УДК 517.968.22

**В. А. Іванюк***, канд. техн. наук,
**О. М. Корнєєв****, аспірант
*Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнко, м. Кам'янець-Подільський,
**Хмельницький національний університет, м. Хмельницький

# РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ЗГОРТКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

У статті розглядаються методи розв'язування інтегральних рівнянь типу згортки із застосуванням інтегральних перетворень Лапласа та Фур'є. Приведено алгоритми отримання розв'язків. Показано ефективність алгоритмів на тестових прикладах.

**Ключові слова:** *інтегральне рівняння типу згортки, перетворення Лапаласа, перетворення Фур'є.*

Рівняння типу згортки широко використовується при розв'язуванні задач фізики, механіки, електротехніки та ін., також до нього зводяться задачі, які описуються лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо рівняння типу згортки

$$y(x)-\int_0^x k(x-s)\,y(s)\,ds=f(x), \tag{1}$$

що містить різницеве ядро $k(x-s)$, завдяки чому інтегральний оператор

$$\int_0^x k(x-s)\,y(s)\,ds=k(x)*y(x) \tag{2}$$

є операцією згортки функцій $k(x)$ і $y(x)$.

При розв'язуванні інтегральних рівнянь типу (1) розглянемо застосування інтегральних перетворень Лапласа та Фур'є.

**Перетворення Лапласа.** Особливість рівняння (2) дозволяє скористатися при розв'язанні (1) операційним методом, який полягає в отриманні алгебраїчних співвідношень для операторних зображень елементів вихідного рівняння, знаходження з них зображень вихідної функції та визначення за ним оригіналу.

Якщо ввести позначення

$$Y(p)\to y(x),\ \Phi(p)\to f(x),\ K(p)\to k(x), \tag{3}$$

 

то на основі властивостей перетворення Лапласа інтеграл (2) представляється у вигляді добутку зображень:

$$\int_0^x k(x-s)\,y(s)\,ds \to K(p)Y(p)$$

при умові, що інтеграл

$$\int_0^\infty e^{-px}k(x)\cdot y(x)\,dx$$

абсолютно сходиться. Тоді рівняння (1) перетворюється в операторне рівняння

$$Y(p)-K(p)Y(p)=\Phi(p), \tag{4}$$

розв'язок якого має вигляд

$$Y(p)=\frac{\Phi(p)}{1-K(p)}. \tag{5}$$

З виразу (5) безпосередньо не витікає можливості застосування оберненого перетворення Лапласа. Але з еквівалентного виразу

$$Y(p)=\Phi(p)+R_L(p)\Phi(p), \tag{6}$$

де

$$R_L(p)=\frac{K(p)}{1-K(p)}, \tag{7}$$

завжди має оригінал $R(x)$, слідує, що розв'язок переводиться в простір оригіналів, тобто виконується співвідношення

$$y(x)=f(x)+R(x)\cdot f(x),$$

або

$$y(x)=f(x)+\int_0^x R(x-s)\,f(s)\,ds. \tag{8}$$

Звідси випливає, що $R(x-s)$ представляє собою резольвенту ядра вихідного рівняння, аналітичний розв'язок якого є вираз (8). Для знаходження резольвенти може бути використане співвідношення (7) в зображеннях.

Шлях складання і розв'язання операторних рівнянь не є складним, труднощі виникають на двох головних етапах реалізації методу: при отриманні зображень для заданих функцій $k(x)$ і $f(x)$ (пряме перетворення) і при знаходженні оригіналу вихідного розв'язку за його зображенням.

Прикладом ядра, яке допускає точний перехід до зображення і наступні визначення резольвенти, є ядро виду

$$k(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\,,$$

зображення якого має вигляд

$$K(p)=\frac{a_0}{p}+a_1\frac{1}{p^2}+\ldots+a_n\frac{n!}{p^{n+1}}\,.$$

Зображення резольвенти такого ядра

$$R_L(p)=\frac{K(p)}{1-K(p)}=\frac{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+n!a_n}{p^{n+1}-a_0p^n-a_1p^{n-1}-\ldots-n!a_n}$$

є правильною дробово-раціональною функцією, оригінал якої знаходиться формально за однією з теорем операційного числення.

