

The article is devoted to solving for non-linear integral Fredholm-Urysohn equations of the first kind in the MATLAB, describing the inverse problem of determining the siting of the heat source with known values of the external temperature anomaly.

Key words: *non-linear integral equation, Tikhonov regularization method, regularization parameter, thermal field, Matlab.*

Отримано: 25.05.2011

УДК 539.3

Б. С. Окрепкий, канд. фіз.-мат. наук,

А. М. Алілуйко, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПРО ТИСК ШТАМПА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, НА ПРУЖНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ШАР

Розглядається осесиметрична контактна задача термопружності про тиск циліндричного кругового штампа скінченної довжини з плоскою основою, що обертається, на пружний трансверсально-ізотропний шар. Допускається, що на площадці контакту виділяється тепло, кількість якого пропорційна коефіцієнту тертя, швидкості обертання і нормальному контактному напруженню. Тепловий контакт штампа із шаром неідеальний. Між вільними поверхнями розглядуваної системи тіл і навколишнім середовищем відбувається теплообмін по закону Ньютона.

Запропоновано метод визначення контактного нормально-го напруження і температурних полів в циліндрі і шарі.

Ключові слова: *штамп, шар, анізотропія матеріалів, неідеальний тепловий контакт, трансверсально-ізотропний, термопружність, тепловиділення.*

Постановка проблеми. Визначення контактних деформацій і напружень з урахуванням температурних факторів і анізотропії матеріалів є важливим завданням для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкції на пружній основі для раціонального використання конструкції і несучої здатності основи.

Аналіз останніх досліджень. У працях [1—5] досліджено вплив температурних факторів на характер взаємодії тіл. Зокрема, в статтях [3—5] розв'язані осесиметричні контактні задачі термопружності про тиск кругового циліндричного обертаючого штампа з плоскою основою на пружний півпростір і шар для ізотропних матеріалів. Допускається, що на площадці контакту виділяється тепло, кількість якого пропорційна коефіцієнту тертя, швидкості обертання і нормальному

контактному напруженню. Проте недостатньо вивчено вплив умов неідеального теплового контакту для системи тіл циліндр-шар у випадку анізотропних матеріалів.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск трансверсально-ізотропного штампа з плоскою основою, що обертається, на пружний трансверсально-ізотропний шар з урахуванням неідеального теплового контакту. Знайти формули для визначення температурних полів і нормальних контактних напружень в системі тіл циліндр-шар. Дослідити вплив контактної провідності і коефіцієнтів анізотропії на розподіл температури і напружень в зоні контакту двох тіл.

Постановка задачі. Нехай жорсткий циліндричний круговий штамп довжиною L і радіусом R , з плоскою основою, втискується силою P в трансверсально-ізотропний шар скінченної товщини H . Допускається, що штамп обертається з постійною кутовою швидкістю ω відносно осі симетрії. За рахунок тертя на площадці контакту виділяється тепло, кількість якого пропорційна швидкості ωr , коефіцієнту тертя k_0 і контактному напруженню $\sigma_z(r)$. Тепловиділення на площадці контакту спричиняє появу теплових потоків спрямованих всередину штампа і шару. Поверхня шару зовні площадки контакту вільна від зовнішніх зусиль. На площадці контакту дотичні напруження $\tau_{rz} = 0$, а $\tau_{r\theta}$ пропорційні напруженню $\sigma_z(r)$. Тепловий контакт між тілами припускається неідеальним. На вільних поверхнях циліндра і шару відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем по закону Ньютона.

При заданих припущеннях необхідно визначити нормальні напруження під штампом і температурні поля в циліндрі і шарі.

Для розв'язування задачі введемо циліндричну систему координат r, θ, z з площиною $z = 0$, яка співпадає з поверхнею шару, віссю OZ , спрямованою всередину штампа по його осі симетрії (рис. 1).

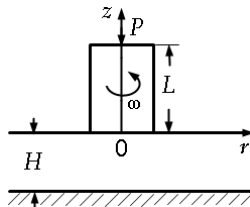


Рис. 1.

Всі величини (напруження, переміщення, температура T , пружні постійні, коефіцієнти теплопровідності і лінійного температурного розширення, коефіцієнти теплообміну), які відносяться до шару позначено верхнім індексом (1), аналогічні величини для циліндричної області записуються без верхніх індексів.

Таким чином, запропонована задача розв'язується при наступних граничних умовах:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + H_1 T = 0, \quad (z = L; 0 \leq r < R), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + H_2 T = 0, \quad (0 < z < L; r = R), \quad (2)$$

$$\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = \omega k_0 r \sigma_z(r) / J, \quad (3)$$

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0 (T - T^1) \quad (z = 0; 0 \leq r < R),$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0, \quad (z = 0; R < r < \infty) \quad (4)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0, \quad (z = -H; 0 \leq r < \infty),$$

$$u_z^1 = -\varepsilon \quad (z = 0; 0 \leq r < R); \quad \sigma_z^1 = 0 \quad (z = 0; R < r < \infty), \quad (5)$$

$$\tau_{rz}^1 = 0 \quad (z = 0; 0 \leq r < \infty), \quad u_z^1 = 0, \quad \tau_{rz}^1 = 0 \quad (z = -H; 0 \leq r < \infty). \quad (6)$$

Тут λ_z , λ_z^1 , H_i , H_i^1 ($i = 1, 2$) — коефіцієнти теплопровідності і теплообміну; h_0 — контактна провідність; ε — величина вертикального переміщення; J — механічний еквівалент тепла.

