УДК 519.6

А. О. Каленчук-Порханова, канд. фіз.-мат. наук,
Л. П. Вакал, науковий співробітник
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України

ЗАСТОСУВАННЯ НАЙКРАЩОЇ ЧЕБИШОВСЬКОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У статті розглядається застосування найкращої чебишовської апроксимації для розв'язування систем несумісних лінійних рівнянь та крайових задач математичної фізики.

Ключові слова: *найкращі чебишовські наближення, моделювання, система несумісних лінійних рівнянь, крайова задача.*

Вступ. Проблема математичного, або комп'ютерного, моделювання на основі застосування чисельних методів для розв'язання прикладних задач з різних предметних областей є однією з найактуальніших проблем обчислювальної математики [1]. У статті пропонується вирішення цієї проблеми на прикладах адаптації та застосування методів, алгоритмів і програмних засобів найкращого чебишовського наближення для розв'язання систем несумісних лінійних рівнянь і крайових задач математичної фізики.

Задача найкращого чебишовського (рівномірного) наближення функції $f(X)$ p змінних $X=\left(x_1,x_2\ldots,x_p\right)$ на множині N точок $E=\left\{X^{(1)},X^{(2)},\ldots,X^{(N)}\right\}$ узагальненим поліномом $\Psi_n\left(x;Z\right)$ за системою n ($n<N$) лінійно незалежних базисних функцій $\psi_j\left(X\right)$

$$\Psi_n\left(X;Z\right)=\sum_{j=1}^{n} z_j\psi_j\left(X\right), \tag{1}$$

де $Z=\left(z_1,\ldots,z_n\right)$, полягає у знаходженні такого набору його коефіцієнтів $Z^*=\left(z_1^*,\ldots,z_n^*\right)$, для якого виконується *умова чебишовського мінімаксу*:

$$L\left(Z^*\right)\equiv\rho=\min_Z L\left(Z\right)\ ,\ L\left(Z\right)=\max_{1\le i\le N}\left|f\left(X^{(i)}\right)-\sum_{j=1}^{n} z_j\psi_j\left(X^{(i)}\right)\right|. \tag{2}$$

Задача (1)—(2) розв'язується шляхом зведення до *задачі лінійного програмування*:

$$
\begin{aligned}
&L(Z) = \min,\\
&f(x_i) - \Psi_n(x_i; Z) - L \le 0 \quad \left(i = \overline{1, N}\right),\\
&-f(x_i) + \Psi_n(x_i; c) - L \le 0 \quad \left(i = \overline{1, N}\right),\\
&L \ge 0,
\end{aligned} \tag{3}
$$

Окремим випадком цієї задачі є задача найкращого наближення функцій однієї змінної $f(x)$ на множині точок $E = \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}\right\}$ звичайними степеневими поліномами [2].

Розв'язання систем несумісних лінійних рівнянь. Для розв'язання широкого кола прикладних задач, зокрема в радіофізиці, радіоастрономії, сейсморозвідці та ін., є необхідним вирішення такої типової проблеми. Припускається, що деяка величина b є лінійною комбінацією величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ з невідомими коефіцієнтами $z_1, z_2, \ldots, z_n$, тобто

$$b = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n.$$

Звичайно ці коефіцієнти визначаються експериментальним шляхом, для чого виконують N вимірювань величин $b,\ a_1, \ldots, a_n$, і результати i-го вимірювання цих величин позначають відповідно через b_i, $a_{i1}, \ldots, a_{in}$. Для визначення невідомих коефіцієнтів $z_1, \ldots, z_n$ отримують систему N лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими ($N>n$):

$$
\begin{cases}
b_1 = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \ldots + a_{1n} z_n,\\
b_2 = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \ldots + a_{2n} z_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_N = a_{N1} z_1 + a_{N2} z_2 + \ldots + a_{Nn} z_n.
\end{cases} \tag{4}
$$

Якщо значення b_i були б відомі *точно*, то невідомі $z_1, \ldots, z_n$ визначалися б шляхом розв'язання якихось n рівнянь системи (4). Оскільки значення b_i відомі наближено, то отримані з n рівнянь значення z_i не будуть задовольняти іншим рівнянням, причому різниця між лівою і правою частинами деяких рівнянь може бути досить значною [3]. У цьому випадку система (4) буде несумісною і виникає задача так визначити невідомі $z_1, z_2, \ldots, z_n$, щоб ліві частини рівнянь були б якомога ближчими до відповідних правих частин.

