k. \end{aligned} \quad (46)$$

У прогоничному вигляді ця різницева схема матиме такий вигляд:

$$a_y^1 C_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} - d_y^1 C_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + b_y^1 C_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} = -F_1, \quad (47)$$

де

$$a_y^1 = \frac{(\chi - h_1 r_-)\tau}{h_1^2}, \quad d_y^1 = \frac{2\chi\tau}{h_1^2} + \frac{r_+\tau}{h_1} - \frac{r_-\tau}{h_1} + \frac{\sigma}{DV_{ij}^2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma\tau}{DV_{ij}^2},$$

$$b_{ij}^1 = \frac{(\chi + h_1 r_+) \tau}{h_1^2}, \quad F_1 = \frac{1}{DV_{ij}^2} \left(\frac{1}{2} \gamma \tau C_* + \sigma \right) C_{ij}^k.$$

Чисельний розв'язок цієї різницевої схеми знаходимо методом прогонки [10]

$$C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1,j}^1 C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1,j}^1, \quad (48)$$

де

$$\alpha_{i+1,j}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_{i,j}^1 \cdot a_1}, \quad \beta_{i+1,j}^1 = \frac{a_1 \beta_{i,j}^1 + f_1}{c_1 - \alpha_{i,j}^1 \cdot a_1},$$

$$\alpha_{1,j}^1 = 1, \quad \beta_{1,j}^1 = \begin{cases} \tilde{C}_2, & \text{у випадку граничних умов 1-го роду,} \\ 0, & \text{у випадку граничних умов 2-го роду.} \end{cases} \quad (49)$$

Для побудови різницевої схеми задачі (36)—(40) використаємо чисто неявну різницеву схему

$$\frac{\tau}{h_2^2} C_{ij-1}^{k+1} - \left(\frac{2\tau}{h_2^2} + \frac{\sigma}{DV_{ij}^2} \right) C_{ij}^{k+1} + \frac{\tau}{h_2^2} C_{ij+1}^{k+1} = - \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma C_* \tau}{DV_{ij}^2} + \frac{\sigma}{DV_{ij}^2} \right) C_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (50)$$

$$C_{i,j}^0 = \tilde{C}_0(ih_1, jh_2), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}, \quad (51)$$

$$C_{i,1}^{k+1} = C_{i,0}^{k+1}, \quad C_{i,m}^{k+1} = C_{i,m-1}^{k+1}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (52)$$

$$V_{im} \delta \frac{C_{i,m}^{k+1} - C_{i,m-1}^{k+1}}{h_2} + C_{i,m}^{k+1} = C_m. \quad (53)$$

У прогоночному вигляді ця різницева схема матиме такий вигляд:

$$a_{ij}^2 C_{ij-1}^{k+1} - d_{ij}^2 C_{ij}^{k+1} + b_{ij}^2 C_{ij+1}^{k+1} = -F_2, \quad (54)$$

$$a_{ij}^2 = \frac{\tau}{h_2^2}, \quad d_{ij}^2 = \frac{2\tau}{h_2^2} + \frac{\sigma}{DV_{ij}^2}, \quad b_{ij}^2 = \frac{\tau}{h_2^2}, \quad F_2 = \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma C_* \tau}{DV_{ij}^2} + \frac{\sigma}{DV_{ij}^2} \right) C_{ij}^{k+\frac{1}{2}}.$$

Чисельний розв'язок цієї різницевої схеми знаходимо методом прогонки

$$C_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^2 C_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^2, \quad (55)$$

де

$$\alpha_{i,j+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{i,j}^2 \cdot a_2}, \quad \beta_{i,j+1}^2 = \frac{a_2 \beta_{i,j}^2 + f_2}{c_2 - \alpha_{i,j}^2 \cdot a_2},$$

$$\alpha_{i,1}^2 = 1, \quad \beta_{i,1}^2 = \begin{cases} \tilde{C}_2, & \text{у випадку граничних умов 1-го роду,} \\ 0, & \text{у випадку граничних умов 2-го роду.} \end{cases} \quad (56)$$

