

12. Savyuk E. The mathematical model of cooing water reservoirs in conditions for optimization / E. Savyuk, S. Penkovsky // Water managemen — state and prospects of development. Collected articles of young scientists. Part 1. Rivne. — 2010. — P. 264—268.
13. Won Seo I. Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams / I. Won Seo, T. Sung Cheong // J. Hydraulic Eng. — 1998. — Vol. 124, № 1. — P. 25—32.

Modeling methodology of slow fluid movement processes in reservoirs, that is based on replacement of real flow with some fictitious quasiideal filtration field with the following application of approximate methods for quasi-conformal mappings, has been transferred to cases of availability of additional enriching flows sources.

**Key words:** *quasiconformal mapping dynamically-hydrodynamic mesh, boundary problems, method of filtering fictitious.*

Отримано: 19.04.2011

УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

**А. В. Васильев**, канд. техн. наук

Институт проблем моделирования в энергетике  
им. Г.Е. Пухова НАН Украины, г. Киев

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПИД-КОНТРОЛЛЕРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ**

Предложены математические модели ПИД-контроллеров цепного и дробного порядков на основе аппроксимационно-операционного S-преобразования. Приведены иллюстративные примеры определения отклика контроллера на различные входные воздействия с использованием программной среды системы Mathematica®.

**Ключевые слова:** *математическое моделирование, автоматическое управление, динамическая система, ПИД-контроллер, дробное исчисление, операционные методы, полиномиальная аппроксимация, S-преобразование.*

**Введение.** ПИД-контроллер является одним из элементов систем управления динамическими системами и представляет собой совокупность трех элементарных звеньев (пропорционального, интегрирующего и дифференцирующего), входные полюса которых обединены и подключены к источнику входного сигнала, а выходные сигналы звеньев суммируются и формируют выходной сигнал контроллера [5]. Известная структурная схема ПИД-контроллера приведена на рис. 1.

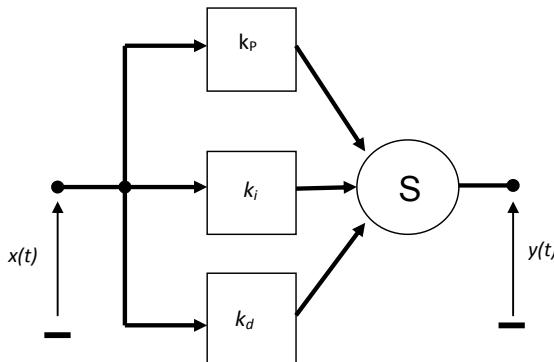


Рис. 1. Структурная схема ПИД-контроллера

Математическая модель ПИД-контроллера во временном пространстве представляется выражением:

$$y(t) = k_p x(t) + k_i \int_0^t x(\tau) d\tau + k_d \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1)$$

В (1) приняты следующие обозначения:  $y(t)$  — выходной сигнал,  $x(t)$  — входной сигнал,  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$  — коэффициенты передачи соответственно пропорционального, интегрирующего и дифференцирующего звеньев.

При использовании классических операционных методов (преобразование Лапласа и комплексный метод) математические модели контроллера в пространствах изображений по Лапласу и Фурье принимают вид алгебраических выражений (предполагается, что начальные условия нулевые):

$$Y(p) = k_p X(p) + k_i \frac{1}{p} X(p) + k_d p X(p) = W(p)X(p), \quad (2)$$

$$Y(j\omega) = k_p X(j\omega) + k_i \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + k_d j\omega X(j\omega) = W(j\omega)X(j\omega). \quad (3)$$

В формулах (2), (3) дополнительно обозначены:  $p$  — оператор Лапласа,  $\omega$  — частота,  $W(p)$  и  $W(j\omega)$  — передаточные характеристики в операционных областях Лапласа и Фурье соответственно:

$$W(p) = k_p + k_i \frac{1}{p} + k_d p; \quad W(j\omega) = k_p + k_i \frac{1}{j\omega} + k_d j\omega.$$

