УДК 517.946

І. М. Конет*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. П. Ленюк**, д-р фіз.-мат. наук, професор
*Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,
**Чернівецький факультет НТУ «ХПІ», м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА-ФУР'Є-ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Операційним методом одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку алгоритмічного характеру задачі про дифузійні процеси в неоднорідних середовищах з м'якими межами у випадку, коли моделювання процесів здійснено методом гібридного диференціального оператора Лежандра-Фур'є-Лежандра.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, фундаментальна система розв'язків, функції Коші, функції Гріна, функції впливу, крайова задача.*

Постановка проблеми та її аналіз. Процеси дифузії, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертали до себе увагу людства на протязі всієї історії його розвитку. Математичне вивчення дифузійних процесів розпочало свій шлях з появою класичного рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \chi^2 u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(t, x\right) \tag{1}$$

та методу відокремлення змінних (методу Фур'є) [1].

Диференціальне рівняння (1) за два століття пройшло велику низку узагальнень різного характеру. При всій розмаїтості крайових умов у рамках феноменологічної теорії припускалося, що межа області є жорсткою по відношенню до відбиття хвиль: в крайових умовах не брав участі оператор диференціювання за часовою змінною. Особливої уваги заслуговує запропонований у другій половині XX-го ст. для вивчення напруженого стану композитних матеріалів метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик. Це привело (навіть у випадку жорсткості межі області) до дослідження диференціальних рівнянь параболічного типу із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та похідних від неї [2]. Інтегральне зображення розв'язку задачі в точній аналітичній формі при такому моделюванні технологічних процесів одержати неможливо. Ці труднощі можна обійти, якщо скористатися методом гібридного інтегрального перетворення або здійснити моделювання дифузійних процесів методом гібридних диференціальних операторів [3].

Ця робота присвячена вивченню дифузійних процесів в неоднорідному середовищі з м’якими межами у випадку, коли моделювання технологічного процесу здійснюється методом гібридного диференціального оператора Лежандра-Фур’є-Лежандра.

Основна частина. Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині $D_2 = \{(t,r) : t \in (0,\infty),\, r \in I_2^+ = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty);$ $R_0 > 0\}$ розв’язку сепаратної системи класичних рівнянь дифузії параболічного типу [1]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)_1}[u_1] = f_1(t,r),\ r \in (R_0, R_1),\\
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = f_2(t,r),\ r \in (R_1, R_2),\\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)_2}[u_3] = f_3(t,r),\ r \in (R_2, \infty)
\end{gathered} \tag{2}$$

з початковими умовами

$$u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r),\ r \in (R_{j-1}, R_j),\ j = \overline{1,3}, R_3 = \infty, \tag{3}$$

крайовими умовами

$$L_{11}^0 \left[u_1(t,r)\right]\big|_{r=R_0} = \omega_0(t),\ \lim_{r\to\infty} \frac{\partial u_3}{\partial r} = 0 \tag{4}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k \left[u_k(t,r)\right] - L_{j2}^k \left[u_{k+1}(t,r)\right]\right)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t),\ j,k = 1,2. \tag{5}$$

У рівностях (2)—(5) беруть участь диференціальний оператор Фур’є $\dfrac{d^2}{dr^2}$, диференціальні оператори Лежандра [4]

$$\Lambda_{(\mu)_j} = \frac{d^2}{dr^2} + \mathrm{cth}r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{1j}^2}{1-\mathrm{ch}r} + \frac{\mu_{2j}^2}{1+\mathrm{ch}r} \right), \mu_{1j} \ge \mu_{2j} \ge 0\ ,\ j = 1,2$$

та диференціальні оператори

$$L_{jm}^k = \left(\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t},\ j,k = 1,2; m = \overline{0,2}. \tag{6}$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $a_j > 0$, $\gamma_j^2 \ge 0$, $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $\alpha_{11}^0 + \beta_{11}^0 \ne 0$, $c_{11,k} c_{21,k} > 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$,

$c_{j2,k}=\delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k-\delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k=0$, $c_{j1,j2}^{12,k}=c_{j1,j2}^{21,k}$, $j,k,m=1,2;(\mu)=((\mu)_1,(\mu)_2)$,

$c_{j1,j2}^{12,k}=\gamma_{2j}^k\alpha_{1j}^k-\gamma_{1j}^k\alpha_{2j}^k$, $c_{j1,j2}^{21,k}=\delta_{2j}^k\beta_{1j}^k-\delta_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $(\mu)_j=(\mu_{1j},\mu_{2j})$,

Припустимо, що розв'язок задачі (2)—(5) існує і задані та шукані функції є оригіналами Лапласа стосовно змінної t [5]. У зображенні за Лапласом задачі (2)—(5) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\left(\Lambda_{(\mu)_1}-q_1^2\right)u_1^*(p,r)=-a_1^{-2}f_1^*(p,r),\ r\in(R_0,R_1),\\ \left(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2\right)u_2^*(p,r)=-a_2^{-2}f_2^*(p,r),\ r\in(R_1,R_2),\\ \left(\Lambda_{(\mu)_2}-q_3^2\right)u_3^*(p,r)=-a_3^{-2}f_3^*(p,r),\ r\in(R_2,\infty)\end{gathered}\tag{7}$$

з крайовими умовами

$$\left.\left(\bar{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{11}^0\right)u_1^*(p,r)\right|_{r=R_0}=\omega_0^*(p)+\psi_{11}^0,\ \lim_{r\to\infty}\frac{du_3^*}{dr}=0\tag{8}$$

та умовами спряження

$$\begin{gathered}\left.\left[\left(\bar{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{j1}^k\right)u_k^*(p,r)-\left(\bar{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{j2}^k\right)u_{k+1}^*(p,r)\right]\right|_{r=R_k}=\\ =\omega_{jk}^*(p)+\varphi_{jk},\ j,k=1,2;\end{gathered}\tag{9}$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що

$$\psi_{11}^0\equiv\delta_{11}^0g_1^/(R_0)+\gamma_{11}^0g_1(R_0)=0 \text{ та}$$

$$\psi_{jk}\equiv\delta_{j1}^kg_k^/(R_k)+\gamma_{j1}^kg_k(R_k)-\left(\delta_{j2}^kg_{k+1}^/(R_k)+\gamma_{j2}^kg_{k+1}(R_k)\right)=0;\ j,k=1,2.$$