Кількість винесених фільтраційним потоком речовин обчислюємо за формулою

$$Q_p = \int_0^t \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D \frac{\partial c(\varphi, Q_0, t)}{\partial \psi} d\varphi dt. \quad (57)$$

8. Програмна реалізація чисельного розв'язування задачі та результати чисельних експериментів

Програмна реалізація обчислювальних алгоритмів здійснена в пакеті Matlab 7.9 з використанням вбудованої мови програмування та його засобів візуалізації результатів обчислень і відображення графічних об'єктів. Для того щоб розроблений програмний продукт міг працювати з користувачем в діалоговому режимі, було розроблено діалогове вікно (форму) в середовищі Delphi 7.0. Розроблена програма дозволяє динамічно змінювати вхідні дані, керувати розбиттям області та отримувати результати обчислень як в графічному, так і числовому (у табличному) вигляді.

Зокрема, для проведення чисельних розрахунків, для простоти, будемо вважати, що фізична область даної задачі може приймати вигляд прямокутника, звичайної або криволінійної трапеції з включенням.

Чисельні розрахунки для розмірених величин проведено для таких вихідних даних:

$$a = 20 \text{ м}, b = 10 \text{ м}, H_1 = 5 \text{ м}, H_2 = 1 \text{ м},$$

$$\rho = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \rho_1 = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \delta = 0,1,$$

$$\sigma = 0,2, D_m^1 = 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доб}}, D_m^2 = 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{доб}}, \gamma = 0, \chi = 1, \tau = 30 \text{ діб}.$$

У результаті чисельних розрахунків у випадку трапеції з включенням отримаємо гідродинамічну різницеву сітку фільтраційного потоку (рис. 4).

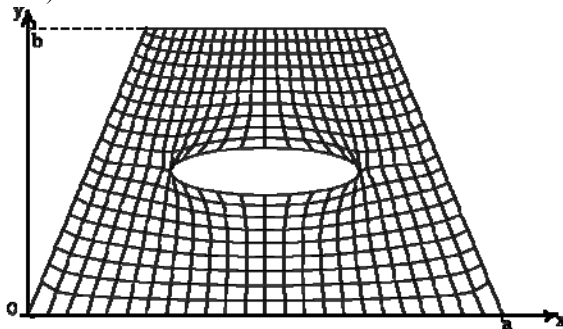


Рис.4. Розчинення сольового включення при обтіканні його фільтраційним потоком підземних вод у ґрунтовому середовищі в формі трапеції

Для більш гаючного представлення, результати чисельних експериментів наведені нижче у вигляді графіків.

Як тестовий приклад, розглянемо розчинення сольового включення, що залягає вздовж лінії течії. Графічне представлення результатів чисельних експериментів в момент часу $t = t_1 = 20$ років наведено на рис. 5—7.

