УДК 004.942:681.511

В. А. Федорчук, канд. техн. наук
Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ КЕРОВАНИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ЗА ЇХ ІНТЕГРАЛЬНИМИ МОДЕЛЯМИ

Приводяться способи дослідження стійкості керованих електромеханічних систем за їх інтегральними моделями.

Ключові слова: *електромеханічна система, стійкість, інтегральна модель.*

Вступ. Властивість стійкості є однією з найважливіших умов, які забезпечують працездатність системи керування. Можна сказати, що стійкість електромеханічної системи є необхідною вимогою, без якої неможливо нею керувати, тому дослідження керованих електромеханічних систем на предмет їх стійкості є надзвичайно важливим.

В теорії автоматичного керування питання дослідження стійкості керованих електромеханічних систем вивчено в достатній мірі, однак, це стосується, переважно, випадків, коли математичний опис системи здійснюється у диференціальній формі. На сучасному етапі розвитку керованих електромеханічних систем з'явились нові задачі, які викликані появою імпульсних перетворювачів великої потужності та широким використанням в системах керування комп'ютерних засобів. Специфіка нових задач полягає в тому, що приходиться мати справу не лише з неперервними сигналами, але й з імпульсними, які описуються функціями, що мають розриви першого роду. При цьому існуючі традиційні методи дослідження сучасних електромеханічних систем, зокрема систем з імпульсними елементами, у багатьох випадках є погано пристосованими, а в окремих випадках просто непридатними для практичного використання. Зокрема, причиною вказаних труднощів є те, що переважна більшість числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь не передбачає можливості використання сигналів без умови їх неперервної диференційовності. Отже, подальший розвиток методів дослідження електромеханічних систем можливий при залученні інших підходів до побудови їх математичних моделей, а саме використання апарату інтегральних рівнянь. Оскільки на даний час для дослідження стійкості систем автоматичного керування розроблено теоретичні основи лише для математичних моделей, поданих у диференціальній формі, природнім чином виникає задача дослідження стійкості керованої електромеханічної системи за її інтегральною моделлю.

Математичний опис багатоканальної керованої електромеханічної системи. Будемо розглядати лінійну багатоканальну неперервну систему керування, процеси в якій описуються багатовимірним лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри II роду

$$k(t)y(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)y(\tau)d\tau=l(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}L(t,\tau)x(\tau)d\tau+f(t,t_0). \quad (1)$$

У рівнянні (1) і надалі використовуються такі позначення:

$y(t)=\left(y^1(t),y^2(t),\dots y^n(t)\right)^{\mathrm{T}}$ — n-вимірний вектор вихідних сигналів (реакцій) системи;

$x(t)=\left(x^1(t),x^2(t),\dots x^m(t)\right)^{\mathrm{T}}$ — m-вимірний вектор вхідних (керуючих) впливів на систему;

$$K(t,\tau)=\begin{pmatrix} K_{11}(t,\tau) & K_{12}(t,\tau) & \dots & K_{1n}(t,\tau) \\ K_{21}(t,\tau) & K_{22}(t,\tau) & \cdots & K_{2n}(t,\tau) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ K_{n1}(t,\tau) & K_{n2}(t,\tau) & \dots & K_{nn}(t,\tau) \end{pmatrix};$$

$$L(t,\tau)=\begin{pmatrix} L_{11}(t,\tau) & L_{12}(t,\tau) & \dots & L_{1m}(t,\tau) \\ L_{21}(t,\tau) & L_{22}(t,\tau) & \cdots & L_{2m}(t,\tau) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ L_{n1}(t,\tau) & L_{n2}(t,\tau) & \dots & L_{nm}(t,\tau) \end{pmatrix};$$

$K(t,\tau)$, $L(t,\tau)$ — ядра інтегральних операторів Вольтерри, що відображають динамічні характеристики ланок системи;

$$k(t)=\begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & \dots & k_{1n}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & \dots & k_{2n}(t) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ k_{n1}(t) & k_{n2}(t) & \dots & k_{nn}(t) \end{pmatrix};$$

$$l(t)=\begin{pmatrix} l_{11}(t) & l_{12}(t) & \dots & l_{1m}(t) \\ l_{21}(t) & l_{22}(t) & \dots & l_{2m}(t) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ l_{n1}(t) & l_{n2}(t) & \dots & l_{nm}(t) \end{pmatrix};$$