У протилежному випадку ми переходимо до нових початкових умов $\overline{g_1}(r)=g_1(r)+a_1r+b_1,\overline{g_2}(r)=g_2(r)+a_2r+b_2,\overline{g_3}(r)=g_3(r)+b_3$ і вибираємо a_1,a_2 та b_1,b_2,b_3 з алгебраїчної системи

$$\begin{gathered}\left.\left(\delta_{11}^0\frac{d}{dr}+\gamma_{11}^0\right)\bar{g}_1(r)\right|_{r=R_0}=0,\\ \left.\left(\delta_{j1}^k\frac{d}{dr}+\gamma_{j1}^k\right)\bar{g}_k(r)-\left(\delta_{j2}^k\frac{d}{dr}+\gamma_{j2}^k\right)\bar{g}_{k+1}(r)\right|_{r=R_k}=0,\ j,k=1,2.\end{gathered}\tag{10}$$

Якщо систему (10) переписати у вигляді

$$\left(\delta_{11}^0+\gamma_{11}^0R_0\right)a_1+\gamma_{11}^0b_1=-\psi_{11}^0,$$

$$\left(\delta_{j1}^{1}+\gamma_{j1}^{1}R_{1}\right)a_{1}+\gamma_{j1}^{1}b_{1}-\left[\left(\delta_{j2}^{1}+\gamma_{j2}^{1}R_{1}\right)a_{2}+\gamma_{j2}^{1}b_{2}\right]=-\psi_{j1}, \qquad (11)$$

$$\left(\delta_{j1}^{2}+\gamma_{j1}^{2}R_{2}\right)a_{2}+\gamma_{j1}^{2}b_{2}-\gamma_{j2}^{2}b_{3}=-\psi_{j2},\ j=1,2,$$

то безпосередньо встановлюємо, що визначник системи відмінний від нуля. Отже, система (11) має єдиний розв'язок [6], який можна одержати, наприклад, за правилами Крамера [6].

У рівностях (7)—(9) прийняті позначення:

$$u_{j}^{*}(p,r)=\int_{0}^{\infty}u_{j}(t,r)e^{-pt}dt,\ f_{j}^{*}(p,r)=\int_{0}^{\infty}f_{j}(t,r)e^{-pt}dt,\ \omega_{0}^{*}(p,r)=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\omega_{0}(t)e^{-pt}dt,\ \ \omega_{jk}^{*}(p)=\int_{0}^{\infty}\omega_{jk}(t)e^{-pt}dt,\qquad q_{j}=a_{j}^{-1}(p+\gamma_{j}^{2})^{1/2},$$

$$\overline{\alpha}_{jk}^{m}=\alpha_{jk}^{m}+p\delta_{jk}^{m},\ \ p=\sigma+is, i^{2}=-1, \overline{\beta}_{jk}^{m}=\beta_{jk}^{m}+p\gamma_{jk}^{m}.$$

Зафіксуємо ту вітку двозначної функції q_j, на якій $\operatorname{Re}q_j>0$ для $j=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)j}-q_m^2\right)v=0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_m}^{(\mu)_j}(\operatorname{ch}r)$ та другого роду $L_{\nu_m}^{(\mu)_j}(\operatorname{ch}r), \nu_m=-\dfrac{1}{2}+q_m(m=1,3)$ [4], фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\dfrac{d^2}{dr^2}-q_2^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=\operatorname{ch}q_2r$ та $v_2=\operatorname{sh}q_2r$ [7].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (7)—(9) методом функцій Коші [7; 8]:

$$u_{1}^{*}\left(p,r\right)=A_{1}P_{\nu_{1}}^{(\mu)_{1}}\left(\operatorname{ch}r\right)+B_{1}L_{\nu_{1}}^{(\mu)_{1}}\left(\operatorname{ch}r\right)+\int_{R_{0}}^{R_{1}}E_{1}^{*}\left(p,r,\rho\right)a_{1}^{-2}f_{1}^{*}\left(p,\rho\right)\operatorname{sh}\rho d\rho,$$

$$u_{2}^{*}(p,r)=A_{2}\operatorname{ch}q_{2}r+B_{2}\operatorname{sh}q_{2}r+\int_{R_{1}}^{R_{2}}E_{2}^{*}\left(p,r,\rho\right)a_{2}^{-2}f_{2}^{*}\left(p,\rho\right)d\rho, \qquad (12)$$

$$u_{3}^{*}\left(p,r\right)=B_{3}L_{\nu_{3}}^{(\mu)_{2}}\left(\operatorname{ch}r\right)+\int_{R_{2}}^{\infty}E_{3}^{*}\left(p,r,\rho\right)a_{3}^{-2}f_{3}^{*}\left(p,\rho\right)\operatorname{sh}\rho d\rho.$$

У рівностях (12) функції $E_j^*(p,r,\rho)$ — функції Коші [7, 8]:

$$E_j^*\left(p,r,\rho\right)\Big|_{r=\rho+0}-E_j^*\left(p,r,\rho\right)\Big|_{r=\rho-0}=0,\, j=\overline{1,2},$$

$$\frac{dE_j^*}{dr}\left(p,r,\rho\right)\Bigg|_{r=\rho+0}-\frac{dE_j^*}{dr}\left(p,r,\rho\right)\Bigg|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j\left(\rho\right)}, \tag{13}$$

$$\varphi_1\left(r\right)=\mathrm{sh}r,\varphi_2\left(r\right)=1,\varphi_3\left(r\right)=\mathrm{sh}r.$$

Введемо до розгляду функції:

$$Z_{\nu_1;jk}^{(\mu)_1;m1}\left(\mathrm{ch}R_m\right)=\overline{\alpha}_{jk}^{m}\mathrm{sh}R_m P_{\nu_1}^{(\mu)_1\prime}\left(\mathrm{ch}R_m\right)+\overline{\beta}_{jk}^{m}P_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_m\right),$$

$$Z_{\nu_1;jk}^{(\mu)_1;m2}\left(\mathrm{ch}R_m\right)=\overline{\alpha}_{jk}^{m}\mathrm{sh}R_m L_{\nu_1}^{(\mu)_1\prime}\left(\mathrm{ch}R_m\right)+\overline{\beta}_{jk}^{m}L_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_m\right),$$

$$F_{\nu_1;jk}^{(\mu)_1;m}\left(\mathrm{ch}R_m,\mathrm{ch}r\right)=Z_{\nu_1;jk}^{(\mu)_1;m1}\left(\mathrm{ch}R_m\right)L_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right)-Z_{\nu_1;jk}^{(\mu)_1;m2}\left(\mathrm{ch}R_m\right)P_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right),$$

$$\Delta_{\nu_1;j1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)=Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1;01}\left(\mathrm{ch}R_0\right)Z_{\nu_1;j1}^{(\mu)_1;12}\left(\mathrm{ch}R_1\right)-$$

$$-Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1;02}\left(\mathrm{ch}R_0\right)Z_{\nu_1;j1}^{(\mu)_1;11}\left(\mathrm{ch}R_1\right),$$

$$B_{(\mu)_1}\left(q_1\right)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1-\nu_1^+\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1-\nu_1^-\right)\cdot 2^{\mu_{11}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1+\nu_1^+\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1+\nu_1^-\right)\cdot 2^{\mu_{21}}},\nu_1^{\pm}=\frac{1}{2}\left(\mu_{11}\pm\mu_{21}\right).$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1^*\left(p,r,\rho\right)=\begin{cases}\overset{-}{E}{}_1^*=C_1P_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right)+D_1L_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \overset{+}{E}{}_1^*=C_2P_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right)+D_2L_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right), & R_0<\rho<r<R_1.\end{cases}$$