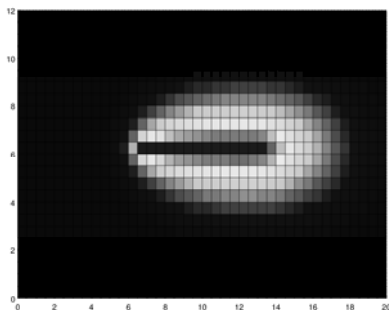


Рис. 5. Плошка візуалізація поля концентрації в фізичній області

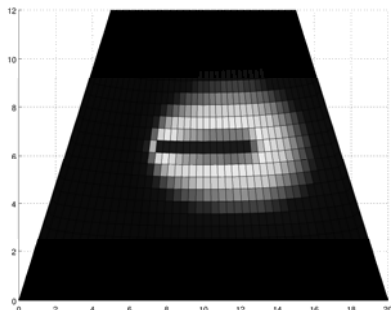


Рис. 6. Плошка візуалізація поля концентрації в області комплексного потенціалу

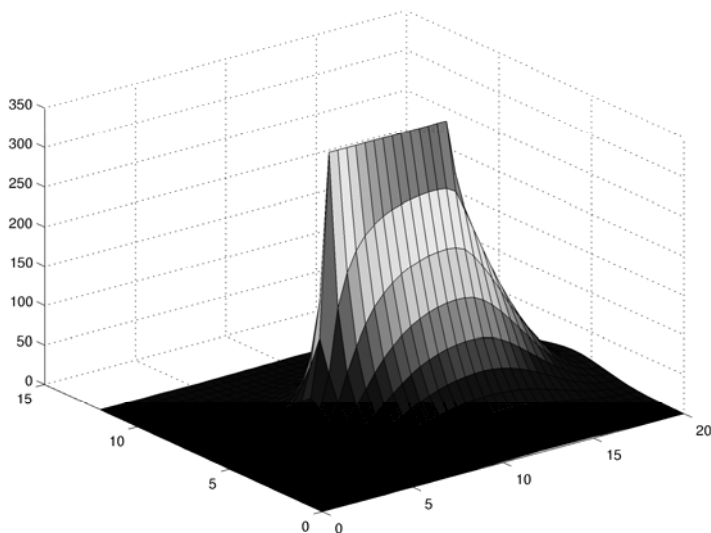


Рис. 7. Об'ємна візуалізація розподілу концентрації в області комплексного потенціалу

Графічне представлення результатів чисельних експериментів в момент часу $t = t_2 = 60$ років наведено на рис. 8—10.

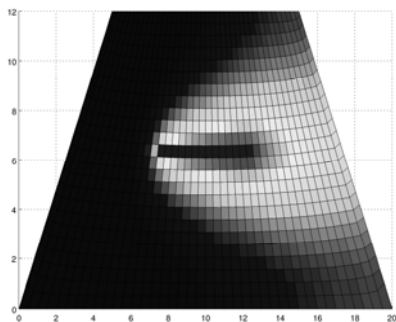


Рис. 8. Плошка візуалізація поля концентрації в фізичній області

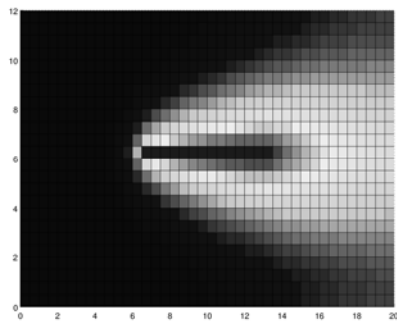


Рис. 9. Плошка візуалізація поля концентрації в області комплексного потенціалу

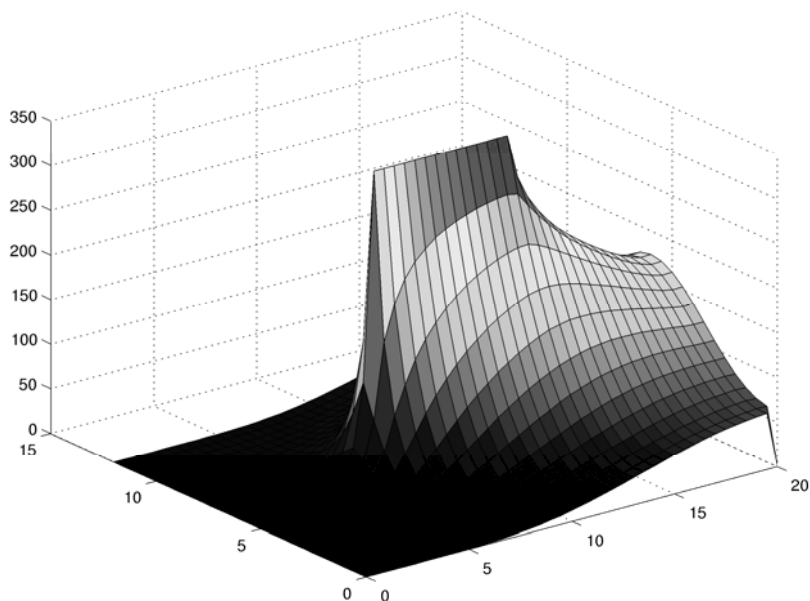


Рис. 10. Об'ємна візуалізація розподілу концентрації в області комплексного потенціалу

Як другий тестовий приклад, розглянемо розчинення круглого сольового включення. Результати чисельних експериментів представимо у вигляді графіків. Графічне представлення результатів чисельних експериментів в момент часу $t = t_1 = 20$ років наведено на рис. 11—13.