$k(t)$, $l(t)$ — змінні матриці, причому, якщо не зазначено додатково, матриця $k(t)$ вважається рівною одиничній матриці I; t_0 — момент початку функціонування системи (подачі керуючого впливу); t —

поточний момент часу. $f\left(t,t_0\right)=\left(f^1\left(t,t_0\right),f^2\left(t,t_0\right),\ldots,f^n\left(t,t_0\right)\right)^{\mathrm{T}}$ — вільний член, що містить всю інформацію, необхідну для однозначного знаходження $y(t)$ для всіх $t \geq t_0$;

Елементи всіх виписаних матриць і векторів ми вважаємо достатньо гладкими функціями часу для того, щоб всі перетворення були правомірні (зокрема, щоб рівняння (1) мало єдиний розв'язок $y(t)$).

Рівняння (1) описує лінійну систему і має властивість лінійної залежності розв'язку від правої частини рівняння і, отже, від вхідного впливу [1]. Вираз (1) описує систему, що фізично реалізується, так як значення вихідного сигналу в момент t обумовлюється лише значеннями вхідного впливу в цей і в попередній моменти і не залежить від наступних змін сигналу $x(t)$. Рівняння (1) можна реалізувати у вигляді структури, зображеної на рис. 1. Типовим блоком приведеної структурної моделі є матриця $n\times m$ модулів (рис. 2), кожен з яких реалізує інтегральний оператор Вольтерри з ядром $L_{nm}(t, \tau)$.

Стійкість на нескінченному проміжку часу. Розглянемо інтегральну модель (1), приймаючи $k(t) \equiv I$:

$$y(t)+\int_{t_0}^{t} K(t,\tau)y(\tau)d\tau = g(t)\ , \tag{2}$$

де I — одинична матриця,

$$g\left(t\right)=l\left(t\right)x\left(t\right)+\int_{t_0}^{t} L\left(t,\tau\right)x\left(\tau\right)d\tau+f\left(t,t_0\right).$$

За допомогою резольвенти розв'язок інтегрального рівняння (2) записується у такий спосіб [1]:

$$y(t)=g(t)+\int_{t_0}^{t} R(t,\boldsymbol{\tau})g(\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}\ .$$

Підставляючи в цю формулу вираз для функції $g(t)$, після еквівалентних перетворень знаходимо

$$y\left(t\right)=y_1\left(t\right)+y_2\left(t\right), \tag{3}$$

де

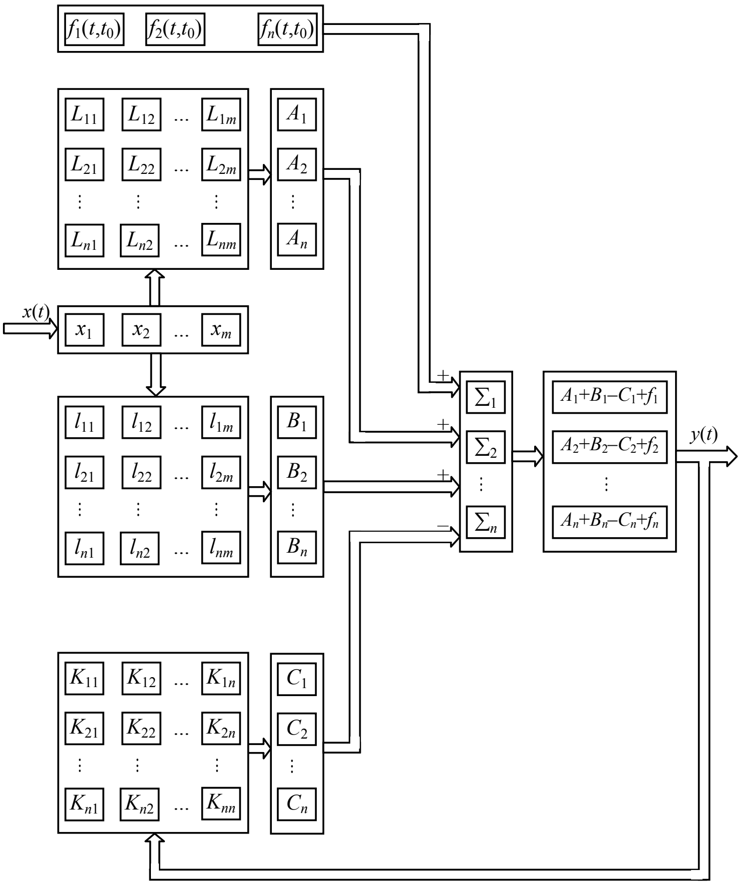
$$y_1\left(t\right)=\int_{t_0}^{t} w\left(t,\boldsymbol{\tau}\right)x\left(\boldsymbol{\tau}\right)d\boldsymbol{\tau}\ ; \tag{4}$$