Для представлення оригіналів і зображень у вигляді, зручному для прямого і зворотного перетворення, необхідно проводити апроксимації вихідних функцій. При виборі методів дробово-раціональної апроксимації необхідно враховувати швидкість збіжності рядів, яка інформативність параметрів послідовностей і т.д. При апроксимації оригіналів ефективними методами є метод інтерполяції та варіаційний метод [2]. Для отримання адекватних апроксимаційних моделей зображень можна використовувати метод інтерполяції [2] та метод ланцюгових дробів [4].

Розглянемо застосування перетворення Лапласа при розв'язуванні рівняння

$$y(t)-\int_0^x 2e^{-(x-s)}y(s)=e^x\,. \tag{9}$$

При переході до зображень маємо:

$$y(x)\to Y(p)\,,$$

$$f(x)=e^x\to\frac{1}{p-1}=F(p)\,,$$

$$k(x)=2e^{-x}\to 2\frac{1}{p+1}=K(p)\,,$$

з цього випливає

$$\int_0^x 2e^{-(x-s)}y(s)\to 2\frac{1}{p+1}Y(p)\,.$$

Складаємо операторне рівняння

$$Y(p)=\frac{1}{p-1}+2\frac{1}{p+1}Y(p)\,,$$

розв'язок якого має вигляд

$$Y(p)=\frac{p+1}{(p-1)^2}\,.$$

Відповідний оригінал, тобто розв'язок рівняння, знаходимо за таблицями [1]

$$y(x) = e^x + 2xe^x .$$

**Перетворення Фур'є.** Розглянемо застосування перетворення Фур'є при розв'язуванні інтегрального рівняння типу згортки (1) при $0 < x < a < +\infty$ , розв'язок $y(x)$ будемо шукати в $L(0,a)$ .

Та обставина, що у вихідному рівнянні нижня межа інтегрування дорівнює 0, несуттєва, оскільки якщо $a_0 \neq 0$ , то шляхом заміни $s$ на $s + a_0$ і $x$ на $x + a_0$ прийдемо до рівняння виду (1).

У випадку, коли $a = +\infty$ , необхідна і достатня умова розв'язання рівняння (1) в $L(0,+\infty)$ при будь-якій $f(x) \in L(0,+\infty)$ приведена в роботі [3].

Відомий розв'язок рівняння (1) для скінченного $a$ методом ітеративних ядер. Цей метод дає розв'язок через нескінченну послідовність квадратур.

Визначимо рівняння (1) на всю дійсну вісь. Задану та шукану функції $f(x)$ і $y(x)$ поза $(0,a)$ покладемо рівними нулю. Фінітні функції, отримані таким чином, будемо позначати відповідно через $f_+(x)$ і $y_+(x)$ . Функцію $k(x)$ продовжимо на від'ємну піввісь нулем, а для $x > a$ довизначимо деякою функцією $k_1(x)$, що належить $L(a,+\infty)$ . Отриману в результаті такого продовження функцію позначимо через $k_+(x)$ . Вона належить $L(0,+\infty)$ і на $(0,a)$ співпадає з $k(x)$ .

Тоді рівняння (1) можна представити у вигляді

$$y_+(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} k_+(x-s)\, y_+(s)\, ds - f_+(x) = \psi(x) , \quad -\infty < x < +\infty , \tag{10}$$

де

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, a), \\ \int_0^a k_+(s-t)\, y(s)\, ds, x > a. \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо $a = +\infty$ , то $\psi(x) \equiv 0$ , та застосування до інтегрального рівняння (1) перетворення Фур'є зводить його до лінійного алгебраїчного рівняння. Якщо ж $a < +\infty$ , то функція $y(x)$ , взагалі кажучи, відмінна від нуля.