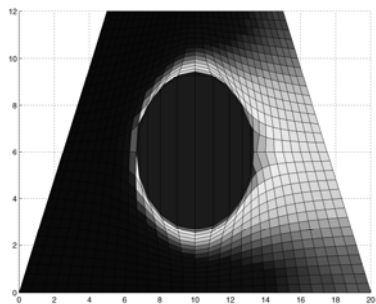


Рис. 11. Плошка візуалізація поля концентрації в фізичній області

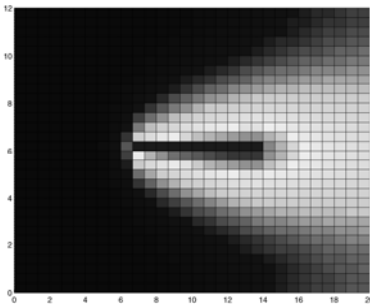


Рис. 12. Плошка візуалізація поля концентрації в області комплексного потенціалу

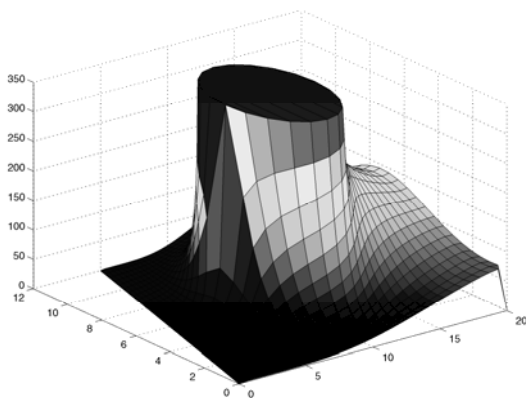


Рис. 13. Об'ємна візуалізація розподілу концентрації в області комплексного потенціалу

Графічне представлення результатів чисельних експериментів в момент часу $t = t_2 = 60$ років наведено на рис. 14—16.