$$y_2\left(t\right)=\int_{t_0}^{t} w_f\left(t,\boldsymbol{\tau}\right)f\left(\boldsymbol{\tau},t_0\right)d\boldsymbol{\tau}\ ; \tag{5}$$

$$\omega(t,\tau) = l(t)\delta(t-\tau) + L(t,\tau) + R(t,\tau)l(\tau) + \int_{\tau}^{t} R(t,u)L(t,\tau)du\,; \qquad (6)$$

$$\omega_f(t,\tau) = \delta(t-\tau) + R(t,\tau)\,; \qquad (7)$$

$\delta(t)$ — дельта-функція Дірака.



$$A_i = \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} L_{ij}(t,\tau)x_j(\tau)d\tau\,, \quad B_i = \sum_{j=1}^{m} l_{ij}(t)x_j(t)\,,$$

$$C_i = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} K_{ij}(t,\tau)y_j(\tau)d\tau\,, \quad i = \overline{1,n}$$

Рис. 1. *Структура моделі багатоканальної керованої електромеханічної системи*

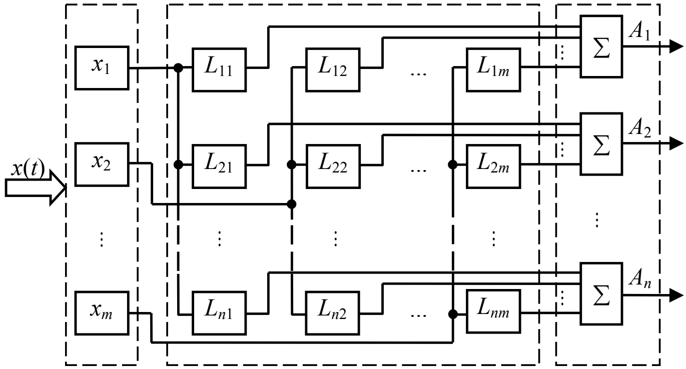


Рис. 2. *Структура інтегрального модуля моделі багатоканальної керованої електромеханічної системи*

Перейдемо до основних визначень, використовуючи для математичного опису системи інтегральну модель (1) при $k(t) \equiv I$. Розв'язок рівняння (1) відповідно до формули (3) складається із двох складових

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

де $y_1(t)$ — вимушені коливання на виході системи, які викликані вхідним впливом і визначаються за формулою (4); $y_2(t)$ — вільні коливання, які однозначно знаходяться із виразу (5) і залежать лише від початкового запасу енергії та властивостей системи.

Поширюючи відомі формулювання [2] на розглянутий випадок, назвемо систему (1)

1) стійкою (асимптотично), якщо

$$\lim_{t \to \infty} y_2(t) = 0 \tag{8}$$

для довільної припустимої функції $f(t, t_0)$, яка визначається початковим запасом енергії в системі;

2) нерезонансною (стійкою в смислі: обмежений вхід — обмежений вихід), якщо з обмеженості вхідного впливу $\|x\| < \infty$ випливає, що відповідна реакція системи також обмежена $\|y\| < \infty$.