С развитием дробного исчисления [2; 6] ПИД-контроллеры были обобщены на случай использования в интегрирующих и дифференцирующих звеньях операторов интегрирования и дифференцирова-

ния нецелых порядков [8]. Такие ПИД-контроллеры дробного порядка при сохранении структуры рис. 1 описываются во временной области математическими моделями вида:

$$y(t) = k_p x(t) + k_i J^{(\lambda)} x(t) + k_d D^{(\gamma)} x(t), \quad (4)$$

$$y(t) = k_p x(t) + k_i \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} x(\tau) d\tau + k_d \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{-\gamma} x(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Здесь в выражении (4) символами  $J^{(\lambda)}$  и  $D^{(\gamma)}$  обозначены интегральный оператор дробного порядка  $\lambda$  и дифференциальный оператор дробного порядка  $\gamma$ . В формуле (5) использованы интегро-дифференциальные операторы Римана-Лиувилля [6].

Математические модели ПИД-контроллера дробного порядка в операционных областях Лапласа и Фурье принимают вид:

$$Y(p) = k_p X(p) + k_i \frac{1}{p^\lambda} X(p) + k_d p^\gamma X(p) = W(p)X(p), \quad (6)$$

$$Y(j\omega) = k_p X(j\omega) + k_i \frac{1}{(j\omega)^\lambda} X(j\omega) + k_d (j\omega)^\gamma X(j\omega) = W(j\omega)X(j\omega). \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что математические модели (1)–(3) являются частным случаем моделей (4)–(7).

Использование ПИД-контроллеров дробных порядков, как показано в [8] и ряде других публикаций, предоставляет исследователю дополнительные возможности по совершенствованию и оптимизации систем управления благодаря появлению двух дополнительных параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ . Существенным недостатком математических моделей контроллеров в области преобразования Лапласа является необходимость нахождения корней уравнений с дробными степенями оператора  $p$ .

В данной работе предложены математические модели ПИД-контроллеров целого и дробных порядков в аппроксимационно-операционном пространстве S-преобразования [1; 2]. Работа построена следующим образом. Сначала в ретроспективном плане приведен метод S-преобразований. Затем сформирована математическая модель ПИД-контроллера в пространстве S-преобразований. Далее рассмотрены иллюстративные примеры нахождения отклика ПИД-контроллера на различные входные воздействия. В вычислительном эксперименте в программной среде системы Mathematica [7] использована базисная система локальных функций на основе смещенных полиномов Лежандра.

**Основы аппроксимационно-операционного метода S-преобразования.** Метод S-преобразования [1; 2] в кратком изложении может быть представлен следующим образом. Для сигнала  $x(t)$  и системы базисных функций  $\bar{S}(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)\}^*$ , заданных на

одном и том же диапазоне изменения аргумента  $0 \leq t < T$ , прямым операционным  $S$  — преобразованием называют выражение

$$x(t) \Leftrightarrow \bar{X} = \left( \int_0^T \bar{S}(t) \cdot \bar{S}(t)^* dt \right)^{-1} \cdot \left( \int_0^T x(t) \cdot \bar{S}(t) dt \right),$$

которое сопоставляет

сигналу его операционное изображение — вектор  $\bar{X}$ . Обратное операционное  $S$ -преобразование восстанавливает сигнал в виде его аппроксимации  $x_a(t) = \bar{X}^* \cdot \bar{S}(t) = \sum_{i=1}^m X_i \cdot s_i(t)$ .

В приведенных выше выражениях интегрирование матрично-векторных функций выполняется поэлементно. Для  $S$ -преобразования, как и для любого другого операционного метода, вводятся правила операционной алгебры, сопоставляющие математическим операциям над сигналами их операционные аналоги в области изображений.

