УДК 627.324.2/3:532.72

Т. П. Цвєткова, аспірант
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНОСУ З ВРАХУВАННЯМ ОСМОСУ НА ВОЛОГОПЕРЕНОС В ОДНОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

Проведено математичне моделювання процесу масопереносу при вологопереносі сольових розчинів та осмосі в зоні неповного насичення. Чисельні розв'язки відповідних крайових задач отримано методом скінченних різниць. Розроблено відповідне програмне забезпечення, використовуючи яке проведено чисельні експерименти та зроблено їх аналіз.

Ключові слова: *математична модель, крайова задача, масоперенос, вологоперенос, зона неповного насичення, осмос, концентрація, різницева схема.*

Вступ. Задача дослідження переміщення вологи в ненасиченій зоні ґрунту є складовою частиною актуальних проблем сільського господарства. Крім того, значні зміни водного режиму, як унаслідок дії багаторічних циклічних природно-кліматичних чинників, так і в результаті впливу несприятливих техногенних умов можуть привести до розвитку небезпечних гідрогеологічних процесів: підтоплення територій, сільськогосподарських земель, забруднення ґрунтових вод. Процес переносу води впливає на перенесення солей, в результаті чого відбувається засолення ґрунтів.

Вирішенням даних проблем займалося ряд вчених. Теоретичні основи вологопереносу в ґрунтах закладені в роботах [1—3; 6; 7] (див. там літературу). Однак, в вищезгаданих роботах домінували лише процеси вологопереносу без врахування масопереносу. В даній роботі розглянуто вплив масопереносу з врахуванням осмосу на вологоперенос в одновимірному випадку.

Постановка задачі. Дослідимо вплив масопереносу солей на вологоперенос в шарі ґрунту великої протяжності (рис. 1).

На поверхню ґрунту можуть попадати атмосферні опади і поливи. У зв'язку з цим на деякій глибині l від поверхні землі утворюється вільна поверхня рівня ґрунтових вод, яка, надалі, вважається нерухомою. Крім того, на поверхню ґрунту може поступати сольовий розчин з атмосферними опадами або за рахунок інших факторів з концентрацією $\tilde{C}_1$. Розподіл концентрації в зоні неповного насичення $\tilde{C}_0$. Потрі-

© Т. П. Цвєткова, 2010

бно розрахувати напір вологи в зоні неповного насичення та поле концентрації в цій зоні та дослідити вплив масопереносу солей з врахуванням осмотичних явищ на вологоперенос в ґрунтовому середовищі.

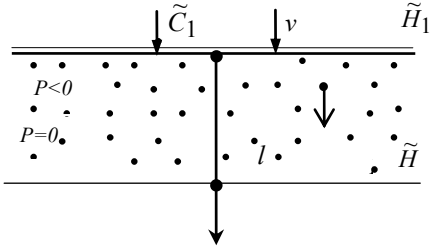

Рис. 1. *Масоперенос солей в зоні неповного насичення*

Математична модель задачі. Математичну модель задачі масопереносу сольових розчинів при вологоперенесенні в ненасиченому ґрунтовому середовищі в одновимірному випадку на основі робіт [4; 10] можна записати в такому вигляді:

$$\frac{\partial(D(c)\dfrac{\partial c}{\partial x})}{\partial x} - v_x \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma\left(c - C_*\right) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\mu(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(c,h)\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \nu\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{2}$$

$$v_x = -k(c,h)\frac{\partial h}{\partial x} + \nu\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{3}$$

$$c(0,t) = \tilde{C}_1(t),\ c\left(l,t\right) = \tilde{C}_2(t),\ c(x,0) = \tilde{C}_0(x), \tag{4}$$

$$h\big|_{x=0} = \tilde{H}_1(t),\ h\big|_{x=l} = \tilde{H}_2(t),\ h\big|_{t=0} = \tilde{H}_0(x). \tag{5}$$

Тут: $D(c)$ — коефіцієнт конвективної дифузії, γ — коефіцієнт масообміну, C_* — коефіцієнт граничного насичення сольового розчину, σ — пористість ґрунту, v_x — швидкість фільтрації, $k(c,h)$ — коефіцієнт водопроникності, $h = P - x$ — напір вологи, $P = \dfrac{p}{\rho g}$ — висота тиску, $\mu\left(h\right) = \dfrac{\partial\omega}{\partial h}$ — при неповному насиченні ґрунту, ν — коефіцієнт осмосу.