Надалі перетворені по Фур'є функції будемо позначати відповідними великими літерами. $R_0^+\left(R_0^-\right)$ означають кільця функцій, які є перетвореннями Фур'є функцій з $L\left(0,+\infty\right)$ ($L\left(-\infty,0\right)$). Кільце, отримане з $R_0^+$ приєднанням нуля, позначаємо через $R^+$.

Розглянемо без доведення лему [3].

**Лема 1.** Для того, щоб функція $y\left(x\right)\in L\left(0,+\infty\right)$ майже для всіх $x>a$ перетворювалась в нуль, необхідно і достатньо, щоб її перетворення Фур'є $\Phi^+\left(x\right)$ представлялось у вигляді

$$\Phi^+\left(x\right)=e^{iax}\Phi^-\left(x\right), \tag{11}$$

де $\Phi^-\left(x\right)$ — деяка функція із $R_0^-$.

Перетворюючи рівняння (10) по Фур'є і враховуючи рівність $\Psi\left(x\right)=e^{iax}\Psi^+\left(x\right)$, де $\Psi^+\left(x\right)=\int\limits_0^{+\infty}y\left(a+s\right)e^{isx}ds\in R_0^+$, отримаємо співвідношення

$$\left[1+K^+\left(x\right)\right]\Phi^+\left(x\right)=e^{iax}\Psi^+\left(x\right)+F^+\left(x\right),\ -\infty<x<+\infty. \tag{12}$$

Спочатку припустимо, що функція $1+K^+\left(x\right)$ на дійсній осі відмінна від нуля. Позначимо її нулі у верхній півплощині через $z_1,z_2,...,z_k$, а їх кратності через $n_1,n_2,...,n_k$.

Помножимо крайову умову (12) на $e^{-iax}$ і скористаємося співвідношенням (11). Отримаємо задачу Рімана в кільці $R_0$, розв'язок якої знайдемо загальним методом. Тоді

$$\Phi^-\left(x\right)=\prod_{s=1}^{k}\left(\frac{x+i}{x-z_s}\right)^{n_s}\left[\frac{p_{n-1}\left(x\right)}{\left(x+i\right)^n}+F_1^-\left(x\right)\right], \tag{13}$$

де

$$F_1^\pm\left(x\right)=\mp\frac{1}{2}\left(1+K_1^+\left(x\right)\right)^{-1}F^-\left(x\right)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(1+K_1^+\left(s\right)\right)^{-1}F^-\left(s\right)}{s-x}ds\in R_0^\pm,$$

$$1+K_1^+\left(x\right)=\left(1+K^+\left(x\right)\right)\prod_{s=1}^{k}\left(\frac{x+i}{x-z_s}\right)^{n_s}\in R^+,\ n=\sum_{s=1}^{k}n_s,$$

$P_{n-1}\left(x\right)$ — многочлен степеня не вище $n-1$, причому $P_{n-1}\left(x\right)\equiv 0$ при $n=0$.

З леми 1 випливає, що функція $\Phi^{-}(x)e^{iax}$ повинна належати кільцю $R_0^{+}$. Так як функція $F_1^{-}(x)e^{iax}=F_1^{+}(x)e^{iax}+\left(1+K_1^{+}(x)\right)^{-1}F^{+}(x)$ належить $R_0^{+}$, то для виконання цієї умови необхідно і достатньо лише виконання співвідношень

$$P_{n-1}^{(r)}(z_s)=-\left((z+i)^n F_1^{-}(z)\right)^{(r)}\Big|_{z=z_s},\ r=0,1,\dots,n_s-1;\ s=1,\dots,n. \qquad (14)$$

Відомо, що рівності (14) однозначно визначають многочлен $P_{n-1}(x)$.