Властивості (13) функції Коші дають алгебраїчну систему рівнянь

$$\left(C_2-C_1\right)P_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}\rho\right)+\left(D_2-D_1\right)L_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}\rho\right)=0\,,$$

$$\left(C_2-C_1\right)P_{\nu_1}^{(\mu)_1\prime}\left(\mathrm{ch}\rho\right)+\left(D_2-D_1\right)L_{\nu_1}^{(\mu)_1\prime}\left(\mathrm{ch}\rho\right)=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2\rho}\,.$$

Звідси одержуємо співвідношення:

$$C_2-C_1=-B_{(\mu)_1}\left(q_1\right)L_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}\rho\right),D_2-D_1=B_{(\mu)_1}\left(q_1\right)P_{\nu_1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}\rho\right). \tag{14}$$

Доповнимо рівності (14) алгебраїчними рівняннями

$$\left.\left(\bar{\alpha}_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{11}^{0}\right)\overset{-}{E}_1^*\right|_{r=R_0}=0:\qquad Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,01}\left(\mathrm{ch}R_0\right)C_1+Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,02}\left(\mathrm{ch}R_0\right)D_1=0,$$
$$\left.\left(\bar{\alpha}_{11}^{1}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{11}^{1}\right)\overset{+}{E}_1^*\right|_{r=R_1}=0:\qquad Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,11}\left(\mathrm{ch}R_1\right)C_2+Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,12}\left(\mathrm{ch}R_1\right)D_2=0. \tag{15}$$

Із алгебраїчної системи (14), (15) знаходимо, що

$$C_1=-\frac{B_{(\mu)_1}\left(q_1\right)Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,02}\left(\mathrm{ch}R_0\right)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)}F_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,1}\left(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho\right),$$

$$D_1=\frac{B_{(\mu)_1}\left(q_1\right)Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,01}\left(\mathrm{ch}R_0\right)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)}F_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,1}\left(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho\right).$$

Цим функція Коші $E_1^*(p,r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_1^*\left(p,r,\rho\right)=\frac{B_{(\mu)_1}\left(q_1\right)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)}\times$$
$$\times\begin{cases}F_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,0}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r\right)F_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,1}\left(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho\right),R_0<r<\rho<R_1,\\ F_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,0}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho\right)F_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,1}\left(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r\right),R_0<\rho<r<R_1.\end{cases} \tag{16}$$

Нехай функція Коші

$$E_2^*\left(p,r,\rho\right)=\begin{cases}\overset{-}{E}_2^*\equiv C_1\mathrm{ch}q_2r+D_1\mathrm{ch}q_2r,R_1<r<\rho<R_2,\\ \overset{+}{E}_2^*\equiv C_2\mathrm{ch}q_2r+D_2\mathrm{ch}q_2r,R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}$$

Властивості (13) функції Коші дають алгебраїчну систему рівнянь

$$\left(C_2-C_1\right)\mathrm{ch}q_2\rho+\left(D_2-D_1\right)\mathrm{sh}q_2\rho=0,$$
$$\left(C_2-C_1\right)\mathrm{sh}q_2\rho+\left(D_2-D_1\right)\mathrm{ch}q_2\rho=-q_2^{-1}.$$

Звідси маємо співвідношення:

$$C_2-C_1=q_2^{-1}\mathrm{sh}q_2\rho,D_2-D_1=-q_2^{-1}\mathrm{ch}q_2\rho. \tag{17}$$

Доповнимо систему рівностей (17) алгебраїчними рівняннями

$$\left(\overline{\alpha}_{12}^{1}\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{12}^{1}\right)\overset{-}{E}{}_{2}^{*}\Big|_{r=R_1}=0:\quad \left\{\begin{array}{l} V_{12}^{11}\left(q_2R_1\right)C_1+V_{12}^{12}\left(q_2R_1\right)D_1=0, \\ V_{11}^{21}\left(q_2R_2\right)C_2+V_{11}^{22}\left(q_2R_2\right)D_2=0. \end{array}\right. \qquad (18)$$

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^{2}\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{11}^{2}\right)\overset{+}{E}{}_{2}^{*}\Big|_{r=R_2}=0:$$

Із алгебраїчної системи (17), (18) знаходимо, що

$$C_1=-\frac{V_{12}^{12}\left(q_2R_1\right)}{q_2\Delta_{11}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)}\Phi_{11}^{2}\left(q_2R_2,q_2\rho\right),$$

$$D_1=\frac{V_{12}^{11}(q_2R_1)}{q_2\Delta_{11}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)}\Phi_{11}^{2}\left(q_2R_2,q_2\rho\right).$$

Цим функція Коші $E_2^*(p,r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2^*\left(p,r,\rho\right)=-\frac{1}{q_2\Delta_{11}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)}\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\Phi_{12}^{1}\left(q_2R_1,q_2r\right)\Phi_{11}^{2}\left(q_2R_2,q_2\rho\right), R_1<r<\rho<R_2, \\ \Phi_{12}^{1}\left(q_2R_1,q_2\rho\right)\Phi_{11}^{2}\left(q_2R_2,q_2r\right),\ R_1<\rho<r<R_2.\end{array}\right. \qquad (19)$$

У рівностях (18), (19) беруть участь функції:

$$V_{jk}^{m1}\left(q_2R_m\right)=\overline{\alpha}_{jk}^{m}q_2\mathrm{sh}q_2R_m+\overline{\beta}_{jk}^{m}\mathrm{ch}q_2R_m;$$

$$V_{jk}^{m2}\left(q_2R_m\right)=\overline{\alpha}_{jk}^{m}q_2\mathrm{ch}q_2R_m+\beta_{jk}^{m}\mathrm{sh}q_2R_m;$$

$$\Phi_{jk}^{m}\left(q_2R_m,q_2r\right)=V_{jk}^{m2}\left(q_2R_m\right)\mathrm{ch}q_2r-V_{jk}^{m1}\left(q_2R_m\right)\mathrm{sh}q_2r,$$

$$\Delta_{jk}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)=V_{j2}^{11}\left(q_2R_1\right)V_{k1}^{22}\left(q_2R_2\right)-V_{j2}^{12}\left(q_2R_1\right)V_{k1}^{21}\left(q_2R_2\right),\ j,k=1,2.$$