Диференціальне рівняння (1) описує масоперенос сольових розчинів в зоні неповного $(P < 0)$ насичення. Рівняння (2) описує процес вологопереносу в зоні неповного насичення $(\mu(h) \neq 0)$. Рівнян-

ня (3) виражає узагальнений закон Дарсі на випадок вологоперенесення сольових розчинів. Умови (4), (5) — крайові умови для задач масопереносу та вологопереносу відповідно.

Чисельний розв'язок задачі. Для знаходження розв'язку задачі вологопереносу (2), (5) застосуємо неявну різницеву схему

$$\mu_i \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\tau} = \frac{1}{h_1}\left[a_{i+1}^k \frac{H_{i+1}^{k+1} - H_i^{k+1}}{h_1} - a_i^k \frac{H_i^{k+1} - H_{i-1}^{k+1}}{h_1}\right] - \nu \frac{C_{i+1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i-1}^{k+1}}{h_1^2}, \tag{6}$$

де

$$a_i^k = 0.5\left(K\left(H_i^k, C_i^k\right) + K\left(H_{i-1}^k, C_{i-1}^k\right)\right),$$

$$a_{i+1}^k = 0.5\left(K\left(H_{i+1}^k, C_{i+1}^k\right) + K\left(H_i^k, C_i^k\right)\right).$$

Чисельний розв'язок знаходимо методом прогонки

$$H_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 H_{i+1}^{k+1} + \beta_i^1, \tag{7}$$

де

$$\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i a_1},\ \beta_{i+1}^1 = \frac{a_1\beta_i + f_1}{c_1 - \alpha_i a_1},\ a_1 = \frac{a_i^k}{h_1^2},\ b_1 = \frac{a_{i+1}^k}{h_1^2},$$

$$c_1 = \frac{a_{i+1}^k + a_i^k}{h_1^2} + \frac{\mu_i}{\tau},\ f_1 = \frac{\mu_i H_i^k}{\tau} - \nu_i \frac{C_{i+1}^k - 2C_i^k + C_{i-1}^k}{h_1^2}.$$

Для знаходження розв'язку задачі масопереносу (1), (3), (4) застосуємо монотонну різницеву схему [8; 9]. Різницева схема задачі масопереносу матиме вигляд

$$\frac{1}{h_2}\left(\mu_{i2} d_{i+1}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_2} - \mu_{i1} d_i^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_2}\right) + r_{i+}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_2} + r_{i-}^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_2} + f_i^k = \sigma \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}, \tag{8}$$

де

$$d_i^k = \frac{D\left(x_i, C_i^k\right) + D\left(x_{i-1}, C_{i-1}^k\right)}{2}, d_{i+1}^k = \frac{D\left(x_{i+1}, C_{i+1}^k\right) + D\left(x_i, C_i^k\right)}{2},$$

$$r_{i+}^k = 0,5\left(V\left(x_i, C_i^k\right) + \left|V\left(x_i, C_i^k\right)\right|\right) \geq 0,$$

$$r_{i-}^k = 0,5\left(V\left(x_i, C_i^k\right) - \left|V\left(x_i, C_i^k\right)\right|\right) \leq 0,\ V(x_i, C_i^k) = r_{i+}^k + r_{i-}^k,$$

$$f_i^k = -\gamma\left(C_i^{k+1} - C_*\right),$$

$$\mu_{i1}^k = \frac{1}{1+\dfrac{0,5\left|r_i^k\right|}{d_i^k}},\quad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1+\dfrac{0,5\left|r_i^k\right|}{d_{i+1}^k}}.$$

$$C_i^0 = C_0\left(ih_2\right),\quad C_0^{k+1} = C_1\left((k+1)\cdot\tau\right),\quad l_2 C_n^{k+1} = C_2\left((k+1)\cdot\tau\right).$$

Розв'язок задачі знаходимо методом прогонки у вигляді

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{i+1}^{k+1} + \beta_i^2, \tag{9}$$