Перейдемо до аналізу умов стійкості. З формули (5) для функції $y_2(t)$ випливає, що властивість стійкості, в основному, залежить від виду резольвентного ядра $R(t, \tau)$ і, в деякій мірі, від структури вільного члена $f(t, t_0)$. Остання особливість характерна для лінійних систем з невиродженими ядрами, рівняння яких не можуть бути зведені до диференціальних рівнянь. Отже, стійкість системи, головним чином, визначається властивостями ядра $K(t, \tau)$, що значною мірою аналогічно стаціонарному випадку, коли стійкість взаємно однозначно пов'язана з розташуванням полюсів передатної, функції. Крім того, можна довести наступне твердження: якщо знайдеться такий момент часу $t_1 < \infty$, що майже для всіх $\tau \in [t_1, t]$ функція $K(t, \tau)$ задовольняє умовам

$$\left.\begin{aligned} &K(t,\tau) \le 0 \qquad \text{при} \quad t \ge t_1, \\ &\lim_{t\to\infty} K(t,\tau) < 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

а функція $f(t, t_1)$ може бути вибрана від'ємною на відрізку $[t_1, \infty)$ і додатною на деякій множині ненульової міри, то система (1) нестійка.

Насправді, припустимо для визначеності, що $f(t_1, t_1) > 0$, $f(t, t_1) \ge 0$ і неперервна, а ядро $K(t, \tau)$ сумовне по τ на відрізку $[t_1, t]$.

Тоді, приймаючи у рівнянні (1) відповідно принципу суперпозиції $x(t) \equiv 0$, знаходимо

$$y_2(t_1) = f(t_1, t_1) > 0, \quad y_2(t) = f(t, t_1) - \int_{t_1}^{t} K(t,\tau)\, y_2(\tau)\, d\tau \ge 0$$

для всіх $t \ge t_1$, оскільки $-K(t, \tau) \ge 0$. Крім того, з виразів (9) випливає, що $\lim_{t\to\infty} y_2(t) > 0$, що суперечить вимозі (8). Отже, умови (9) є достатніми умовами нестійкості і у загальному випадку не можуть бути ослаблені, як показують наведені нижче приклади. Відзначимо також, що для стійкості системи необхідно, щоб порушувалась, принаймні, одна з нерівностей (9).

Приклад 1. Розглянемо рівняння вільних коливань

$$y(t) - \frac{0.25}{\text{ch}\, t}\int_0^t (t-\tau)\, y(\tau)\, \text{ch}\, \tau\, d\tau = \frac{y_0 + t y_0^{(1)}}{\text{ch}\, t}, \tag{10}$$

в якому ядро інтегрального оператора

$$K(t,\tau) = -\frac{0.25}{\text{ch}\, t}(t-\tau)\, \text{ch}\, t \le 0$$

недодатне для всіх $t \ge \tau$, але $\lim_{t\to\infty} K(t,\tau) = 0$ для будь-якого фіксованого $\tau \le t$, тобто порушується друга з умов (9). Можна показати, що розв'язок рівняння (10) $y(t) = y_2(t) = (\text{ch}\, t)^{-1}\left[y_0\, \text{ch}\, 0{,}5t + 2 y_0^{(1)}\, \text{sh}\, 0{,}5t \right]$ прямує до нуля при $t \to \infty$ і довільних початкових умовах. Таким чином, система (10) стійка, незважаючи на те, що ядро інтегрального оператора недодатне.

Приклад 2. Нехай у рівнянні (1) $K(t,\tau) = \left(-2\cos\tau + 1.5\, e^{\tau}\right)$, $f(t, t_0) = y_0$, $t_0 = 0$. Тоді функція $K(t, \tau)$ міняє знак для різних τ, тобто не виконуються умови (9). Вільні коливання у розглянутій системі описуються виразом $y(t) = y_2(t) = y_0 \exp\left[\left(\cos t + \sin t - 1{,}5\right)e^t + 0{,}5\right]$ і, отже, $\lim\limits_{t \to \infty} y_2(t) = 0$, тобто система стійка.