Нехай функція Коші

$$E_3^*\left(p,r,\rho\right)=\left\{\begin{array}{ll}\overset{-}{E}{}_3^{*}\equiv C_1P_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\mathrm{ch}r\right)+D_1L_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\mathrm{ch}r\right), & R_2<r<\rho<\infty, \\ \overset{+}{E}{}_3^{*}\equiv D_2L_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\mathrm{ch}r\right), & R_2<\rho<r<\infty.\end{array}\right.$$

Властивості (13) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$-C_1P_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\mathrm{ch}\rho\right)+\left(D_2-D_1\right)L_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\mathrm{ch}\rho\right)=0\ ,$$

$$-C_1 P_{\nu_3}^{(\mu)_2\prime}\left(\text{ch}\rho\right)+\left(D_2-D_1\right)L_{\nu_3}^{(\mu)_2\prime}\left(\text{ch}\rho\right)=-\left(sh^2\rho\right)^{-1}.$$

Звідси отримаємо співвідношення:

$$C_1=B_{(\mu)_2}\left(q_3\right)L_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\text{ch}\rho\right),D_2-D_1=B_{(\mu)_2}\left(q_3\right)P_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\text{ch}\rho\right). \quad (20)$$

Доповнимо рівності (20) алгебраїчним рівнянням

$$\left(\alpha_{12}^2\frac{d}{dr}+\beta_{12}^2\right)\bar{E}_3^*\Big|_{r=R_2}=0:\ Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,21}\left(\text{ch}R_2\right)C_1+Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,22}\left(\text{ch}R_2\right)D_1=0. \quad (21)$$

Із алгебраїчної системи (20), (21) знаходимо, що

$$D_2=-\left[Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,22}\left(\text{ch}R_2\right)\right]^{-1}F_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,2}\left(\text{ch}R_2,\text{ch}\rho\right)B_{(\mu)_2}\left(q_3\right).$$

Цим функція Коші $E_3^*(p,r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_3^*(p,r,\rho)=$$

$$=-\frac{B_{(\mu)_2}\left(q_3\right)}{Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,22}\left(\text{ch}R_2\right)}\begin{cases}L_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\text{ch}\rho\right)F_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,2}\left(\text{ch}R_2,\text{ch}r\right),R_2<r<\rho<\infty,\\ L_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\text{ch}r\right)F_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,2}\left(\text{ch}R_2,\text{ch}\rho\right),R_2<\rho<r<\infty.\end{cases} \quad (22)$$

Повернемось до формул (12). Крайова умова в точці $r=R_0$ та умови спряження (9) для визначення величин $A_k\ \left(k=1,2\right)$ та $B_j\ (j=1,3)$ дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,01}\left(\text{ch}R_0\right)A_1+Z_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,02}\left(\text{ch}R_0\right)B_1=\omega_0^*\left(p\right),$$

$$Z_{\nu_1;j1}^{(\mu)_1,11}\left(\text{ch}R_1\right)A_1+Z_{\nu_1;j1}^{(\mu)_1,12}\left(\text{ch}R_1\right)B_1-V_{j2}^{11}\left(q_2R_1\right)A_2-V_{j2}^{12}\left(q_2R_1\right)B_2=$$
$$=\omega_{j1}^*\left(p\right)+\delta_{j2}G_{12}^*, \quad (23)$$

$$V_{j1}^{21}\left(q_2R_2\right)A_2+V_{j1}^{22}\left(q_2R_2\right)B_2-Z_{\nu_3;j2}^{(\mu)_2,22}\left(\text{ch}R_2\right)B_3=\omega_{j2}^*+\delta_{j2}G_{23}^*,\ j=1,2.$$

У алгебраїчній системі (23) беруть участь функції

$$G_{12}^*=\frac{c_{11}^*}{\text{sh}R_1}\int_{R_0}^{R_1}\frac{F_{\nu_1;11}^{(\mu)_1,0}\left(\text{ch}R_0,\text{ch}\rho\right)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)_1}\left(\text{ch}R_0,\text{ch}R_1\right)}a_1^{-2}f_1^*\left(p,\rho\right)\text{sh}\rho d\rho+$$

$$+c_{21}^*\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^2\left(q_2R_2,q_2\rho\right)}{\Delta_{11}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)}a_2^{-2}f_2^*\left(p,\rho\right)d\rho,$$

$$G_{23}^{*}=-c_{12}^{*}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^{1}\left(q_2R_1,q_2\rho\right)}{\Delta_{11}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)}a_2^{-2}f_2^{*}\left(p,\rho\right)d\rho+$$

$$+\frac{c_{22}^{*}\left(p\right)}{\mathrm{sh}R_2}\int_{R_2}^{\infty}\frac{L_{\nu_3}^{(\mu)_2}\left(\mathrm{ch}\rho\right)}{Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,22}\left(\mathrm{ch}R_2\right)}a_3^{-2}f_3^{*}\left(p,\rho\right)\mathrm{sh}\rho d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}\left(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1\right)$.

Введемо до розгляду функції:

$$A_{(\mu)_1;j}^{*}\left(p\right)=\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)\Delta_{2j}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)-$$

$$-\Delta_{\nu_1;21}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)\Delta_{1j}\left(q_2R_1,q_2R_2\right),$$

$$B_{(\mu)_2;j}^{*}\left(p\right)=Z_{\nu_3;22}^{(\mu)_2,22}\left(\mathrm{ch}R_2\right)\Delta_{j1}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)-$$

$$-Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,22}\left(\mathrm{ch}R_2\right)\Delta_{j2}\left(q_2R_1,q_2R_2\right),$$

$$\theta_{(\mu)_1,1}^{*}\left(p,r\right)=\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)\Phi_{22}^{1}\left(q_2R_1,q_2r\right)-$$

$$-\Delta_{\nu_1;21}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)\Phi_{12}^{1}\left(q_2R_1,q_2r\right),$$

$$\theta_{(\mu)_1,2}^{*}\left(p,r\right)=Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,22}\left(\mathrm{ch}R_2\right)\Phi_{21}^{2}\left(q_2R_2,q_2r\right)-$$

$$-Z_{\nu_3;22}^{(\mu)_2,22}\left(\mathrm{ch}R_2\right)\Phi_{11}^{2}\left(q_2R_1,q_2r\right).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі: для $\rho=\sigma+is$ з $\mathrm{Re}\,p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 — абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\mathrm{Im}\,p=s\in\left(-\infty,\infty\right)$ визначник алгебраїчної системи рівнянь (23)

$$\begin{aligned}\Delta_{(\mu)}\left(p\right)&\equiv A_{(\mu)_1;1}^{*}\left(p\right)Z_{\nu_3;22}^{(\mu)_2,22}\left(\mathrm{ch}R_2\right)-A_{(\mu)_1;2}^{*}\left(p\right)Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2,22}\left(\mathrm{ch}R_2\right)=\\&=\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)B_{(\mu)_2;2}^{*}\left(p\right)-\Delta_{\nu_1;21}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)B_{(\mu)_2;1}^{*}\left(p\right)\neq0.\end{aligned}\qquad(24)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (7)—(9):