де

$$\alpha_{i+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_i a_2},\quad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_2\beta_i + f_2}{c_2 - \alpha_i a_2},\quad a_2 = \frac{1}{h_2}\left(\frac{d_i^k \mu_{i1}^k}{h_2} - r_{i-}^k\right),$$

$$b_2 = \frac{1}{h_2}\left(\frac{d_{i+1}^k \mu_{i2}^k}{h_2} + r_{i+}^k\right),\quad c_2 = \frac{1}{h_2^2}\left(d_i^k \mu_{i1}^k + d_{i+1}^k \mu_{i2}^k\right) + \frac{\left|r_i^k\right|}{h_2} + \frac{\sigma}{\tau},$$

$$f_2 = -\sigma\frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}.$$

Для обчислення концентрації сольових розчинів на основі (9) швидкість фільтрації розраховуємо за формулою

$$V_i = -k_i\frac{H_{i+1}^k - H_{i-1}^k}{2h_1} + \nu_i\frac{C_{i+1}^k - C_{i-1}^k}{2h_1}.$$

Програмна реалізація та результати чисельних експериментів. Для даної задачі розроблена комплексна програма в інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 7.0. На основі програмної реалізації задачі були проведені чисельні експерименти, що дало можливість провести аналіз отриманих результатів та детально дослідити процеси впливу масопереносу солей на вологоперенос з врахуванням осмотичних явищ.

Для дослідження впливу масопереносу солей на вологоперенос знайдено чисельний розв'язок таких задач: 1) задачі вологопереносу, 2) задачі вологопереносу з врахуванням масопереносу, 3) задачі вологопереносу з врахуванням масопереносу при наявності осмосу із наступними вхідними даними:

$$T = 360 \text{ діб},\ l = 15 \text{ м},\ \sigma = 0,5,\ \gamma = 0,0065,\ D_m = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$\lambda = 0,1 \text{ м},\ \rho = 1000 \text{ кг/м}^3,\ C_* = 350 \text{ г/літр},\ \tilde{C}_0 = 0 \text{ г/літр},$$

$$\tilde{C}_1 = 0 \text{ г/літр},\ \tilde{C}_2 = 10 \text{ г/літр},\ H_1 = 7 \text{ м},\ H_1 = 20 \text{ м},$$

$$\nu = 2,8\cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг}\cdot\text{доба}.$$

В результаті розв'язання задач вологопереносу і вологопереносу з врахуванням масопереносу, отримали наступні графіки даних процесів (рис. 2).

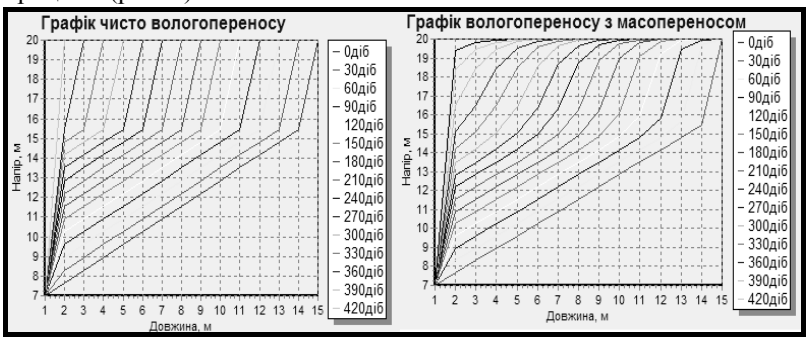

Рис. 2. *Графіки розподілу напорів вологи для задач вологопереносу та вологопереносу з масопереносом*

Як видно з рис. 2, графіки розподілу напорів для задач вологопереносу та воголопереносу з масопереносом значно відрізняються. Це пов'язано з тим, що масоперенос впливає на вологоперенос за рахунок залежностей коефіцієнта вогопереносу від концентрації солей $k(c)$ і від напорів вологи $k(h)$.

На рис. 3, 4 суміщено графіки розподілу напорів вологи з врахуванням та без врахування концентрації солей при $T = 60$ діб і $T = 360$ діб.

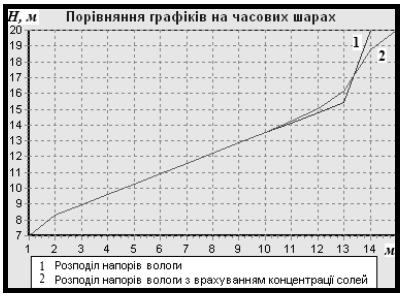

Рис. 3. *Графіки розподілу напорів вологи при* $T = 60$ діб

Рис. 4. *Графіки розподілу напорів вологи при* $T = 360$ діб

Отже, з наведених вище графіків розподілу напорів вологи видно, що з впливом масопереносу розподіл вологи збільшується з часом по всій області вологоперенесення. В подальшому також відбуватимуться незначні зміни розподілу вологи по області неповного насичення.

Графіки розподілу вологи з врахуванням концентрації солей при наявності осмотичних явищ зазнав значних змін (рис. 5).