Приведемо тепер умови нерезонансності. Відповідно до формул (3)—(5) розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \left[\omega(t,\tau)x(\tau) + \omega_f(t,\tau) f(\tau,t_0)\right] d\tau, \tag{11}$$

де функції $\omega(t, \tau)$ і $\omega_f(t, \tau)$ визначені співвідношеннями (6) і (7) відповідно. З виразу (11) випливає, що критерій нерезонансності для лінійних систем, що описуються звичайними диференціальними рівняннями [2], без змін переноситься і на системи більш загального виду з математичними моделями (1). А саме, система (1) нерезонансна тоді і тільки тоді, коли її імпульсна перехідна функція задовольняє умові

$$\int_{t_0}^{t} \left\|\omega(t,\tau)\right\| d\tau \le C < \infty, \ \ (t \ge t_0). \tag{12}$$

З (12) видно, що властивість резонансності тісно пов'язана з характером функції $\omega(t, \tau)$ і, отже, з резольвентним ядром $R(t, \tau)$.

Стійкість на обмеженому інтервалі часу. Значна частина нестаціонарних систем (наприклад, системи керування кінцевим станом і споріднені їм) функціонує протягом скінченного проміжку часу, величина якого сумірна із тривалістю перехідних процесів. Для систем такого типу розглянуте вище поняття асимптотичної стійкості не відіграє особливої ролі, і більше того, нерідко дані системи є нестійкими в класичному смислі. У подібних випадках основне значення надається характеру зміни вихідної координати в межах відрізка функціонування з використанням поняття стійкості на скінченному інтервалі або, як іноді говорять, технічної стійкості.

Введемо такі поняття.

1. Система (1) E-стійка на проміжку $[t_0, T]$, якщо з умов $x(t) \in E$, $f(t,t_0) \in E$ випливає, що $y(t) \in E$, і знайдуться такі постійні μ і ν, що

$$\|y\|_E \le \mu \|x\|_E + \nu \|f\|_E, \tag{13}$$

де $E = E(t_0, T)$ — функціональний простір, якому належить розв'язок рівняння (1).

2. Система (1) обмежена на відрізку $[t_0, T]$ в областях P, Q, R, якщо з умов $x(t) \in P$, $f(t,t_0) \in Q$ випливає, що $y(t) \in R$ для всіх $t \in [t_0, T]$. Тут R, P і Q — деякі відомі області. На практиці задавати область R зручно у вигляді

$$Y_1(t) \le y(t) \le Y_2(t), \tag{14}$$

де векторні нерівності розглядаються в розумінні як нерівності між відповідними компонентами цих векторів, а $Y_1(t)$ і $Y_2(t)$ — відомі вектор-функції. В результаті задача зводиться до знаходження таких обмежень (областей P і Q) на вхідний вплив і початковий запас енергії, що для системи (1) виконуються нерівності (14). Умови E-стійкості було отримано раніше, де вони наведені у вигляді критеріїв можливості розв’язування рівняння (1) у відповідному функціональному просторі. Для оцінки постійних μ і v у формулі (13) припустимо, що рівняння (1) розв’язне в просторі неперервних функцій, тобто $E = C(t_0, T)$. Крім того, для простоти викладу вважатимемо всі сигнали в системі одномірними. Тоді з формули (11) знаходимо

$$\begin{gathered}\sup_{s\in[t_0,t]} \left|y(s)\right| \le \sup_{s\in[t_0,t]} \int_{t_0}^{s} \left|\omega(s,\tau)\right| d\tau \sup_{s\in[t_0,t]} \left|x(s)\right| + \\ + \sup_{s\in[t_0,t]} \int_{t_0}^{s} \left|\omega(s,\tau)\right| d\tau \sup_{s\in[t_0,t]} \left|f(s,t_0)\right|.\end{gathered} \tag{15}$$

Звідси

$$\left\|y(t)\right\|_C \le \sup_{t\in[t_0,T]} \int_{t_0}^{t} \left|\omega(t,\tau)\right| d\tau \left\|x(t)\right\|_C + \sup_{t\in[t_0,T]} \int \left|\omega_f(t,\tau)\right| d\tau \left\|f(t,t_0)\right\|_C .$$

Тоді постійні μ і v оцінюються виразами:

$$\left.\begin{aligned}\mu &\le \sup_{t\in[t_0,T]} \int_{t_0}^{t} \left|\omega(t,\tau)\right| d\tau, \\ v &\le \sup_{t\in[t_0,T]} \int_{t_0}^{t} \left|\omega_f(t,\tau)\right| d\tau.\end{aligned}\right\}$$