Для целей данной статьи достаточно использования только двух правил:

$$a \cdot x(t) \pm b \cdot y(t) \Leftrightarrow a \cdot \bar{X} \pm b \cdot \bar{Y}, \quad (8)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \bar{Y} = P_s \cdot \bar{X}. \quad (9)$$

Правило (8) определяет, что линейной комбинации сигналов во временном пространстве соответствует такая же линейная комбинация изображений сигналов в пространстве  $S$ -преобразования. Операции интегрирования сигнала с переменным верхним пределом сопоставляется операция умножения изображения подинтегральной функции на так называемую операционную матрицу интегрирования  $P_s$  порядка  $m \times m$ , элементы которой зависят от вида базисной системы функций  $\bar{S}(t)$  и порядка интегрального оператора. Таким образом, выражение (9) справедливо и для операции дробного интегрирования.

**Математические модели ПИД-контроллеров в базисе  $S$ -преобразования.** Применяя правила (8) и (9) к математическим моделям ПИД-контроллеров (1), (4), перейдем в область  $S$ -преобразования.

- Классический ПИД-контроллер целого порядка:

$$\bar{Y} = k_p \bar{X} + k_i P_l \cdot \bar{X} + k_d P_l^{-1} \cdot \bar{X} = W_s \cdot \bar{X}, \quad (10)$$

где:  $P_l$  — операционная матрица интегрирования первого порядка,  $W_s$  — передаточная матрица  $S$  — преобразования:

$$W_s = k_p E + k_i P_l + k_d P_l^{-1}. \quad (11)$$

В формулах (10), (11) все матрицы квадратные порядка  $m \times m$ , а  $E$  — единичная матрица.

- ПИД-контроллер дробных порядков  $\lambda$  и  $\gamma$ :

$$\bar{Y} = k_p \bar{X} + k_i P_\lambda \cdot \bar{X} + k_d P_\gamma^{-1} = W_s \cdot \bar{X}, \quad (12)$$

$$W_s = k_p E + k_i P_\lambda + k_d P_\gamma^{-1}. \quad (13)$$

В выражениях (12), (13) нижние индексы в операционных матрицах интегрирования определяют дробные порядки интегро-дифференциальных операторов.

**Иллюстративные примеры.** Отклики контроллеров на различные входные воздействия определим реализацией математических моделей в системе Mathematica®.

**Пример 1.** Классический ПИД-контроллер. Необходимо определить аппроксимацию отклика контроллера на следующие входные воздействия:  $x_1(t) = 1$ ;  $x_2(t) = \sin(2\pi t)$ ;  $x_3(t) = \cos(2\pi t)$ . Параметры звеньев контроллера:  $k_p = 0.5$ ;  $k_i = 2.5$ ;  $k_d = 0.01$ . Используем в качестве подсистем системы базисных функций S – преобразования смещенные полиномы Лежандра нулевого и первого порядков. Диапазон изменения аргумента  $0 \leq t < 1$ , порядок подсистем базисных функций  $m = 100$ .

### Программа 1

- Задание параметров контроллера:  
 **$k_p = 0.5$ ;  $k_i = 2.5$ ;  $k_d = 0.01$ ;**
- Задание порядка базисных подсистем и длины локального аргумента:  
 **$m = 100$ ;  $h = 0.01$ ;**
- Задание входных воздействий:

$$\begin{aligned} x_1[t] := 1; \\ x_2[t] := \text{Sin}[2\pi * t]; \\ x_3[t] := \text{Cos}[2\pi * t]; \end{aligned}$$

- Определение системы базисных функций:  
 $v[t, i, h] := \text{If}[(i - 1) * h \leq t < i * h, 1, 0];$   
 $S = \text{Table}[v[t, i, h], \{i, m\}];$
- Нахождение локальных спектров Лежандра нулевого порядка для входных воздействий:

$$\begin{aligned} X_1 = \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} x_1[t] dt, \{i, m\}\right]; \\ X_2 = \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} x_2[t] dt, \{i, m\}\right]; \\ X_3 = \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} x_3[t] dt, \{i, m\}\right]; \end{aligned}$$