1) породжені неоднорідністю крайової умови в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{(\mu);11}^{*}\left(p,r\right)=\frac{1}{\Delta_{(\mu)}\left(p\right)}\Big[B_{(\mu)_2;1}^{*}\left(p\right)F_{\nu_1;21}^{(\mu)_1;1}\left(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r\right)-$$

$$-B^{*}_{(\mu)_2;2}(p)\,F^{(\mu)_1;1}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r)\Big],$$

$$W^{*}_{(\mu);12}(p,r)=-\frac{c^{*}_{11}(p)}{B_{(\mu)_1}(q_1)\mathrm{sh}R_1}\frac{1}{\Delta_{(\mu)}(p)}\theta^{*}_{(\mu)_2;2}(p,r), \tag{25}$$

$$W^{*}_{(\mu);13}(p,r)=-\frac{c^{*}_{11}(p)}{B_{(\mu)_1}(q_1)\mathrm{sh}R_1}\frac{c^{*}_{12}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}r)\,;$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{1*}_{(\mu);11}(p,r)=\frac{B^{*}_{(\mu)_2;2}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}F^{(\mu)_1,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{R}^{1*}_{(\mu);21}(p,r)=-\frac{B^{*}_{(\mu)_2;1}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}F^{(\mu)_1,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{R}^{1*}_{(\mu);12}(p,r)=-\frac{c^{*}_{21}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}Z^{(\mu)_2,22}_{\nu_3;22}(\mathrm{ch}R_2)\,F^{(\mu)_1,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{R}^{1*}_{(\mu);22}(p,r)=\frac{c^{*}_{21}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}Z^{(\mu)_2,22}_{\nu_3;12}(\mathrm{ch}R_2)\,F^{(\mu)_1,0}_{\nu_1;12}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{R}^{2*}_{(\mu);11}(r,p)=-\frac{\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_1;21}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\theta^{*}_{(\mu)_2;2}(p,r),$$

$$\mathcal{R}^{2*}_{(\mu);21}(r,p)=\frac{\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\theta^{*}_{(\mu)_2;2}(p,r), \tag{26}$$

$$\mathcal{R}^{2*}_{(\mu);12}(p,r)=-\frac{Z^{(\mu)_2,22}_{\nu_3;22}(\mathrm{ch}R_2)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\theta^{*}_{(\mu)_1,1}(p,r),$$

$$\mathcal{R}^{2*}_{(\mu);22}(p,r)=\frac{Z^{(\mu)_2,22}_{\nu_3;12}(\mathrm{ch}R_2)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\theta^{*}_{(\mu)_1,1}(p,r),$$

$$\mathcal{R}^{3*}_{(\mu);11}(p,r)=-\frac{c^{*}_{12}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_1;21}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)\,L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{R}^{3*}_{(\mu);21}(p,r)=\frac{c^{*}_{12}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{R}^{3*}_{(\mu);12}(p,r)=\frac{A^{*}_{(\mu)_1,2}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{R}^{3*}_{(\mu);22}(p,r)=-\frac{A^{*}_{(\mu)_1,1}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}r);$$

3) породжені неоднорідністю системи (7) функції впливу

$$\mathcal{H}^{*}_{(\mu);11}(p,r,\rho)=$$

$$=-B_{(\mu)_1}(q_1)\begin{cases}F^{(\mu)_1,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r)W^{*}_{(\mu),11}(p,\rho), R_0<r<\rho<R_1,\\ F^{(\mu)_1,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)W^{*}_{(\mu),11}(p,r), R_0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}^{*}_{(\mu);12}(p,r,\rho)=\frac{c^{*}_{21}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}F^{(\mu)_1,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r)\theta^{*}_{(\mu)_2;2}(p,\rho),$$

$$\mathcal{H}^{*}_{(\mu);13}(p,r,\rho)=\frac{c^{*}_{21}(p)q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}\frac{c^{*}_{22}}{\mathrm{sh}R_2}F^{(\mu)_1,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}\rho),$$

$$\mathcal{H}^{*}_{(\mu);21}(p,r,\rho)=\frac{c^{*}_{11}}{\mathrm{sh}R_1}\frac{1}{\Delta_{(\mu)}(p)}F^{(\mu)_1,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)\theta^{*}_{(\mu)_2;2}(p,r),$$

$$\mathcal{H}^{*}_{(\mu);22}(p,r,\rho)=$$

$$=\frac{1}{q_2\Delta_{(\mu)}(p)}\begin{cases}\theta^{*}_{(\mu)_1,1}(p,r)\theta^{*}_{(\mu)_2,2}(p,\rho), R_1<r<\rho<R_2,\\ \theta^{*}_{(\mu)_1,1}(p,\rho)\theta^{*}_{(\mu)_2,2}(p,r), R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}^{*}_{(\mu);23}(p,r,\rho)=\frac{c^{*}_{22}}{\mathrm{sh}R_2\Delta_{\mu}(p)}\theta^{*}_{(\mu)_1,1}(p,r)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}\rho), \qquad (27)$$

$$\mathcal{H}^{*}_{(\mu);31}(p,r,\rho)=\frac{c^{*}_{12}(p)}{\mathrm{sh}R_1}\frac{c^{*}_{11}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}F^{(\mu)_1;0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{H}^{*}_{(\mu);32}(p,r,\rho)=\frac{c^{*}_{12}}{\Delta_{(\mu)}(p)}\theta^{*}_{(\mu)_1,1}(p,\rho)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{H}^{*}_{(\mu);33}(p,r,\rho)=\frac{B_{(\mu)_2}(q_3)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\begin{cases}L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}\rho)\Big[A^{*}_{(\mu)_1;2}(p)F^{(\mu)_2;2}_{\nu_1;12}(\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}r)-\\ L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}r)\Big[A^{*}_{(\mu)_1;2}(p)F^{(\mu)_2;2}_{\nu_1;12}(\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)-\end{cases}$$

$$-A^{*}_{(\mu)_1;1}(p)F^{(\mu)_2;2}_{\nu_1;22}(\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}r)\Big],R_2<r<\rho<\infty,$$

$$-A^{*}_{(\mu)_1;1}(p)F^{(\mu)_2;2}_{\nu_1;22}(\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)\Big],R_2<\rho<r<\infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (23) в силу умови (24) і підстановки отриманих значень величин A_j та B_j у формули (12), маємо єдиний розв'язок крайової задачі (7)—(9):

$$u^{*}_{j}(p,r)=W^{*}_{(\mu);1j}(p,r)\omega^{*}_{0}(p)+\sum_{k,m=1}^{2}\mathcal{R}^{j*}_{(\mu),km}(p,r)\omega^{*}_{km}(p)+$$

$$+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}^{*}_{(\mu);j1}(p,r,\rho)a_1^{-2}f_1^{*}(p,\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^{*}_{(\mu);j2}(p,r,\rho)a_2^{-2}\times \quad (28)$$

$$\times f_2^{*}(p,\rho)d\rho+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}^{*}_{(\mu);j3}(p,r,\rho)a_3^{-2}f_3^{*}(p,\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho\,,\, j=\overline{1,3}\,.$$