Інший підхід до знаходження параметрів формули (13) полягає в наступному. З рівняння (1) випливає

$$\left|y(s)\right| \le \left|g(s)\right| + \int_{t_0}^{s} \left|K(s,\tau)\right|\left|y(\tau)\right| d\tau, \tag{16}$$

де

$$g(s) = l(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} L(s,\tau)x(\tau)d\tau + f(s,t_0).$$

Припустимо, що виконується умова

$$\sup_{t\in[t_0,T]} \int_{t_0}^{t} \left|K(t,\tau)\right| d\tau \le q < 1. \tag{17}$$

Тоді, визначаючи у виразі (16) верхню грань по $s \in [t_0, t]$, отримаємо, з урахуванням нерівності (17):

$$\sup_{s\in[t_0,t]} |y(s)| \le \frac{\sup_{s\in[t_0,t]} |g(s)|}{1 - \sup_{s\in[t_0,t]} \int_{t_0}^{s} |K(s,\tau)|\, d\tau}. \qquad (18)$$

Порівнюючи нерівності (13) і (18), знаходимо

$$\left.\begin{aligned} &\mu \le \sup_{t\in[t_0,T]} \frac{\sup_{s\in[t_0,t]} \left[|l(s)| + \int_{t_0}^{s} |L(s,\tau)|\, d\tau \right]}{1 - \sup_{s\in[t_0,t]} \int_{t_0}^{s} |K(s,\tau)|\, d\tau}, \\ &\nu \le (1-q)^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Оцінки (19) справедливі лише при виконанні умови (17). Якщо остання порушується, то для знаходження верхньої границі реакції системи можна скористатися різними узагальненнями нерівності Беллмана-Гронуолла, що приводяться в роботі [3]. Зокрема, з формули (16) випливає

$$|y(t)| \le \sup_{s\in[t_0,t]} |g(s)| \exp\left[\int_{t_0}^{t} \sup_{s\in[\tau,t]} |K(s,\tau)|\, d\tau \right]. \qquad (20)$$

Нерівність (20) приводить до наступних оцінок параметрів μ і ν:

$$\left.\begin{aligned} &\mu \le \sup_{t\in[t_0,T]} \left\{ \sup_{s\in[t_0,t]} \left[|l(s)| + \int_{t_0}^{s} |L(s,\tau)|\, d\tau \right] \exp\left[\int_{t_0}^{t} \sup_{s\in[\tau,t]} |K(s,\tau)|\, d\tau \right] \right\}, \\ &\nu \le \exp\left[\sup_{t\in[t_0,T]} \int_{t_0}^{t} \sup_{s\in[\tau,t]} |K(s,\tau)|\, d\tau \right]. \end{aligned}\right\}$$

Нарешті, виділимо спеціальний випадок, коли відома вироджена верхня границя для ядра $|K(t,\tau)| \le \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(t)\beta_i(\tau)$, причому функції $\alpha_i(t)$, $\beta_i(\tau)$ при $i = \overline{1,r}$, є невід'ємними. Тоді із співвідношення (16) випливає [3]

$$|y(t)| \le |g(t)| + \alpha(t) \int_{t_0}^{t} \left\{ \beta(\tau) |g(\tau)| \exp[\int_{\tau}^{t} \beta(u)\alpha(u)\, du] \right\} d\tau, \qquad (21)$$

де

$$\alpha(t) = \sup_{1 \le i \le r} \alpha_i(t), \ \beta(t) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i(t).$$

Оцінка (21) є досить ефективною і особливо зручна в тих випадках, коли потрібна перевірка системи на технічну стійкість при заданих вхідному впливі та початкових умовах.

Приклад 3. Для порівняння точності та ефективності запропонованих вище методів дослідження стійкості на скінченному інтервалі розглянемо нестаціонарну нестійку на нескінченності лінійну систему, що описується рівнянням

$$y(t) - \int_0^t \frac{y(\tau)}{\tau+1} d\tau = y_0 + \int_0^t x(\tau) d\tau . \tag{22}$$

При $y_0 = 1$, $T = 1$, $x(t) = (t+1)\cos t$, одержуємо точний розв'язок рівняння (22) у вигляді $y(t) = (t+1)(1+\sin t)$. Крім того, можна показати, що $\omega(t,\tau) = (t+1)(\tau+1)^{-1}$, $\omega_f(t,\tau) = \delta(t-\tau) + (t+1)(\tau+1)^{-2}$.