- Нахождение локальных спектров Лежандра первого порядка для входных воздействий:

$$X_{11} = \text{Table}\left[\frac{3}{h} * \int_{(i-1)h}^{ih} x_1[t] * (2t/h + 1 - 2i) dt, \{i, m\}\right];$$

$$X_{21} = \text{Table}\left[\frac{3}{h} * \int_{(i-1)h}^{ih} x_2[t] * (2t/h + 1 - 2i) dt, \{i, m\}\right];$$

$$X_{31} = \text{Table}\left[\frac{3}{h} * \int_{(i-1)h}^{ih} x_3[t] * (2t/h + 1 - 2i) dt, \{i, m\}\right];$$

- Определение операционной матрицы интегрирования дробного порядка в базисе Лежандра нулевого порядка:

$$H[\beta, h, m] :=$$

$$\frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} *$$

$$\text{Table}[\text{Which}[i < j, 0, i == j, 1, i > j, (i-j+1)^{\beta+1} - 2(i-j)^{\beta+1} + (i-j-1)^{\beta+1}], \{i, m\}, \{j, m\}];$$

- Задание операционной матрицы интегрирования первого порядка:

$$P_1 = H[1, h, m];$$

- Определение откликов контроллера на входные воздействия в пространстве S-преобразования:

$$Y_1 = (k_p * \text{IdentityMatrix}[m] + k_i * P_1) . X_1 + \frac{2 k_d}{h} * X_{11};$$

$$Y_2 = (k_p * \text{IdentityMatrix}[m] + k_i * P_1) . X_2 + \frac{2 k_d}{h} * X_{21};$$

$$Y_3 = (k_p * \text{IdentityMatrix}[m] + k_i * P_1) . X_3 + \frac{2 k_d}{h} * X_{31};$$

- Формирование аппроксимаций откликов контроллера на входные воздействия во временном пространстве:

$$y_{a1} = Y_1 . S; y_{a2} = Y_2 . S; y_{a3} = Y_3 . S;$$

- Визуализация аппроксимаций откликов контроллера:

$$\text{Plot}[\{y_{a1}, y_{a2}, y_{a3}\}, \{t, 0, 1\}]$$

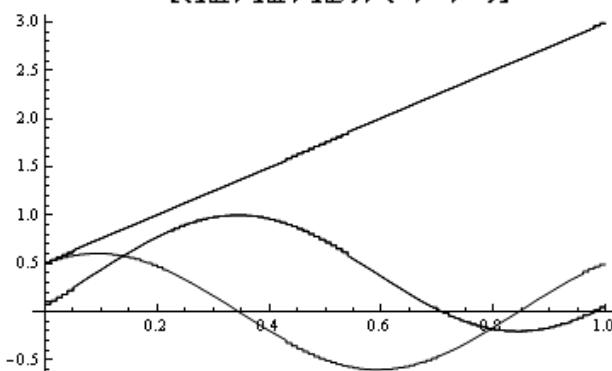
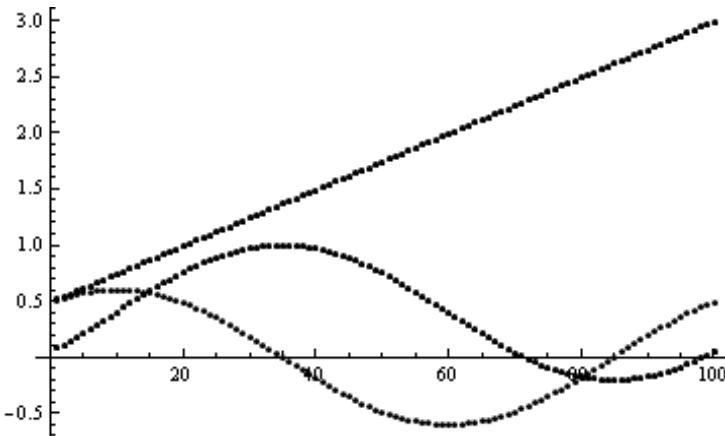