Так, функція $\Phi^{-}(x)e^{iax}$, де $\Phi^{-}(x)$ визначається формулою (13), в якій многочлен $P_{n-1}(x)$ є інтерполяційним многочленом Ерміта, є перетворений за Фур'є розв'язок вихідного рівняння (1).

Викладений спосіб розв'язання незручний, оскільки для отримання розв'язку рівняння (1) доводиться будувати інтерполяційний многочлен. Далі розглянемо метод отримання явного розв'язку вихідного рівняння без використання інтерполяційного многочлена. Надалі відмовляємося від обмеження $1+K^{+}(x)\neq 0$.

Розглянемо лему 2 та теорему.

**Лема 2.** Для функції $1+K^{+}(x)\in R^{+}$ існує таке число $\alpha>0$, що функція $1+K^{+}(z)$ відмінна від нуля у півплощині $\operatorname{Im} z>\alpha$.

**Теорема.** Нехай $k(x)$ і $f(x)\in L(0,a)$. Єдиний розв'язок рівняння (1) в $L(0,a)$ визначається формулою

$$y(x)=f(x)+\int_0^x m_{+}(x-s)f(s)ds,\ 0<x<a, \qquad (15)$$

де

$$m_{+}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty}\frac{K^{+}(\tau)}{1+K^{+}(\tau)}e^{ix\tau}d\tau$$

при достатньо великому $\alpha>0$.

Доведення даної леми і теореми представлено в [3].

Якщо функція $1+K^{+}(x)$ не перетворюється в нуль на дійсній осі і у верхній півплощині, то у формулі (15) можна поставити $\alpha=0$. У загальному випадку в якості $\alpha$ можна взяти будь-яке число, більше верхньої межі уявних частин нулів функції $1+K^{+}(z)$ у верхній півплощині.

Для ілюстрації представленої теорії розглянемо приклад розв'язання інтегрального рівняння типу згортки (9). В ньому $k(x)=2e^{-x}$, $f(x)=e^{x}$, $0<x<a$. Покладемо $k_1(x)=2e^{-x}$ для $x>a$. Тоді $1+K^{+}(x)=\dfrac{x-i}{x+i}$. Візьмемо $\alpha>1$ і обчислимо

$$m_{+}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K^{+}(t+i\alpha)}{1+K^{+}(t+i\alpha)}e^{-ix(t+i\alpha)}dt=\begin{cases}2e^{x}, x>0,\\ 0, x<0.\end{cases}$$

Розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$y(x)=e^{x}+\int_{0}^{x}2e^{(x-s)}e^{s}ds=e^{x}+2xe^{x},\ 0<x<a .$$

**Висновки.** Застосування інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є є ефективним підходом при розв'язуванні задач, які описуються інтегральними рівняннями типу згортки. Недоліком застосування перетворення Лапласа при розв'язуванні інтегральних рівнянь (1), є те, що при вирішенні широкого класу задач виникає необхідність застосування апроксимації оригіналів і зображень вихідних функцій. В свою чергу, розглянутий алгоритм застосування перетворення Фур'є, дозволяє розв'язувати широкий клас задач без проведення апроксимаційних перетворень.

## Список використаних джерел:


1. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. — 344 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 544 с.
3. Гахов Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. — М. : Наука, 1978. — 296.
4. Іванюк В. А. Використання ланцюгових дробів при розв'язанні інтегральних рівнянь типу згортки операційним методом / В.А. Іванюк, О.М. Корнєєв // Интегральные уравнения — 2009 Integral equations — 2009 : сб. тезисов конф., 26-29 января, Киев. — К. : ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины, 2009. — 164 с.



The article deals with methods for solving convolution type integral equations using integral Laplace and Fourier transforms. Algorithms for obtaining solutions are given. The effectiveness of the algorithms is shown in test examples.



**Key words:** *integral equation of convolution type, Lapalasa transform, Fourier transform.*

Отримано 15.10.2010