18. Uyemov A. The Ternary Description Language as a Formalism for the Parametric General Systems Theory. Part II / A. Uyemov // Int. J. of General Systems. — 1999. — Vol. 31 (2). — P. 131—155.
19. Uyemov A. The Ternary Description Language as a Formalism for the Parametric General Systems Theory. Part III / A. Uyemov // Int. J. of General Systems. — 2003. — Vol. 32 (6). — P. 583—623.

The article is dedicated to the erothetical dialog inner structure research and design. Ontological model of dialog co-operation between people is proposed on the real (natural) dialog analysis basis. The dialog transaction role is demonstrated in the structure of natural dialog and the concept of erothetical dialog is introduced as one the full-scale natural dialog types. The spectrum of models, explaining internal essence of ero erothetical transaction is proposed. The distinctive feature of the proposed models is their declarative knowledge portions structure orientation, associated with a transaction. For declarative knowledge portions presentation Uyemov ternary description language conceptual framework is used.

Key words: *ontological model, erothetical dialog, dialog transaction, declarative knowledge, ternary description language.*

Отримано: 25.03.2011

УДК 517.9+518

А. А. Верлань, канд. техн. наук

Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев

СПОСОБ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В настоящей работе рассмотрен способ параметрического контроля численного моделирования динамических объектов, в частности, возможность контроля погрешности численного решения дифференциальных уравнений путем использования методов параметрической идентификации.

Ключевые слова: *моделирование, динамические объекты, дифференциальные уравнения, параметрическая идентификация.*

При разработке программного обеспечения систем управления динамическими объектами, особенно в случае использования модели объекта в контуре управления, важной задачей является контроль процесса численного моделирования. Несмотря на то, что численные алгоритмы решения дифференциальных уравнений разрабатываются с учетом необходимой точности получаемого решения, процесс управления, выполняемый в режиме реального времени, требует наличия специальных методов контроля.

Существующие априорные оценки погрешности решения [1] служат в основном для качественного анализа роста погрешности. Их использование для оценки точности конкретного результата численного решения затруднено тем, что значения входящих в них величин для большинства задач получить трудно, а когда это удаётся, то оценка погрешности может дать очень завышенное значение.

Получение апостериорных оценок наиболее часто связано с проведением параллельных расчетов [2] и их использование дает удовлетворительные результаты для оценки погрешности на шаге, при определении погрешности конечного результата получаемые оценки являются в общем случае неудовлетворительными. Контроль погрешности решения с помощью названных оценок затруднен также необходимостью учета ошибок округления [2].

В настоящей работе рассматривается возможность контроля погрешности численного решения путем использования методов параметрической идентификации. При этом достоверность контроля не зависит от причин, вызывающих погрешность решения, а сам процесс контроля состоит из следующих этапов: восстанавливаются с некоторой точностью параметры системы уравнений, для которой имеющееся численное решение является точным, полученные коэффициенты сравниваются с коэффициентами исходной системы уравнений; разность коэффициентов является той информацией, которая используется для оценки поведения решения на участке восстановления (участок восстановления — отрезок численного решения, который используется для параметрической идентификации).

На отрезке $\left[t_0, t_N\right]$ рассматривается задача Коши

$$\dot{x} = f\left(x, q, t\right),\ x\left(t_0\right) = x_0, \tag{1}$$

где t — независимая переменная; q — m-мерный вектор параметров; f — вектор-функция; x — n-мерный вектор входных переменных. Для решения системы (1) используется какой-либо численный метод [1; 2] и значения искомой функции определяются в фиксированных точках $t_i, i = \overline{1, N}$. Требуется оценить погрешность на определенном участке решения, при этом для задачи контроля достаточно установить факт нахождения погрешности в допустимых пределах.

Из-за методической погрешности численных методов и ошибок округления траектория точки в фазовом пространстве для точного решения и полученного численным методом будет различной. Будем предполагать, что непрерывная функция $z(t)$, соответствующая решетчатой функции $z_i = z\left(t_i\right), i = \overline{0, N}$ численного решения (1), является решением системы уравнений

$$\dot{z} = f\left(z, q^*, t\right),\ z\left(t_0\right) = z_0 = x_0. \tag{2}$$

Здесь $q^* \neq q$ и в общем случае может быть функцией независимой переменной. Определение значений вектора параметров q^* может быть осуществлено достаточно просто в случае линейности оператора (2) относительно q^*, т.е. когда систему (2) можно представить так:

$$\dot{z} = \varphi\left(z, t\right) q^*,\ \ z\left(t_0\right) = z_0 = x_0, \tag{3}$$

где $\varphi(z, t)$ — матрица размером $n \times m$.