Використовуючи формулу (15), знаходимо

$$\sup_{s \in [0,t]} |y(s)| \le (t+1)\left\{1 + \sup_{s\in[0,t]}\left[(s+1)\cos s\right]\ln(t+1)\right\} = y_1(t) .$$

Умова (17) в цьому випадку виконується на відрізку [0,1], тому можна скористатися нерівністю (18). Отримаємо

$$\sup_{s \in [0,t]} |y(s)| \le \frac{(t+1)\sin t + \cos t}{1 - \ln(t+1)} = y_2(t) .$$

Оцінка, побудована за виразом (20), має вигляд

$$|y(t)| \le \left[(t+1)\sin t + \cos t\right](t+1) = y_3(t) .$$

На останок, формула (21) дає точний результат:

$$y(t) \le (t+1)\sin t + \cos t + \int_0^t \frac{(\tau+1)\sin\tau + \cos\tau}{\tau+1} \exp\left(\int_\tau^t \frac{du}{u+1}\right) d\tau =$$

$$= (t+1)(1+\sin t) = y(t) .$$

На рис. 3 приведені графіки точного розв'язку і розрахованих вище оцінок. З порівняння побудованих кривих видно, що найбільша точність досягається при використанні формули (21). Якщо остання незастосовна, то розрахунок слід проводити за одним з виразів (18) або (20) залежно від того, яка з величин $\left[1 - \sup_{s\in[t_0,t]} \int_{t_0}^{s} |K(s,\tau)| d\tau\right]^{-1}$ або $\exp[\int_{t_0}^{t} \sup_{s\in[\tau,t]} |K(s,\tau)| d\tau]$ є меншою.

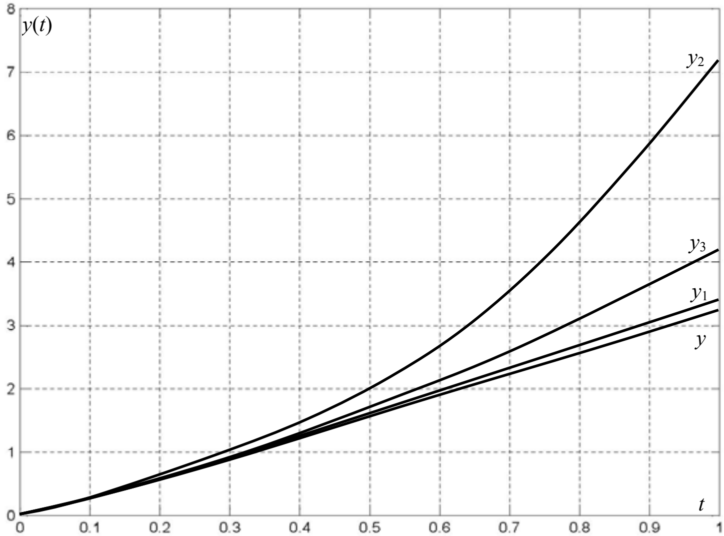


Рис. 3. *Точний розв'язок* (y) *і його оцінки зверху* ($y_1 - y_3$)

Оцінка (15) також є достатньо ефективною, однак для її застосування потрібно знати резольвентне ядро.

Висновок. Запропоновані методи дослідження стійкості керованих електромеханічних систем за їх інтегральними моделями дозволяють значно розширити клас досліджуваних систем, включаючи системи автоматичного керування з імпульсними елементами.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы : Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 545 с.
2. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез / Г. Д'Анжело. — М. : Машиностроение, 1974. — 288 с.
3. Филатов А. Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А. Н. Филатов, Л. В. Шарова. — М. : Наука, 1976. — 152 с.

Ways of research of stability of controlled electromechanical systems by means of their integral models are considered.

Key words: *electromechanical system, stability, integral model.*

Отримано 11.10.2010