Повертаючись до оригіналу за Лапласом, одержуємо єдиний розв'язок параболічної крайової задачі (2)—(5):

$$u_j(t,r)=\int_0^t W_{(\mu);1j}(t-\tau,r)\omega_0(\tau)d\tau+\sum_{k,m=1}^{2}\int_0^t\mathcal{R}^{j}_{(\mu),km}(t-\tau,r)\omega_{km}(\tau))d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{(\mu);j1}(t-\tau,r,\rho)a_1^{-2}f_1(\tau,\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{(\mu);j2}(t-\tau,r,\rho)a_2^{-2}f_2(\tau,\rho)d\rho d\tau+ \quad (29)$$

$$+\int_0^t\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{(\mu);j3}(t-\tau,r,\rho)a_3^{-2}f_3(\tau,\rho)d\rho d\tau,\ j=\overline{1,3},$$

У рівностях (24) за означенням [4] застосовано функції

$$W_{(\mu);1j}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}W^{*}_{(\mu);1j}(p,r)e^{pt}dp,\ j=1,2,3; \quad (30)$$

$$\mathcal{R}^{j}_{(\mu);km}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathcal{R}^{j*}_{(\mu);km}(p,r)e^{pt}dp,\ k,m=1,2,\ j=\overline{1,3}\,; \quad (31)$$

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}\left(t,r,\rho\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathcal{H}^{*}_{(\mu);jk}\left(p,r,\rho\right)e^{pt}dp,\ ,j,k=\overline{1,3}\,. \quad (32)$$

Подамо коректний для дослідження (розрахунку) вираз головних розв'язків розглянутої параболічної крайової задачі: функцій Гріна $W_{(\mu);1j}\left(t,r\right)$, породжених крайовою умовою в точці $r=R_0$; функцій Гріна $\mathcal{R}^{j}_{(\mu);km}\left(t,r\right)$, породжених неоднорідністю умов спряження; та функцій впливу $\mathcal{H}_{(\mu);jk}\left(t,r,\rho\right)$, породжених неоднорідністю системи (2).

Особливими точками функцій $W^{*}_{(\mu);1j}\left(p,r\right)$, $\mathcal{R}^{j*}_{(\mu),km}(p,r)$ та $\mathcal{H}^{*}_{(\mu),jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_1^2$, $p=-\gamma_2^2$, $p=-\gamma_3^2$ та $p=\infty$. Всі ці точки знаходяться на від'ємній частині дійсної осі $\mathrm{Re}p=\sigma$. Це дає нам право «сісти на уявну вісь» і одержати розрахункові формули:

$$W_{(\mu);1j}\left(t,r\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[W^{*}_{(\mu);1j}\left(is,r\right)e^{ist}\right]ds,\ j=\overline{1,3}\,, \quad (33)$$

$$\mathcal{R}^{j}_{(\mu);km}\left(t,r\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[\mathcal{R}^{j*}_{(\mu);mk}\left(is,r\right)e^{ist}\right]ds,\ k,m=1,2,j=\overline{1,3}\,, \quad (34)$$

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}\left(t,r,\rho\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[\mathcal{H}^{*}_{(\mu);jk}\left(is,r,\rho\right)e^{ist}\right]ds,\ j,k=\overline{1,3}\,. \quad (35)$$

У рівностях (33)—(35) Re[...] означає дійсну частину від виразу [...].

Формули (33)—(35) зручні для використання в інженерних розрахунках, але не є компактними стосовно аналітичних досліджень.

Подамо структуру головних розв'язків розглянутої параболічної крайової задачі у вигляді функціональних рядів. Покладемо

$$q_j=ia_j^{-1}\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2},\ k_j^2=\gamma^2-\gamma_j^2\ge 0,\ \text{де}\ \gamma^2=\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}.$$

Тоді

$$p=-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\equiv\left(\beta^2+\gamma^2\right)\exp\left(\pi i\right),\quad dp=-2\beta d\beta\,;$$ i — уявна одиниця.

При $\tilde{\alpha}^m_{kj}=\alpha^m_{kj}-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\delta^m_{kj}$, $\tilde{\beta}^m_{kj}=\beta^m_{kj}-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\gamma^m_{kj}$ маємо:

$$V^{m1}_{jk}\left(ib_sR_m\right)=-\tilde{\alpha}^m_{jk}b_s\sin b_sR_m+\tilde{\beta}^m_{jk}\cos b_sR_m\equiv v^{m1}_{jk}\left(b_sR_m\right),$$

$$V_{jk}^{m2}\left(ib_s R_m\right)=i\left[\tilde{\alpha}_{jk}^{m} b_s \cos b_s R_m+\tilde{\beta}_{jk}^{m} \sin b_s R_m\right] \equiv i v_{jk}^{m2}\left(b_s R_m\right),$$

$$\Phi_{jk}^{m}\left(ib_s R_m, ib_s r\right)=$$

$$=i\left[v_{jk}^{m2}\left(b_s R_m\right)\cos b_s r-v_{jk}^{m1}\left(b_s R_m\right)\sin b_s r\right] \equiv i\varphi_{jk}^{m}\left(b_s R_m, b_s r\right),$$

$$\Delta_{jk}\left(ib_2 R_1, ib_2 R_2\right)=$$

$$=i\left[v_{j2}^{11}\left(b_2 R_1\right)v_{k1}^{22}\left(b_2 R_2\right)-v_{j2}^{12}\left(b_2 R_1\right)v_{k1}^{21}\left(b_2 R_2\right)\right] \equiv i\delta_{jk}\left(b_2 R_1, b_2 R_2\right).$$

