УДК 519.6

С. Ю. Протасов, ассистент
Черкасский государственный технологический университет,
г. Черкассы

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В статье рассматриваются вопросы применения интегрального метода исследования линейных динамических систем с переменными параметрами, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, аналитическое решение которых сложно. При решении задачи в численном виде, вычислительные сложности резко возрастают при повышении порядка системы.

Ключевые слова: *одномерная система, импульсная переходная функция.*

Введение. Изменение параметров является принципиальным фактором функционирования системы, а также во множестве задач исследования систем при линеаризации исходной нелинейной системы относительно опорной траектории, при решении систем уравнений чувствительности выходных координат нелинейных систем к возмущениям параметров и начальных условий и во многих других случаях.

В работе рассматриваются вопросы применения интегрального метода исследования линейных динамических систем с переменными параметрами, процессы в которых традиционно описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, аналитическое решение которых весьма затруднено. При решении задачи в численном виде вычислительные трудности резко возрастают при повышении порядка системы.

Следует отметить, что применяемые в настоящее время в механике, технике автоматического управления, радиотехнике и других смежных отраслях системы с переменными параметрами в своем большинстве относятся к классу так называемых систем с медленно меняющимися параметрами, или квазистационарных систем, у которых коэффициенты дифференциального уравнения несущественно изменяют свои значения за время эффективной длительности импульсной переходной функции (время от начала процесса до момента, когда процесс можно считать полностью затухшим). Этот класс задач также свидетельствует о важности разработки чисельных и аналитических эффективных методов решения, особенно посредством получения такой исчерпывающей характеристики системы, как импульсная переходная функция (ИПФ) [2; 3].

Определение импульсной переходной функции системы важно с двух точек зрения. Во-первых, импульсная переходная функция непосредственно характеризует качественные и некоторые количественные характеристики процессов в системе (такие, как апериодичность или колебательность, скорость затухания и форму огибающей процесса, экстремумы и нули процесса, и т.д.). Во-вторых, и это более существенно, имея нормальные и особенно сопряженные импульсные реакции системы, представляется возможность строить выходные процессы системы по заданным входным, не производя каждый раз полного решения задачи; оценивать системы по статистическим показателям качества; применять оценки качества, основанные при рассмотрении реакции на воздействие, заданное только по модулю, и производить ряд других операций, связанных с анализом и синтезом систем [4; 5].

Изложение основного материала. Рассмотрим уравнение состояния линейной динамической системы с переменными параметрами, процессы в которой описываются системой линейных дифференциальных уравнений с переменными во времени коэффициентами. Здесь мы будем рассматривать одномерную систему вида:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\,\frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\,\frac{d^j x(t)}{dt^j}, \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$y_0^{(k)}(0) = y^{(k)}(0),\ k = 0,1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

в которой коэффициент при старшей производной $a_n(t)\neq 0$ на интервале $[0, t]$ и может быть представлен в виде:

$$a_n\left(t\right) = \varphi_n\left(t\right), \tag{3}$$

где $\varphi_n(t)$ — безразмерная функция, определяющая зависимость a_n от времени.

При этих предположениях делением на $\varphi_n(t)$ система (1) приводится к виду:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,\frac{d^k y(t)}{dt^k} = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(t)\frac{d^k y(t)}{dt^k}, \tag{4}$$

где

$$f = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j(t)\,\frac{d^j x(t)}{dt^j},\ \gamma_j(t) = b_j(t)\,/\,\varphi_n(t), \tag{5}$$

$$a_k(t)\,/\,\varphi_n(t) = \alpha_k + \beta_k(t), \tag{6}$$

$\alpha_k = a_k(0)/\varphi_n(0)$ — для непериодических функций (6) и $\alpha_k = \frac{1}{T}\int_0^T a_k(t)/\varphi_n(t)\,dt$ – для периодических(7).

Далее уравнение (4) можно представить в виде системы (n_{it}+1) дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами α_k:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{d^k y_0(t)}{dt^k} = f(t)\,,\; y_0^{(k)}(0) = y^{(k)}(0),\; k = 0,1,...,n-1\,, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{d^k y_i(t)}{dt^k} = -\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(t) \frac{d^k y_{i-1}(t)}{dt^k} = f_i\,, \qquad y_i^{(k)}(0) = 0,\; i = 1,2,...,n_{it}. \tag{9}$$

$$y_i = \int_0^t g_0(t-\xi)\, f_i(\xi)\, d\xi,\; i \ge 1, \tag{10}$$

где $g_0(t–o)$ — импульсная переходная функция нулевой системы при входном сигнале $f(t) = \partial(t–o)$. При этом

$$g_0^{(k)}\left(0\right) = 0, k = 0,1,\ldots,n-2, \tag{11}$$

что позволяет получить простую формулу для вычисления производных $y_i^{(k)}(t)$ путем дифференцирования (11) по t:

$$\frac{d^k y_i}{dt^k} = \int_0^t f_i(\xi) \frac{d^k g_0}{dt^k}\Big|_{t=t-\xi} d\xi,\; k = 0,1,2,...,n-1. \tag{12}$$

Меняя в (9) порядок суммирования и интегрирования, получим

$$f_i = -\int_0^t g(t,\xi) f_{i-1}(\xi) d\xi,\; i > 2, \tag{13}$$

где весовая параметрическая функция

$$g(t,\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(t) \frac{d^k g_0}{dt^k}\Big|_{t=t-\tau} \tag{14}$$

равная 0 при $t < \tau$, может быть вычислена заранее.