Рис. 2. Аппроксимации откликов контроллера на входные воздействия

- Визуализация откликов контроллера на входные воздействия в пространстве S-преобразования:

**ListPlot[{Y<sub>1</sub>, Y<sub>2</sub>, Y<sub>3</sub>}]**



*Рис. 3. Операційні зображення откликов контроллера на входні воздействия*

**Пример 2.** ПИД-контроллер дробных порядков. Необходимо определить аппроксимацию отклика контроллера на следующие входные воздействия:  $x_1(t) = 1 - 2t^2$ ;  $x_2(t) = e^t \sin(2\pi t)$ ;  $x_3(t) = e^{-t} \cos(3\pi t)$ . Параметры звеньев контроллера:  $k_p = 0.5$ ;  $k_i = 2.5$ ;  $k_d = 0.15$ . Порядок интегрального оператора:  $\lambda = 0.7$ . Порядок дробной производной:  $\gamma = 0.5$ . Используем в качестве подсистем системы базисных функций смещенные полиномы Лежандра нулевого и первого порядков. Диапазон изменения аргумента  $0 \leq t < 1$ , порядок подсистем базисных функций  $m = 200$ .

## Программа 2

- Задание параметров контроллера:  
 **$k_p = 0.5$ ;  $k_i = 2.5$ ;  $k_d = 0.01$ ;**
- Задание порядка базисных подсистем и длины локального аргумента:  
 **$m = 200$ ;  $h = 0.005$ ;**
- Задание входных воздействий:  
 **$x_1[t] := 1 - 2t^2$ ;  $x_2[t] := e^t \sin[2\pi * t]$ ;  
 $x_3[t] := e^{-t} \cos[3\pi * t]$ ;**
- Определение подсистем базисных функций (смешанных полиномов Лежандра нулевого и первого порядков):

```

v[t_, i_, h_] := If[(i - 1)*h <= t < i*h, 1, 0];
S_v = Table[v[t, i, h], {i, m}];
w[t_, i_, h_] := If[(i - 1)*h <= t < i*h, 2 t/h + 1 - 2 i, 0];
S_w = Table[w[t, i, h], {i, m}];

```

- Нахождение локальных спектров Лежандра нулевого порядка для входных воздействий:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} x_1[t] dt, \{i, m\}\right]; \\
X_2 &= \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} x_2[t] dt, \{i, m\}\right]; \\
X_3 &= \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} x_3[t] dt, \{i, m\}\right];
\end{aligned}$$

- Нахождение локальных спектров Лежандра первого порядка для входных воздействий:

$$\begin{aligned}
X_{11} &= \text{Table}\left[\frac{3}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} x_1[t] * (2t/h + 1 - 2i) dt, \{i, m\}\right]; \\
X_{21} &= \text{Table}\left[\frac{3}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} x_2[t] * (2t/h + 1 - 2i) dt, \{i, m\}\right]; \\
X_{31} &= \text{Table}\left[\frac{3}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} x_3[t] * (2t/h + 1 - 2i) dt, \{i, m\}\right];
\end{aligned}$$