За міру близькості доцільно взяти максимальну за модулем різницю між лівою і правою частинами рівнянь системи (4):

$$L\left(z_1,\ldots,z_n\right)=\max_{i=1,N}\left|\Phi_i\left(z_1,\ldots,z_n\right)\right|,\Phi_i\left(z_1,\ldots,z_n\right)=b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}z_j. \quad (5)$$

Значення невідомих $z_1, z_2,\ldots,z_n$ знаходяться так, щоб різниця (5) набувала свого найменшого можливого значення ρ, а саме:

$$\rho=\min_{z_1,\ldots,z_n} L\left(z_1,z_2,\ldots,z_n\right). \quad (6)$$

У цьому випадку задача знаходження наближеного розв'язку системи несумісних лінійних рівнянь (4) за мінімаксним критерієм (5)—(6) еквівалентна задачі найкращої чебишовської апроксимації (1)—(2), де роль коефіцієнтів a_{ij} і b_i при невідомих $z_1,\ldots,z_n$ виконують відповідно значення базисних функцій ψ_j та функції f у точках множини E

$$a_{ij}=\psi_j\left(X^{(i)}\right),\ b_i=f\left(X^{(i)}\right),\ \left(i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,n}\right).$$

Для розв'язання задачі (5)—(6) адаптовано розроблений авторами алгоритм найкращого рівномірного *наближення функцій багатьох змінних узагальненими поліномами* за системами базисних функцій [4]. Адаптація алгоритму до розв'язання задачі (5)—(6) полягає в тому, що виключається необхідність формування початкової матриці шляхом обчислення значень базисних функцій в точках множини *E*. Алгоритм складається з *трьох етапів*: *перший* — зведення задачі наближення до максимум-задачі лінійного програмування, *другий* — знаходження оптимального розв'язку максимум-задачі, *третій* — визначення коефіцієнтів узагальненого полінома найкращого наближення та оцінка точності наближення. *Перевагами* розробленого алгоритму є те, що він базується *на зведенні* задачі наближення (1)—(2) *до задачі лінійного програмування* (3), коли головною є *двоїста максимум-задача*, число обмежень якої значно *менше* числа обмежень прямої задачі, відсутнє виродження при виконанні певних умов та ін. [4]. Це забезпечує ефективне застосування найкращих чебишовських наближень для розв'язання систем несумісних лінійних рівнянь.

Розв'язання крайових задач математичної фізики. Методи чебишовських наближень можуть також успішно застосовуватись до наближеного розв'язання крайових задач як для *звичайних диференціальних рівнянь*, так і *з частинними похідними*, які виникають при моделюванні різних фізичних процесів.

Розглянемо крайову задачу математичної фізики в операторній формі:

$$Lu=f \text{ в } D \quad (7)$$

$$Su=w \text{ на } \Gamma=\partial D, \quad (8)$$

де L — лінійний оператор, $u \in \Phi$ і $f \in F$. Тут Φ і F — гільбертові простори з областями визначення елементів $D + \partial D$ і D відповідно, S — лінійний оператор граничної умови, $w \in W$, W — гільбертів простір функцій з областю визначення Γ [5].

Функція $u = u\left(x_1, \ldots, x_p\right)$ p незалежних змінних $x_1, \ldots, x_p$, яка задовольняє диференціальному рівнянню (7) і крайовій умові (8), називається розв'язком крайової задачі. Оскільки знайти точний розв'язок в елементарних функціях вдається лише в окремих випадках, було розроблено методи знаходження наближених розв'язків цієї задачі.