Рис. 5. *Графік розподілу напорів вологи для задач вологопереносу з врахуванням масопереносу при наявності осмосу*

Для більш детального аналізу отриманих результатів виведемо спільний графік досліджуваних процесів при $T = 30$ діб і $T = 60$ діб та (рис. 6):

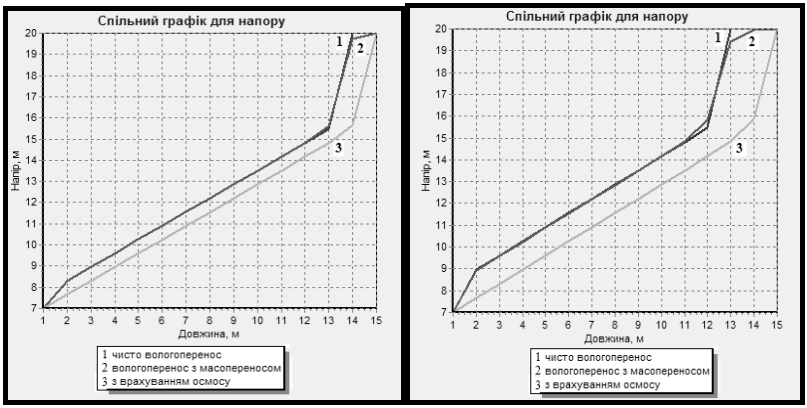

Рис. 6. *Графіки розподілу напорів вологи для задач вологопереносу (1), вологопереносу з масопереносом (2), вологопереносу з масопереносом при наявності осмосу (3) при* $T = 30$ діб *і* $T = 60$ діб

З графіків видно, що осмос значно вливає на процес розподілу вологи. Як видно з рис. 6, розподіл вологи з врахуванням концентрації солей при наявності осмосу зменшується з часом.

Висновки. Для крайової задачі (1)—(5) побудовано монотонну різницеву схему, знайдено її чисельний розв'язок та виконано програмну реалізацію в середовищі Delphi 7.0. На основі проведених чисельних експериментів отримано розподіл поля вологи та концентрації в зоні неповного насичення.

Для дослідження впливу масопереносу солей на вологоперенос знайдено чисельний розв'язок задачі вологопереносу, задачі вологопе-

реносу з врахуванням масопереносу, задачі вологопереносу з врахуванням масопереносу при наявності осмосу. В результаті розв'язання даних задач було встановлено зростання з часом розподілів напорів вологи з врахуванням концентрації солей. Також проведено врахування масопереносу солей та осмотичних явищ на процес вологопереносу в зоні неповного насичення. Встановлено, що розподіл вологи з врахуванням концентрації солей при наявності осмосу зменшується з часом.

Список використаних джерел:

1. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). — М. : Наука, 1969. — С. 237—313.
2. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. — К. : Наук. думка, 1991. — С. 29—33.
3. Ляшко С. И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод / С. И. Ляшко. — К. : Наук. думка, 1998. — 256 с.
4. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных середах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — С. 27—31.
5. Лукнер Л. Моделирование геофильтрации / Л. Лукнер, В. М. Шестаков. — М. : Надра, 1976. — С. 68—71.
6. Гусев Е. М. Проблемы теории переноса жидкости в ненасыщенных пористых середах / Е. М. Гусев // Физика почвенных вод. — М. : Наука. — 1981.
7. Даутов Р. З. Моделирование неустойчивости влагопереноса в ненасыщенных пористых средах / Р. З. Даутов, А. Г. Егоров // Исследования по прикладной математике, Казань : изд-во Казанского ун-та. — 2004.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский — М. : Наука, 1989. — 616 с.
9. Власюк А. П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, О. М. Степанченко // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — С. 188—197.
10. Власюк А. П. Одновимірна задача масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в умовах неповного насичення ґрунту / А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова // Тез. Міжн. конф. ім. Академіка М. Кравчука. — К., 2008. — 75 с.

Mathematical model of the mass transfer during the moisture transfer of salt solutions and osmosis in the area of partial saturation is formulated. Numerical solutions of the respective boundary problems are obtained by means of the finite difference method. The proper software is developed, using which numerical conformal transformations. The proper software is developed, using which numerical experiments and their analysis are performed.

Key words: *mathematical model, boundary problem, mass transfer, moisture transfer, area of partial saturation, osmosis, concentration, difference scheme.*

Отримано15.10.10