- Фрагменты операционных матриц интегрирования дробного порядка [1]:

$$\begin{aligned}
H_{11}[\beta, h, m] &:= \\
&\frac{h^\beta}{\Gamma(\beta + 2)} * \\
&\text{Table}[\text{Which}[i < j, 0, i == j, 1, i > j, \\
&\quad (i - j + 1)^{\beta+1} - 2(i - j)^{\beta+1} + (i - j - 1)^{\beta+1}], \{i, m\}, \{j, m\}]; \\
H_{21}[\beta, h, m] &:= \\
&\frac{h^\beta}{\Gamma(\beta + 3)} * \\
&\text{Table}[\text{Which}[i < j, 0, i == j, -\beta, i > j, \\
&\quad (i - j + 1)^{\beta+1} * (-\beta + 2(i - j)) - 4(i - j)^{\beta+2} + \\
&\quad (i - j - 1)^{\beta+1} * (\beta + 2(i - j))], \{i, m\}, \{j, m\}]; \\
H_{12}[\beta, h, m] &:= -3H_{21}[\beta, h, m];
\end{aligned}$$

---

```
H22[β_, h_, m_] :=
  3 h^β
  _____
  Gamma[β + 4]^*
Table[Which[i < j, 0, i == j, (1 - β)*(β + 2), i > j,
  (i - j + 1)^β+1*(2 - 4 (i - j)^2 + (β + 1)*(4 (i - j) - β)) +
  (i - j)^β+1*(8 (i - j)^2 - 2 (β + 2)*(β + 3)) +
  (i - j - 1)^β+1*(2 - 4 (i - j)^2 - (β + 1)*(4 (i - j) + β))],
  {i, m}, {j, m}];
```

- Фрагменты операционных матриц интегрирования нецелых порядков:

**Q - порядка  $\beta = 0.7$ , R - порядка  $\beta = 0.5$ .**

```
Q11 = H11[0.7, h, m];
Q21 = H21[0.7, h, m];
Q12 = -3 Q21;
Q22 = H22[0.7, h, m];
R11 = H11[0.5, h, m];
R21 = H21[0.5, h, m];
R12 = -3 R21;
R22 = H22[0.5, h, m];
```

- Спектры откликов контроллера дробных порядков на входные воздействия:

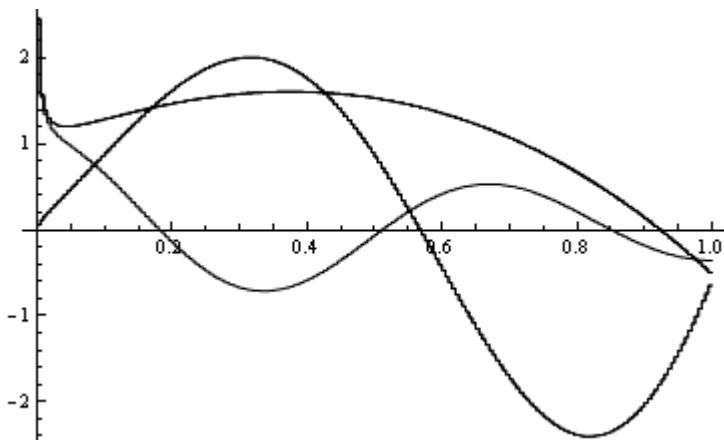
```
Y1_v = (k_p * IdentityMatrix[m] + k_i * Q11).X1_v + k_i * Q21.X1_w +
  2 k_d
  _____
  h * (R12.X1_v + R22.X1_w);
Y2_v = (k_p * IdentityMatrix[m] + k_i * Q11).X2_v + k_i * Q21.X2_w +
  2 k_d
  _____
  h * (R12.X2_v + R22.X2_w);
Y3_v = (k_p * IdentityMatrix[m] + k_i * Q11).X3_v + k_i * Q21.X3_w +
  2 k_d
  _____
  h * (R12.X3_v + R22.X3_w);
```

- Аппроксимации откликов:

$Y_{a1} = Y_{1,v}.S_v; Y_{a2} = Y_{2,v}.S_v; Y_{a3} = Y_{3,v}.S_v;$

- Визуализация откликов во временном пространстве:

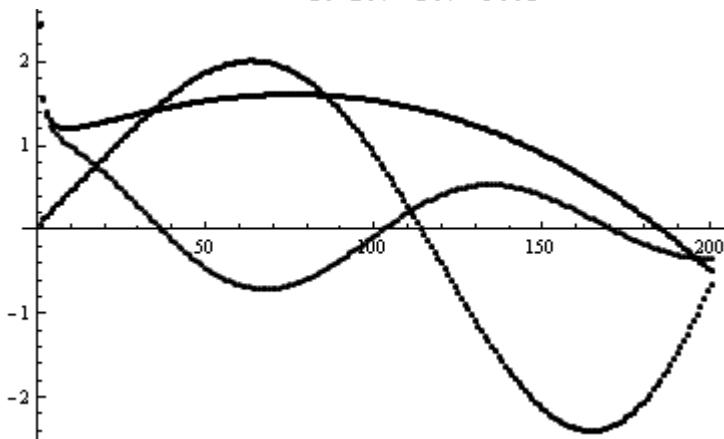
```
Plot[{Ya1, Ya2, Ya3}, {t, 0, 1}]
```



*Рис. 4. Визуалізація откликів контролера дробних порядків на входні воздействія во временному пространстві*

- Визуалізація откликів в операційному пространстві:

**$\text{ListPlot}[\{Y_{1v}, Y_{2v}, Y_{3v}\}]$**



*Рис. 5. Визуалізація откликів контролера дробних порядків на входні воздействія в операційному пространстві*

В приведенных выше примерах не приведены численные значения элементов векторов и матриц а также вид аппроксимационных полиномов в связи с их громоздкостью. При формировании математических моделей контроллеров использован подход к нахождению средних значений производных, предложенный в работах [3; 4].

**Выводы.** Предложенный в работе метод формирования операционных моделей ПИД-контроллеров целого и дробных порядков

позволяє алгебраизувати математичні моделі елементів динаміческих об'єктів і їх систем управління. Простота переходу із операційної області в область временного пространства, характерна для метода S-преобразования, і можливість реалізації в програмних середах комп'ютерної алгебри позволяють зробити висновок про перспективності підходу до розв'язання задач аналізу, синтезу і оптимізації систем автоматичного управління.

### **Список використаної літератури:**

1. Васильєв В. В. Аналіз та математичне моделювання динамічних систем на базі некласичних операційних чисель / В. В. Васильєв, Л. О. Сімак, О. А. Зеленков та ін. — К. : НАН України, 2006. — 184 с.
2. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. — К. : НАН України, 2008. — 256 с.
3. Васильев А. В. Оценивание параметров и дискретизация непрерывных сигналов на основе полиномиальной аппроксимации в локальных базисах / А. В. Васильев // Електроніка та системи управління. — 2011, № 1 (27). — С. 14—19.
4. Васильев А. В. Дискретизация и оценивание дробных производных непрерывных сигналов в локальных базисах полиномов Лежандра / А. В. Васильев / Електроніка та системи управління. — 2011, № 1 (27). — С. 20—25.
5. Лурье Б. Я. Классические методы автоматического управления / Б. Я. Лурье, П. Дж. Энрайт ; под ред. А. А. Ланнэ. — СПб. : БХВ-Петербург, 2004. — 640 с.
6. Oldham K. B. The Fractional Calculus / K. B. Oldham, O. Spanier. — New York ; London : Academic Press, 1974. — 234 p.
7. Wolfram Stephen. The Mathematica book. — Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996. — 1403 p.
8. Xue Dingyu. Linear Feedback Control : Analysis and Design with MATLAB / Xue Dingyu, Y. G. Chen, D. P. Atherton. — SIAM, 2007. — 354 p.

The mathematical models of PID-controllers of the integer and fractional order have been proposed on the basis of S-transform of approximate type. An illustrative examples of the controller's response finding for various input's impacts are given using Mathematica® software environment.

**Key words:** *mathematical modeling, automatic control, dynamic system, PID-controller, fractional calculus, operational methods, polynomial approximation, S-transform.*

Отримано: 23.03.2011