Для наближеного розв'язання крайової задачі (7)—(8) можна застосувати два методи з використанням апарату найкращого чебишовського наближення функцій, а саме, метод чебишовських наближень і чебишовських наближень на межі.

В *методі чебишовських наближень* замість шуканого розв'язку u розглядається близька до нього функція $v = v\left(x_1, \ldots, x_p; c_1, \ldots, c_n\right)$, яка лінійно залежить від n параметрів $c_1, \ldots, c_n$

$$v\left(x_1, \ldots, x_p; c_1, \ldots, c_n\right) = \varphi_0\left(x_1, \ldots, x_p\right) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\left(x_1, \ldots, x_p\right) \qquad (9)$$

і точно задовольняє крайовій умові для будь-яких значень цих параметрів. Далі задається функціонал $I\left[v\right]$, що для розв'язку u крайової задачі набуває мінімального значення $I\left[u\right]$. Параметри c_k визначаються так, щоб значення функціоналу $I\left[v\right]$ було мінімально можливим. Тоді розв'язання крайової задачі зводиться до розв'язання відповідної варіаційної задачі:

$$I\left[v\right] = \min, \qquad (10)$$

де в якості функціонала виступає величина максимальної за модулем диференціальної нев'язки μ:

$$I\left[v\right] = \max_{D}\left|\mu\right|, \quad \mu = Lv - f. \qquad (11)$$

Позначимо через Ψ узагальнений поліном вигляду

$$\Psi = \psi_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k, \ \psi_0 = L\varphi_0, \ \psi_k = L\varphi_k \quad \left(k = \overline{1, n}\right). \qquad (12)$$

У позначеннях (12) варіаційна задача (10)—(11) є задачею найкращого чебишовського наближення функції f в області D узагальненим поліномом Ψ:

$$\max_{D}\left|\Psi\left(x_1, \ldots, x_p; c_1, \ldots, c_n\right) - f\left(x_1, \ldots, x_p\right)\right| = \min_{c_1, \ldots, c_n}. \qquad (13)$$

Якщо в області D вибрати сітку $E=\left\{X^{(1)},\ldots,X^{(N)}\right\}\subset D$, де $X=\left(x_1,\ldots,x_p\right)$, то задача (12)—(13) буде задачею найкращого чебишовського дискретного наближення (2) узагальненим поліномом вигляду (1).

У методі чебишовських наближень на межі наближений розв'язок $v=v\left(x_1,\ldots,x_p;c_1,\ldots,c_n\right)$ крайової задачі (7)—(8) знаходиться серед функцій вигляду (9), які для довільних значень параметрів $c_1,\ldots,c_n$ точно задовольняють диференціальному рівнянню (7). В якості функціонала $I\left[v\right]$ вибирається величина максимального за модулем відхилення функції Sv від крайових умов w, а параметри c_k визначаються з умови мінімуму функціоналу $I\left[v\right]$, тобто:

$$I\left[v\right]=\max_{\Gamma}\left|Sv-w\right|=\min. \tag{14}$$

Варіаційна задача (14) є задачею найкращого чебишовського наближення функції w на межі Г функцією Ξ:

$$\max_{\Gamma}\left|\Xi\left(x_1,\ldots,x_p;c_1,\ldots,c_n\right)-w\left(x_1,\ldots,x_p\right)\right|=\min_{c_1,\ldots,c_n}, \tag{15}$$

де Ξ — узагальнений поліном вигляду

$$\Xi=\xi_0+\sum_{k=1}^{n}c_k\xi_k,\ \xi_0=S\varphi_0,\ \xi_k=S\varphi_k\quad\left(k=\overline{1,n}\right). \tag{16}$$

Аналогічно наближенню в області D, якщо на межі Г вибрати N-точкову сітку $E=\left\{X^{(1)},\ldots,X^{(N)}\right\}\subset\Gamma$, де $X=\left(x_1,\ldots,x_p\right)$, то задача (15)—(16) також буде задачею найкращого чебишовського дискретного наближення (2) узагальненим поліномом вигляду (1).