Способы получения системы линейных алгебраических уравнений для определения оценки неизвестного вектора параметров по существу определяются видом операторов, применяемых к входным и выходным переменным [3], при этом может использоваться численное дифференцирование или численное интегрирование. Так как в данном случае значения входных и выходных переменных в узлах являются точными, то необходимо иметь число независимых уравнений, равное числу восстанавливаемых элементов вектора q^*. Используя, например, численное дифференцирование для определения производных в узловых точках, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$Z = \Phi q^*, \tag{4}$$

где Z — m-мерный вектор, составленный из оценок вектора производных в узловых точках, полученных численным дифференцированием; Φ — $m \times m$ матрица, получаемая путем компоновки соответствующих строк матрицы φ. Из выражения (3) получаем оценку искомого вектора

$$\widehat{q}^* = \Phi^{-1} Z$$

при условии, что матрица Φ неособенная.

Для определения производных в узловых точках удобно применять метод скользящего дифференцирования, когда производная вычисляется для средней точки интерполируемого участка, а вычисление производных для следующих точек производится сдвигом участка интерполяции, при этом коэффициенты при производных в остаточных членах будут иметь наименьшее значение. Следует отметить, что для определения производных в узлах желательно применять методы численного дифференцирования высокого порядка точности.

В случае, когда (2) представляет собой нелинейный относительно вектора параметров оператор, поиск корней (определение q^*) соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений является более сложной задачей.

Учитывая сказанное о сложности восстановления параметров в нелинейном случае, а также конечную цель восстановления (контроль погрешности численного решения задачи Коши), следует признать целесообразным выделение в исходной задаче (1) и последующее восстановление фиктивных параметров p, относительно которых задача восстановления является линейной. Заметим, что выделение таких параметров для задачи (1) возможно в общем случае. Действительно, представляя (1) в виде

$$\dot{x} = F\left(x,q,t\right)p,\ \ x\left(t_0\right) = x_0,$$

где $F(x, q, t)$ — диагональная матрица, элементы которой равны соответствующим компонентам вектор-функции $f(x, q, t)$, а p — вектор, все элементы которого равны единице, убеждаемся в справедливости указанного замечания. Определение оценки $\widehat{p}\,*$ вектора p для системы уравнений

$$\dot{z} = F\left(z,q,t\right)p^*,\ \ z\left(t_0\right) = z_0 = x_0$$

теперь может быть осуществлено так, как указывалось ранее.

В частных случаях в задаче (1) вектор параметров q можно представить в виде прямой суммы векторов q_1 и q_2, причем система (1) может быть записана в виде

$$\dot{x} = \Psi_1(x,q_1,t) + \Psi_2(x,q_1,t)q_2,\ \ x\left(t_0\right) = x_0,$$

где Ψ_2 — $m \times l$ матрица, l — размерность вектора q_2. И в этих случаях процедура восстановления части параметров с целью контроля численного решения может быть легко осуществлена относительно q_2 аналогичным ранее изложенному образом с очевидными изменениями процедуры образования вектора правых частей системы (3). Возможно также решение задачи совместного восстановления фиктивных параметров p и части параметров q.

Следует отметить, что в общем случае вектор восстанавливаемых параметров из-за отклонения численного решения от точного при накоплении погрешностей является функцией независимой переменой, а так как процесс восстановления осуществляется на конечном интервале, то определяя вектор параметров из соответствующей системы алгебраических уравнений, мы аппроксимируем функцию $q^*(t)$ $(p^*(t))$ ступенчатой функцией, постоянной на участках восстановления. Разность между полученной оценкой параметров $\widehat{q}\,*(\widehat{p}^*)$ и параметрами исходной системы уравнений $q(p)$ является той информацией, которая может быть использована для оценки поведения решения на участке восстановления. Сложность и точность получения оценок во многом определяется видом исходных уравнений.