Скористаємося тим, що приєднані функції Лежандра

$$P_{\nu_m^*}^{(\mu)_j}\left(\mathrm{ch}r\right)=A_{\nu_m^*}^{(\mu)_j}\left(\mathrm{ch}r\right)\sin\mu_{1j}\pi+B_{\nu_m^*}^{(\mu)_j}\left(\mathrm{ch}r\right)\cos\mu_{1j}\pi\,,\ \nu_m^*=-1/2+ib_m\,,$$

$$L_{\nu_m^*}^{(\mu)_j}\left(\mathrm{ch}r\right)=A_{\nu_m^*}^{(\mu)_j}\left(\mathrm{ch}r\right)-\gamma_{(\mu)_j}\left(b_m\right)B_{\nu_m^*}^{(\mu)_j}\left(\mathrm{ch}r\right),$$

де $A_{\nu_m^*}^{(\mu)_j}(\mathrm{ch}r)$ та $B_{\nu_m^*}^{(\mu)_j}(\mathrm{ch}r)$ — дві дійсні приєднані функції Лежандра дійсної змінної [4],

$$\gamma_{(\mu)_j}\left(b_m\right)=\frac{\cos\mu_{1j}\pi\mathrm{sh}2\pi b_m}{\cos\mu_{2j}\pi+\cos\mu_{1j}\pi\mathrm{ch}2\pi b_m}.$$

Безпосередньо встановлюємо, що

$$Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu)_1;m1}\left(\mathrm{ch}R_m\right)=\left(\tilde{\alpha}_{j1}^{m}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^{m}\right)A_{\nu_1^*}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right)\Big|_{r=R_m};$$

$$Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu)_1;m2}\left(\mathrm{ch}R_m\right)=\left(\tilde{\alpha}_{j1}^{m}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^{m}\right)B_{\nu_1^*}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right)\Big|_{r=R_m};$$

$$Z_{\nu_1^*;jk}^{(\mu)_1;m2}\left(\mathrm{ch}R_m\right)=Y_{\nu_1^*;jk}^{(\mu)_1;m1}\left(\mathrm{ch}R_m\right)\sin\mu_{j1}\pi+Y_{\nu_1^*;jk}^{(\mu)_1;m2}\left(\mathrm{ch}R_m\right)\cos\mu_{j1}\pi;$$

$$Z_{\nu_1^*;jk}^{(\mu)_1;m2}\left(\mathrm{ch}R_m\right)=Y_{\nu_1^*;jk}^{(\mu)_1;m1}\left(\mathrm{ch}R_m\right)-i\gamma_{(\mu)_1}\left(b_1\right)Y_{\nu_1^*;jk}^{(\mu)_1;m2}\left(\mathrm{ch}R_m\right);$$

$$\Delta_{\nu_1^*;jk}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)=-\left(\cos\mu_{11}\pi+i\gamma_{(\mu)_1}\left(b_1\right)\sin\mu_{11}\pi\right)\delta_{\nu_1^*;j1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right);$$

$$\delta_{\nu_1^*;j1}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)=Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1;01}\left(\mathrm{ch}R_0\right)Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu)_1;12}\left(\mathrm{ch}R_1\right)-Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1;02}\left(\mathrm{ch}R_0\right)\times$$

$$\times Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu)_1;11}\left(\mathrm{ch}R_1\right);$$

$$F_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1;m}\left(\mathrm{ch}R_m,\mathrm{ch}r\right)=$$

$$=-\left(\cos\mu_{11}\pi+i\gamma_{(\mu)_1}\left(b_1\right)\sin\mu_{11}\pi\right)f_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1;m}\left(\mathrm{ch}R_m,\mathrm{ch}r\right),$$

$$f_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1;m}\left(\mathrm{ch}R_m,\mathrm{ch}r\right)=Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1;m1}\left(\mathrm{ch}R_m\right)B_{\nu_1^*}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right)-Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1;m2}\left(\mathrm{ch}R_m\right)A_{\nu_1^*}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}r\right);$$

$$A_{(\mu)_1;j}^{*}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right)\right)=-i\left(\cos\mu_{11}\pi+i\gamma_{(\mu)_1}\left(b_1\right)\sin\mu_{11}\pi\right)\left[\delta_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\delta_{2j}\left(b_2R_1,b_2R_2\right)-\delta_{\nu_1^*;21}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)\delta_{1j}\left(b_2R_1,b_2R_2\right)\right]\equiv-i\gamma_2a_{(\mu)_1;j}\left(\beta\right);$$

$$B_{(\mu)_2;j}^{*}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right)\right)=i\left\{\left[Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)_2;21}\left(\mathrm{ch}R_2\right)\delta_{j1}\left(b_2R_1,b_2R_2\right)-\right.\right.$$

$$\left.-Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)_2;21}\left(\mathrm{ch}R_2\right)\delta_{j2}\left(b_2R_1,b_2R_2\right)\right]-$$

$$-i\gamma_{(\mu)_2}(b_3)\left[Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)_2;22}\left(\mathrm{ch}R_2\right)\delta_{j1}\left(b_2R_1,b_2R_2\right)-\right.$$

$$\left.\left.-Y_{\nu_3^*;12}^{(\mu)_2;21}\left(\mathrm{ch}R_2\right)\delta_{j2}\left(b_2R_1,b_2R_2\right)\right]\right\}\equiv i\left[b_{(\mu)_2;j1}\left(\beta\right)-i\gamma_{(\mu)_2}\left(b_3\right)b_{(\mu)_2;j2}\left(\beta\right)\right];$$

$$\Delta_{(\mu)}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right)\right)=-i\gamma_2\left\{\left[a_{(\mu)_1;1}\left(\beta\right)Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)_2;21}\left(\mathrm{ch}R_2\right)-a_{(\mu)_1;2}\left(\beta\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times Y_{\nu_3^*;12}^{(\mu)_2;21}\left(chR_2\right)\right]-i\gamma_{(\mu)_2}\left(b_3\right)\left[a_{(\mu)_1;1}\left(\beta\right)Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)_2;22}\left(\mathrm{ch}R_2\right)-a_{(\mu)_1;2}\left(\beta\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times Y_{\nu_3^*;12}^{(\mu)_2;22}\left(chR_2\right)\right]\right\}\equiv-i\gamma_2\left[\omega_{(\mu);1}\left(\beta\right)-i\gamma_{(\mu)_2}\left(b_3\right)\omega_{(\mu);2}\left(\beta\right)\right];$$

$$\omega_{(\mu);j}\left(\beta\right)=\delta_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)b_{(\mu)_2;2j}\left(\beta\right)-\delta_{\nu_1^*;21}^{(\mu)_1}\left(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1\right)b_{(\mu)_2;1j}\left(\beta\right),$$

$$j=1,2.$$

Для цього випадку особливих точок формули (30)—(32) методом контурного інтегралу перетворимо до «робочих»:

$$W_{(\mu);1j}\left(t,r\right)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty I_m\left\{W_{(\mu);1j}^{*}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right),r\right)\right\}e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\beta d\beta,\ j=\overline{1,3},\quad(36)$$

$$W_{(\mu);km}^{j}\left(t,r\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty I_m\left\{R_{(\mu);km}^{j*}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right),r\right)\right\}e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\beta d\beta,k,m=1,2;\ j=\overline{1,3},\quad(37)$$

$$H_{(\mu);jk}\left(t,r,\rho\right)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty I_m\left\{H_{(\mu);1j}^{*}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right)),r,\rho\right)\right\}e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\beta d\beta,\quad(38)$$

$$j,k=\overline{1,3}.$$

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_1 = \frac{c_{11,1}}{c_{21,1}} \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}} \frac{\mathrm{sh}R_2}{\mathrm{sh}R_1} \frac{1}{a_1^2},\ \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}} \frac{\mathrm{sh}R_2}{a_2^2},\ \sigma_3 = \frac{1}{a_3^2},$$

$$V_{(\mu);1}(r,\beta) = \frac{c_{21,1}c_{21,2}b_2}{\mathrm{sh}R_2 S_{(\mu)_2}(b_3)} f_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1;0}(\mathrm{ch}R_0, \mathrm{ch}r), c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k,$$

$$V_{(\mu);2}(r,\beta) = \frac{c_{21,2}}{\mathrm{sh}R_2 S_{(\mu)_2}(b_3)} \Big[\delta_{\nu_1^*;11}^{(\mu)_1}(\mathrm{ch}R_0, \mathrm{ch}R_1) \varphi_{22}^1(b_2R_1, b_2r) -$$

$$- \delta_{\nu_1^*;21}^{(\mu)_1}(chR_0, chR_1) \varphi_{12}^1(b_2R_1, b_2r) \Big],$$

$$V_{(\mu);3}(r,\beta) = \omega_{(\mu);1}(\beta) B_{\nu_3^*}^{(\mu)_2}(chr) - \omega_{(\mu);2}(\beta) A_{\nu_3^*}^{(\mu)_2}(chr),$$

$$\nu_3^* = -1/2 + ib_3,$$

$$\Omega_{(\mu)}(\beta) = \frac{\beta \gamma_{(\mu)_2}(b_3) S_{(\mu)_2}(b_3)}{\left[\omega_{(\mu);1}(\beta)\right]^2 + \left[\gamma_{(\mu)_2}(b_3)\omega_{(\mu);2}(\beta)\right]^2},$$

$$S_{(\mu)_2}(b_3) =$$

$$= \frac{2^{\mu_{12}} \pi^3 \gamma_{(\mu)_2}(b_3)}{2^{\mu_{22}} \mathrm{sh} 2\pi b_3 \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + ib_3 + \frac{1}{2}(\mu_{12} + \mu_{22})\right) \right|^2 \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + ib_3 + \frac{1}{2}(\mu_{12} - \mu_{22})\right) \right|^2}.$$

У результаті виконання зазначених в рівностях (36)—(38) операцій одержуємо, що

$$H_{(\mu);jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} V_{(\mu);j}(r,\beta) V_{(\mu);k}(\rho,\beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta a_k^2 \sigma_k,$$

$$j,k = \overline{1,3}; \tag{39}$$

$$W_{(\mu);1j}(t,r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} \left(-\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1} V_{(\mu);1}(R_0,\beta) V_{(\mu);j}(r,\beta) \times$$

$$\times \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta a_1^2 \sigma_k \mathrm{sh}R_0,\ j = \overline{1,3}; \tag{40}$$

$$R_{(\mu);1k}^j(t,r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty Z_{(\mu);22}^k(\beta) V_{(\mu);j}(r,\beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} d\beta h_k, \tag{41}$$

$$k = 1,2,\ j = \overline{1,3};$$

$$R^{j}_{(\mu);2k}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}Z^{k}_{(\mu);12}(\beta)V_{(\mu);j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta h_k, \tag{42}$$

$$k=1,2;\ j=\overline{1,3},$$

де

$$h_1=\frac{a_1^2\sigma_1\mathrm{sh}R_1}{c_{11,1}},h_2=\frac{a_2^2\sigma_2}{c_{11,2}},$$

$$Z^{k}_{(\mu);i2}(\beta)=\left(\tilde{\alpha}^{k}_{i2}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}^{k}_{i2}\right)V_{(\mu);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k},i=1,2.$$

У вигляді (39)—(42) головні розв'язки параболічної крайової задачі (2)—(5) зручні як для теоретичних досліджень, так і для інженерних розрахунків. При цьому параметри, що беруть участь у формулюванні задачі, дають можливість у рамках даної моделі безпосередньо із загальних структур виділити будь-який практично важливий випадок.

Висновок. Функція $u(t,r)=\{u_1(t,r),u_2(t,r),u_3(t,r)\}$ визначає інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку задачі моделювання дифузійних процесів у неоднорідному середовищі з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра-Фур'є-Лежандра на полярній осі $r\ge R_0>0$ з двома точками спряження.

Зауваження. При $\delta^m_{jk}=0,\ \ \gamma^m_{jk}=0$ безпосередньо із загальних структур одержуємо випадок, коли межа середовища жорстка по відношенню до відбиття хвиль.

Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
3. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра-Фур'є-Фур'є на сегменті $[R_0;R_3]$ полярної осі / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Вісник Кам'янець-Подільського нац. ун-ту. Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т, 2008. — Вип. 1. — С. 126—133.
4. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.

5. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Физматгиз, 1963. — 431 с.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
8. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

By an operating method it is get the integral presentation of exact analytical solution of algorithmic character of problem about diffusion processes in non-homogeneous environments with soft bounds in the case of the modeling of diffusion processes is realized by the method of hybrid differential Legendres-Fourier-Legendres operator.

Key words: *hybrid differential operator, fundamental system of solution, Cauchy functions, Green functions, influence functions, boundary-value problem.*

Отримано: 16.09.2010

УДК 004.415.24

А. М. Кудин, канд. техн. наук
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТЕГАНОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА БАЗЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

Статья посвящена исследованию проблемы построения математической модели для оценки стойкости стеганографических систем, адекватной практическим приложениям. В отличии от существующих, предложенная модель не предполагает априорное знание распределения контейнеров или существование совершенного оракула.

Ключевые слова: *стеганография, стойкость стеганографических систем, общая теория оптимальных алгоритмов, радиус иформации.*

Введение. Широкое использование методов компьютерной стеганографии в современных системах защиты информации определяет актуальность задачи построения формальных методов анализа стойкости стеганографических систем к различным атакам. При этом желательно получить с одной стороны как можно более общие модели, с другой — хорошо применимые в практических ситуациях.