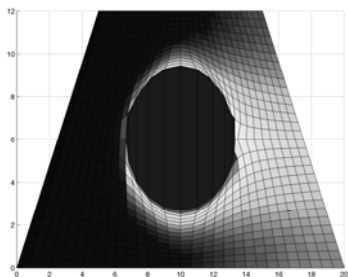


Рис. 14. Плошка візуалізація поля концентрації в фізичній області

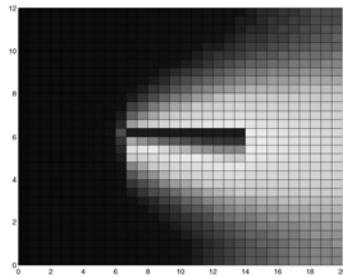


Рис. 15. Плошка візуалізація поля концентрації в області комплексного потенціалу

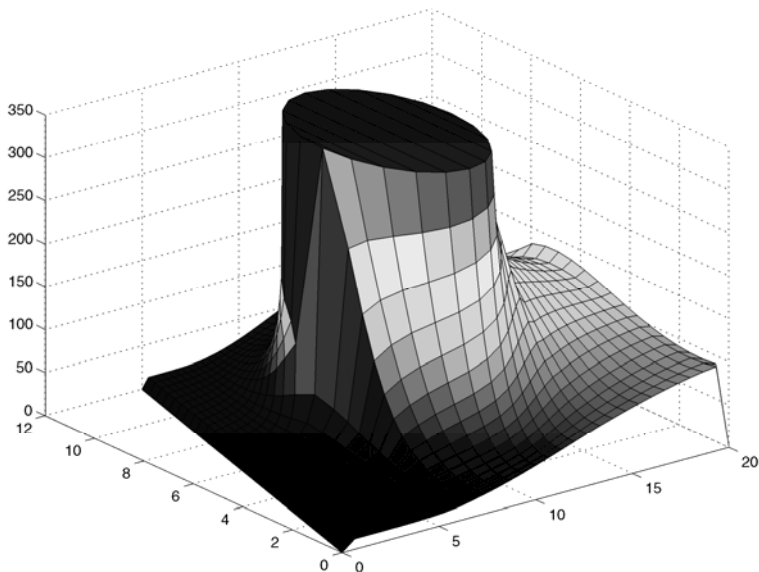


Рис. 16. Об'ємна візуалізація розподілу концентрації в області комплексного потенціалу

Графіки (рис. 5—16) дають не тільки візуальне уявлення про перебіг процесу розчинення соляного включення, але й дозволяють визначити числові значення розподілу концентрацій в ґрунті. Шкалу розподілу концентрації за кольорами наведено на рис. 17.



Рис. 17. Шкала розподілу концентрації за кольорами в $\text{кг}/\text{м}^3$

Висновки. Проведене математичне моделювання розчинення соляного включення дозволяє прогнозувати еволюцію карстової порожнини в основі гідротехнічної споруди і може бути використане для оцінки ґрунтових основ гідроенергетичних споруд, які експлуатуються в несприятливих гідрогеологічних умовах.

Список використаних джерел:

1. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). — М. : Наука, 1969. — С. 237—313.
2. Власюк А. П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд / А.П. Власюк // Доп. НАН України. — 1995 — № 8. — С. 37—39.

3. Власюк А. П. Численное решение задачи растворения и выноса солей фильтрационным потоком в основании гидротехнических сооружений / А. П. Власюк. — Ровно, 1993. — 12 с.
4. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с «плавающими» узлами / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. — К., 1989. — 55 с.
5. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. — Киев, 1991. — 56 с.
6. Власюк А. П. Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. — К., 1994. — 23 с. — (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 94.36).
7. Данилюк И. И. О задаче Стефана / И. И. Данилюк // Успехи мат. наук. — 1985. — 40, № 5. — С. 133—185.
8. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева — М. : Наука, 1973. — 473 с.
9. Мартинюк П. М. Дослідження існування та єдиності розв'язку однієї квазілінійної параболическої системи диференціальних рівнянь другого порядку / П. М. Мартинюк, А. П. Власюк. — К., 2001. — 20 с. — (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2001.3.)
10. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — 2-е изд. — М. : Науч. мир, 2003. — 316 с.
11. Власюк А. П. Чисельне моделювання розчинення пласта солі з врахуванням осмосу / А. П. Власюк, О. М. Степанченко // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. — 2004. — Вип. 4. — С. 231—241.
12. Власюк А. П. Математичне моделювання процесу вилуговування солей в основах гідротехнічних споруд та корозії їх фундаментів / А. П. Власюк, О. М. Степанченко // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Вип. 4 (40). — Рівне, 2006 — С. 341—346.
13. Власюк А. П. Математичне моделювання розчинення соляового вглючення в основі гідроенергетичного об'єкта / А. П. Власюк, О. М. Степанченко // Тези міжнар. школи-семінару Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності. — Чернівці, 2007. — С. 74—76.

The mathematical model of a problem of salt inclusion diffusive dissolution was built in the ground array that is washed by an underground waters filtrational stream. The computing algorithm of the respective boundary problems solutions is developed. Numerical decision is received by a finite difference method with usage of numerical conformal transformations. On the basis of the spent numerical experiments concentration distribution in the ground array and quantity of the substances taken out by a filtrational stream is defined at the different values of parameters.

Key words: *mathematical modelling, mathematical model, boundary problem, finite difference method, numerical method of conformal transformations, salt inclusion, dissolution, mass transfer, filtration.*

Отримано 06.10.2010