Решение системы (8) записывается в виде суммы свободной и вынужденной составляющих:

$$y_0 = y_{0c} + \int_0^t g_0(t-\xi)\, f\,(\xi)\, d\xi, \tag{15}$$

где компонента y_{0c} — решение соответствующего однородного уравнения (8).

Сравнивая (8), (9), (15) с исходным уравнением (1), можно показать, что частичная сумма

$$S_{n_{it}}(t) = \sum_{i=0}^{n_{it}} y_i,\ S_{n_{it}}^{(k)}(0) = y^{(k)}(0),\ k = 0,1,...,n-1 \tag{16}$$

является n_{it}-ым приближением решения системы (1), причём

$$\lim S_{n_{it}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \ = y(t). \tag{17}$$

Введя обозначение

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i, \tag{18}$$

из (10) и (17) получим для определения, так называемого, эквивалентного входного сигнала $v(t)$, интегральное уравнение Вольтерры второго рода с ядром (14), зависящим от всех переменных коэффициентов $\beta_k(t)$ и нулевой импульсной реакции $g_0\,(t)$:

$$v(t) = f_1(t) - \int_0^t g(t,\xi)\, v(\xi)\ d\xi. \tag{19}$$

Искомое решение уравнения (1) определяется выражением:

$$y = y_0 + \int_0^t g_0(t-\xi)\, v\ (\xi)\, d\xi. \tag{20}$$

Формулы (14), (15), (18), (19) и (20) позволяют найти выходной сигнал системы (1) с переменными параметрами $a_k(t)$ при любых кусочно-непрерывных f и $\beta_k(t)$ без ограничения на скорости изменения параметров. При этом основой методики является [6] решение интегрального уравнения (19). Оно может быть найдено методом последовательных приближений согласно (18) или другими, в том числе чисельными методами. После того, как эквивалентный входной сигнал определен, исследование параметрической системы проводится известными методами теории систем с постоянными параметрами.

Решение уравнения (19) может быть записано в другом виде. Вычисляя последовательно внешние воздействия по (13) и затем, суммируя их, получим

$$v(t) = f_1(t) + \int_0^t R(t,\xi)\, f_1(\xi)\, d\xi, \tag{21}$$

где резольвента $R(t,\tau)$ интегрального уравнения (19) удовлетворяет, в свою очередь, двум интегральным уравнениям [6]:

$$R(t,\tau) = -g(t,\tau) - \int_0^t g(t,\xi) R(\xi,\tau)\ d\xi$$

или

$$R(t,\tau)=-g(t,\tau)-\int_0^t g(\xi,\tau)R(t,\xi)\ d\xi.$$

Особенность последних уравнений состоит в том, что свободный член определяется ядром интегрального уравнения, что облегчает их решение по сравнению с (19).

Для системы с нулевыми начальными условиями (2) эквивалентный входной сигнал связан с внешним воздействием $f(t)$ соотношением:

$$v(t)=\int_0^t R(t,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{22}$$

а главная интегральная зависимость между входом и выходом представляется в виде:

$$y(t)=\int_0^t g_f(t,)f(\xi)\ d\xi,$$

где $g_f(t,o)$ — полная импульсная реакция системы (1):

$$g_f(t,\tau)=g_0(t-\tau)+\int_\tau^t g_0(t-\tau)R(\xi,\tau)d\xi,$$

С использованием резольвенты может быть найдена параметрическая импульсная реакция

$$g_p(t,\ \tau)=\int_\tau^t g_0\,(t-\xi)\ R(\xi,\tau)d\xi,$$

и полная импульсная реакция

$$g_f(t,\tau)=g_0(t-\tau)+g_p(t,\tau),$$

которая удовлетворяет интегральное уравнение

$$g_f(t,\ \tau)=g_0\,(t-\tau)-\sum_{k=0}^{n-1}\int_\tau^t \beta_k\,(\xi)g_0\,(t-\xi)\frac{\partial^k g_f(t,\tau)}{\partial t^k}\Big|_{t=\xi}d\xi, \tag{23}$$

справедливо для всех кусочно-непрерывных функций $\beta_k(t)$. Если $\beta_k(t)$ дифференцируемы k раз, то уравнение (23) приводится к виду:

$$g_f(t,\ \tau)=g_0\,(t-\tau)-\int_\tau^t G(t,\ \xi)\ g_f\,(\xi,\tau)d\xi,$$

где ядро определяется выражением

$$G(t,\ \xi)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\ \frac{d^k}{d\xi^k}\left[\beta_k\,(\xi)\,g_0(t-\xi)\right].$$