Застосування методу чебишовських наближень та методу чебишовських наближень на межі розглядається далі на прикладах розв'язання відповідно лінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку та крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними.

Приклад 1. Знайти розв'язок крайової задачі

$$u^{//}+u=-x,\ u\left(0\right)=u\left(1\right)=0. \tag{17}$$

Розв'язання. Наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$v\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}c_kx^k\left(1-x\right). \tag{18}$$

Для випадку n=2 диференціальна нев'язка є такою:

$$\mu\left(x;c_1,c_2\right)=\Psi\left(x;c_1,c_2\right)+x=c_1\left(-2+x-x^2\right)+c_2\left(2-6x+x^2-x^3\right)+x.$$

Згідно з методом чебишовських наближень задача визначення невідомих параметрів c_1 і c_2 зводиться до знаходження коефіцієнтів узагальненого полінома $\Psi\left(x;c_1,c_2\right)$, який є найкращим чебишовським наближенням функції $-x$ на відрізку $[0,\ 1]$.

За допомогою розроблених авторами програмних засобів [4] для базисних функцій $\psi_1\left(x\right)=-2+x-x^2$, $\psi_2\left(x\right)=2-6x+x^2-x^3$ і сітки $E=\left\{x_i=(i-1)\cdot 0,05;\, i=\overline{1,21}\right\}$ було отримано такі результати:

$$c_1=0{,}1837,\ c_2=0{,}1667,\ \max\left|\ \mu\left(x\right)\right|=0{,}0342.$$

Отже, наближеним розв'язком вигляду (18) крайової задачі (17) для випадку n=2 є функція

$$v_2\left(x\right)=0{,}1837x\left(1-x\right)+0{,}1667x^2\left(1-x\right).$$

Аналогічно було знайдено розв'язки для випадків n=1 і n=3:

$$v_1\left(x\right)=0{,}25x\left(1-x\right);$$

$$v_3\left(x\right)=0{,}18891x\left(1-x\right)+0{,}19154x^2\left(1-x\right)-0{,}02312x^3\left(1-x\right).$$

У табл. 1 наводяться значення точного $u\left(x\right)=\dfrac{\sin\left(x\right)}{\sin 1}-x$ [6] і наближених розв'язків $v_1(x)$, $v_2(x)$ і $v_3(x)$ у деяких точках відрізку $[0,1]$. Легко бачити, що абсолютна похибка δ наближеного розв'язку та максимальна за модулем нев'язка μ швидко зменшуються з ростом числа n базисних функцій.

Таблиця 1.

Значення точного і наближених розв'язків задачі (17) у точках відрізку $[0,1]$

Значення *x*	**Точний розв'язок *u*(*x*)**	**Наближений розв'язок $v_n\left(x\right)$**		
		n=1	n=2	n=3
0.25	0.0440	0.047	0.0423	0.0441
0.5	0.0697	0.063	0.0668	0.0697
0.75	0.0601	0.047	0.0579	0.0600
$\delta=\max\left\|v_n\left(x\right)-u\left(x\right)\right\|$		0.013	0.0030	0.0002
$\max\left\|\mu\left(x\right)\right\|$		0.5	0.0342	0.0053

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі про статичний прогин нерівномірно навантаженої однорідної прямокутної мембрани з жорстко закріпленою межею:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 - 1 \text{ в}$$

$$D = \{ (x,y) : -1 < x < 1, -0,5 < y < 0,5 \}; \tag{19}$$

$$u(x,y) = 0 \text{ на } \Gamma = \{ (x,y) : (|x| = 1, -0,5 \le y \le 0,5) \cup$$

$$\cup (-1 \le x \le 1, |y| = 0,5) \}$$

Розв'язання. Наближений розв'язок $v(x,y)$ крайової задачі (19) шукаємо у вигляді

$$v(x,y) = \varphi_0(x,y) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x,y), \tag{20}$$

де

$$\varphi_0(x,y) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2}, \; \varphi_k(x,y) = \mathrm{Re}(x+iy)^{2k}.$$

Зокрема, для $k = 1,2,3$ маємо: $\varphi_1 = x^2 - y^2$, $\varphi_2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $\varphi_3 = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$. Легко пересвідчитись, що функція (20) точно задовольняє диференціальному рівнянню для довільних c_k.