Для линейных дифференциальных уравнений можно, например, использовать оценки, полученные в работе [4]. При исходной системе уравнений

$$\dot{x} = A\left(t\right)x + f,\ \ x\left(0\right) = x_0, \tag{5}$$

где $A\left(t\right) = \left\{a_{ij}\left(t\right)\right\}_1^n$; $f - \left(f_1\left(t\right), \ldots, f_n\left(t\right)\right)^T$; $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^T$; T — знак транспонирования, решение которой определяется численным методом, система уравнений, восстановленная на отрезке $[t_1, t_2]$, численного решения имеет вид

$$\dot{z} = \widehat{A}^*(t)z + f, \ z(0) = z_0 = x_0. \qquad (6)$$

Уравнение для равности решений (5) и (6) такое:

$$\Delta x' = \widehat{A}^*(t)\Delta x + \Delta A(t), \ \Delta x(0) = 0. \qquad (7)$$

Здесь $\Delta A(t) = A(t) - \widehat{A}^*(t), \Delta x = x - z.$ Если элементы матриц и векторов выражения (7) являются непрерывными функциями независимой переменной, то имеет место оценка

$$\|\Delta x\| \int_{t_1}^{t_2} \exp \int_{\tau}^{t_2} \gamma(\widehat{A}^*(\tau_1)\, d\tau_1 \, \|\Delta A(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau,$$

где

$$\gamma\left(A^*(t)\right) = \lim_{h \to +0} \frac{\left\|E - \widehat{A}^*(t)\right\| - 1}{h}.$$

В тех случаях, когда это возможно, для оценки погрешности решения могут быть привлечены методы теории чувствительности [5]. Получение удовлетворительных оценок является сложной задачей, которую во многих практических случаях решить не удается. Можно указать простой с вычислительной точки зрения подход, позволяющий судить о ходе вычислительного процесса. Исходя из точности описания реального процесса системой уравнений (1) определяется область параметров D. Погрешность решения не превышает неустранимой погрешности из-за неадекватности математической модели (1) реальному процессу, если вектор $\Delta q(\Delta p)$ принадлежит этой области. Следует иметь в виду, что при восстановлении вектора q^* полученную оценку $\widehat{q}^*$ можно связать с физической сущностью задачи и сделать определенные выводы о влиянии Δq на решение. Вектор p^* лишен математической интерпретации и для определения влияния на решение вектора $\Delta p = p - \widehat{p}^*$ требуются дополнительные исследования.

Пример. Система уравнений $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0$, где $x = (1, 0)^T$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -900 & 0 \end{bmatrix}$. решается методом Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом 0,01 Через 100 шагов численного интегрирования после решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (4) для получения оценки $\widehat{A}^*$ матрицы A^* восстанавливаемой системы уравнений $\dot{z} = A^* z, \quad z(0) = z_0 = x_0$ получаем разность

$$\Delta A = A - \widehat{A}^* = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot 10^{-3} & 0,653 \cdot 10^{-4} \\ -0,588 \cdot 10^{-1} & 0,5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Для сравнения приведем матрицу ΔA, полученную аналитическим путем без учета погрешностей высшего порядка малости:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0,675 \cdot 10^{-4} \\ 0,6075 \cdot 10^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Для получения оценок производной в узлах использован метод численного дифференцирования десятого порядка точности. Как видно из выражения (8), полученное по предлагаемой методике возмущение ΔA элементов матрицы A, отражающее погрешность численного решения, достаточно близко к расчетному (9). Отличие в элементах главной диагонали объясняется неучетом при аналитическом определении ΔA погрешностей высшего порядка малости.

Список использованной литературы:

1. Крылов В.И. Вычислительные методы высшей математики / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. — Минск : Вышейшая школа, 1982. — Т. 1. — 671 с.
2. Фельдман Л. П. Численные методы в информатике : учебник / Л. П. Фельдман, А. И. Петренко, О. А. Дмитриева. — BHV, 2005. — 600 с.
3. Lennart Ljung System Identification — Theory For the User — 2-nd edition. — N.J. : PTR Prentice Hall, 1999. — 672 p.
4. Годлевский В. С. Об оценках распределений погрешностей решений систем линейных алгебраических и обыкновенных уравнений / В. С. Годлевский // Вычислит. математика и мат. физика. — 1974. — № 5. — С. 1083—1092.
5. Томович Р. Общая теория чувствительности / Р. Томович, М. Вукобратович. — М. : Сов. радио, 1972. — 239 с.

A parametric control method for dynamic objects' numerical simulation, particularly a feasibility of differential equations' numerical solution's error control by using the parametric identification approach is considered in the article.

Key words: *simulation, dynamic objects, differential equations, parametric identification.*

Отримано: 16.04.2011