Отметим, что если ни в одном из коэффициентов $a_k(t)$ не выделяется постоянная часть, т.е. $\alpha_k=0,\ \beta_k(t)=a_k(t),\ k=0,1,...,n-1,$ в этом случае имеем:

$$g_0\left(t\right)=t^{n-1}/\left(a_n\left(n-1\right)!\right),$$

$$g(t,\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(t)}{a_k}\frac{(t-\tau)^{n-1-k}}{\left(n-1-k\right)!}.$$

Если $x(t)$ — $(m–1)$ раз дифференцируемая на интервале $[\tau, t]$ функция и

$$\left.\frac{d^j x}{dt^j}\right|=0,\ t<\tau,\qquad e(t)=x(t),\ t>\tau,$$

$$\left.\frac{d^j x}{dt^j}\right|_{t=\tau}=x^{(j)}(\tau),\quad (j=0,1,...,m),$$

то вход $x(t)$ определяется как $x(t)=e(t)1(t–\tau)$, а правую часть (1) можно записать в виде:

$$f(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j(t)\frac{d^j e}{dt^j}1(t-\tau)+\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{j}x^{(k-1)}(\tau)\delta^{(j-k)}(t-\tau).$$

Подставляя $f(t)$ в (22), получим:

$$y(t)=\sum_{l=0}^{m}U_{ml}(t,t)\frac{d^{l-1}x}{dt^{l-1}}+\int_0^t V(t,\xi)x(\xi)d\xi,$$

где

$$U_{ml}(t,t)=\sum_{j=l}^{m}(-1)^{l-l}\left.\frac{d^{j-l}u_j(t,\tau)}{d\tau^{j-l}}\right|_{\tau=t},$$

$$u_j(t,\tau)=b_j(t)g_f(t,\tau),$$

$$V(t,\tau)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{d^j u_j(t,\tau)}{d\tau^j}.$$

Отсюда, приняв $x(t)=\delta(t–\tau)$ и учитывая, что $d^k u_j/d\tau^k|_{\tau=t}=0$ для $k=0,1,..,n-2$, получим импульсную переходную функцию системы (1) в виде:

$$w(t,\tau)=\sum_{k=1}^{m-n+1}U_{mk}(t,t)\delta^{(k-1)}(t-\tau)+V(t,\tau),$$

причем

$U_{mk}(t, t) = 0$ при $m < n$ (нет первого слагаемого),

$U_{mk}(t, t)=U_{m1}(t, t)=b_m(t)/\alpha_n$, если $m = n$,

$$U_{mk}(t,t)=\sum_{k=1}^{k_{mn}=m-n+1>0}(-1)^{n-1+k}\left.\frac{d^{n-1+k}u_j}{d\tau^{n-1+k}}\right|_{\tau=t},\ \text{если } m>n.$$

Таким образом, выход $y(t)$ в общем случае связан со входом x(t) формулой:

$$y(t) = y_{du} = \int_0^t V(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

где

$$y_{du}(t) = \sum_{k=1}^{m} U_{mk}(t,t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}},$$

$$w(t,\tau) = V(t,\tau), t > \tau, m < n,$$

$$w(t,\tau) = (b_m\left(t\right)/\alpha_n)\delta(t-\tau) + V(t,\tau), t > \tau, m = n,$$

и при $m \geq n$ в момент включения $t = \tau$ импульсная переходная функция имеет разрывы непрерывности, определяемые δ-функцией и ее производными.

Выводы. Таким образом, рассматриваемый метод расширяет возможности исследования линейных динамических систем с переменными параметрами, дополняя или заменяя математический аппарат линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. При этом появляются новые возможности аналитического исследования задач и упрощается исследование систем высокого порядка.

Список использованной литературы:

1. Петров Б. Н. Системы автоматического управления объектами переменными параметрами: Инженерные методы анализа и синтеза / Б. Н. Петров, Н. И. Соколов, А. В. Липатов и др. — М. : Машиностроение, 1986. — 256 с.
2. Солодов А. В. Линейные автоматические системы с переменными параметрами / А. В. Солодов, Ф. С. Петров — М. : Наука, 1971.
3. Шевелёв А. Г. Основы линейной теории нестационарных систем автоматического управления / А. Г. Шевелёв // Мин. образ. и науки Украины НАУ. — К. : изд. НАУ, 2004. — 265 с.
4. Виглин С. И. Переходные процессы в системах с переменными параметрами / С. И. Виглин. — М . : Советское радио, 1971. — 184 с.
5. Основы автоматического управления / под ред. В. С. Пугачёва. — М. : Наука, 1974. — 720 с.
6. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 544 с.

In this article the questions of application of integral method of research of the linear dynamic systems are examined with in-out parameters, processes in which are described differential equalizations, with variable coefficients analytical decision of which very difficult. At a decision tasks in a numeral kind, calculable complication sharply grow at the increase of order of the system.

Key words: *One measurable system, impulsive transitional function.*

Отримано 10.09.10