Відповідно до методу чебишовських наближень на межі невідомі параметри c_k знаходимо з умови

$$\max_{\Gamma} \left| v(x,y;c_1,\ldots,c_n) \right| \equiv L(c_1,\ldots,c_n) = \min, \tag{21}$$

яка означає, що нульові граничні значення будуть наближатися функцією $v(x,y)$ найкраще у чебишовському розумінні. Завдяки симетрії функцій φ_k відносно координатних осей умову мінімаксу (21) достатньо врахувати на контурі $\widehat{\Gamma}$, який складає чверть межі Γ, а саме:

$$\widehat{\Gamma} = \{ (x,y) : (0 \le x \le 1, y = 0,5) \cup (x = 1, \; 0 \le y \le 0,5) \}.$$

Розрахунки виконувались з використанням програмних засобів [4] на множині точок $E = \{ (x_i, y_i) \}_0^{200}$, де $y_i = 0,5$, $x_i = i \cdot 0,01$ $(i = \overline{0,100})$ і $x_i = 1$, $y_i = (200 - i) \cdot 0,005$ ($i = \overline{101,200}$). Отримані значення коефіцієнтів c_n і величини максимального відхилення $L(c_1,\ldots,c_n)$ для випадків n=1, 2, 3 наводяться в табл. 2. Слід підкреслити, що з урахуванням принципу максимуму для гармонічних функцій маємо $|v - u| \le L$ в усіх точках області $D \cup \Gamma$.

Для ілюстрації ефективності застосування методу чебишовських наближень у порівнянні з методом найменших квадратів для розв'язання крайової задачі (19) зазначимо, що для випадку n=2 величина максимального відхилення L=0,10171 у методі чебишовських наближень значно менша, ніж L=0,14832 для розв'язку

$$v(x, y) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + 0,560521\left(x^2 - y^2\right) - 0,131015\left(x^4 - 6x^2y^2 + y^4\right)$$

у методі найменших квадратів [2].

Таблиця 2

Результати розв'язання задачі про статичний прогин мембрани

Обчислення з коефіцієнтами	**Значення коефіцієнтів c_k**	**L= max| v–u |**
c_1	c_1= 0,4574917	0,11979
c_1, c_2	c_1= 0,3877899; c_2= –0,0728283	0,10171
c_1, c_2, c_3	c_1= 0,3863670; c_2= –0,0741743; c_3= 0,0031963	0,10128

Висновки. Використання розробленого апарату найкращої чебишовської апроксимації для розв'язання наведених у статті прикладних задач підтвердило його високу ефективність. У розвиток робіт планується подальша адаптація цього апарату для вирішення інших класів прикладних задач. Програмні засоби найкращого чебишовського наближення у вигляді набору бібліотек включені до складу Базового прикладного програмного забезпечення суперкомп'ютера з кластерною архітектурою СКІТ.

Список використаних джерел:

1. Ильин В. П. Что такое вычислительная наука? / В. П. Ильин // Вестник Российской академии наук. — 2010. — № 4. — С. 329—336.
2. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е. Я. Ремез. — К. : Наук. думка, 1969. — 623 с.
3. Березин И. С. Методы вычислений. В 2-х т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Наука, 1966. — Т.1. — 632 с.
4. Каленчук-Порханова А. О. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних / А. О. Каленчук-Порханова, Л. П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі і системи. — 2007. — № 6. — С. 141—148.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. — М. : Наука, 1977. — 456 с.
6. Волков Е. А. Численные методы / Е. А. Волков. — М. : Наука, 1987. — 248 с.

Applications of Chebyshev (uniform) approximations for solving of inconsistent linear equations system and boundary value problems are considered in this article.

Key words: *Chebyshev (uniform) approximation, simulation, inconsistent linear equations system, boundary value problems.*

Отримано: 01.07.2010