Відомо [6], що у випадку трансверсально-ізотропних тіл, температурне поле задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (7)$$

Напруження і переміщення в шарі визначаємо через пружні потенціали φ_1 і φ_2 згідно формул

$$u_z^{(T^1)} = -a_1^1 \left(s_2^2 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z} \right), \quad \tau_{rz}^{(T^1)} = \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial r \partial z}, \quad \sigma_z^{(T^1)} = \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial r}. \quad (8)$$

Функції $\varphi_1^{(1)}$ і $\varphi_2^{(1)}$ задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial r} + (v_2^1)^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial z^2} = \frac{1}{(a_2^1)^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial z^2} - a_3^1 T^1 \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial r} + (v_1^1)^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial z^2} = a_4^1 T^1.$$

У співвідношеннях (7)—(9) λ^2 — відношення коефіцієнтів теплопроводності в напрямку осі Oz і перпендикулярному до нього; $(\nu_i^1)^2$, s_i^2 — корені деяких характеристичних рівнянь [6; 7], які залежать від модулів пружності A_{ij}^1 [8]; a_i^1 ($i = \overline{1,4}$) — деякі величини, які залежать від коефіцієнтів лінійного температурного розширення α_{T^1} і β_{T^1} (в напрямку осі Oz і відповідно в площині ізотропії) [6].

Для визначення температурного поля в шарі введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r, z)$ нульового порядку

$$\bar{T}^1(\xi, z) = \int_0^{\infty} r T^1(r, z) J_0(\xi r) dr,$$

за допомогою якої, із рівняння (7) знаходимо $T^1(\rho, \zeta)$ через дві довільні функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$

$$T^1(\rho, \zeta) = \int_0^{\infty} \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (10)$$

де $J_0(\eta \rho)$ — функції Бесселя першого роду; $\rho = r/R$; $\zeta = z/R$.

Температурне поле в циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок матиме вигляд

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (\lambda^2 r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\beta_k r) \left(A_k sh \frac{\beta_k z}{\lambda} + B_k ch \frac{\beta_k z}{\lambda} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\lambda \gamma_k r) (C_k \sin \gamma_k z + D_k \cos \gamma_k z), \quad (11)$$

де A_k , B_k , C_k , D_k ($k = \overline{0, \infty}$) — довільні постійні; $I_0(\lambda \gamma_k r)$ — функції Бесселя першого роду уявного аргументу; β_k , γ_k — власні числа, які визначаємо із граничних умов.

По відомих температурних полях, температурні потенціали $\varphi_1^{(1)}$ і $\varphi_2^{(1)}$ визначаємо із системи (9) таким способом. Підставляючи значення T^1 в друге рівняння (9), знаходимо $\varphi_2^{(1)}$, а знаючи $\varphi_2^{(1)}$ і T^1 , із першого рівняння визначаємо $\varphi_1^{(1)}$. При цьому для загального розв'язку достатньо знайти часткові розв'язки $\varphi_1^{(1)}$ і $\varphi_2^{(1)}$ рівнянь (9). Не зупиняючись на викладках, запишемо кінцевий результат відповідно для шару

$$\varphi_1^{(1)}(\eta) = h_1^1 \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta^2} \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta,$$

$$\varphi_2^{(1)}(\eta) = a_4 (\lambda^1)^2 \varphi_1^1(\eta) / \left\{ \left[(v_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] h_1^1 \right\}, \quad (12)$$

$$h_1^1 = \left\{ a_4 - a_3 \left[(v_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] \right\} \cdot \left\{ a_2 \left[(v_2^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] \left[(v_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] \right\}^{-1}.$$

Компоненти температурних напружень і переміщень обчислюються за формулами (8).

Маючи вирази для температурних напружень і переміщень, можна розв'язати задачу при механічних граничних умовах. Загальний напружено-деформований стан унаслідок дії температурних і механічних факторів одержуємо, додавши до компонент напружень і переміщень (8) компоненти $u_z^1(\varphi)$, $\sigma_z^1(\varphi)$, $\tau_{rz}^1(\varphi)$, знайдені згідно [1] через функції напружень φ_1 і φ_2 , тобто $u_z^1 = u_z^{(T^1)}(\varphi) + u_z^1(\varphi)$ і т.д.

Вирази для компонент переміщень і напружень та рівняння для функції напружень мають вигляд

$$\begin{aligned} u_z^1(\varphi) &= \frac{\partial}{\partial z} (k_1^1 \varphi_1 + k_2^1 \varphi_2), \\ \sigma_z^1(\varphi) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \left[k_1^1 A_{33}^1 - (v_1^1)^2 A_{13}^1 \right] \varphi_1 + \left[k_2^1 A_{33}^1 - (v_2^1)^2 \right] \varphi_2 \right\}, \\ \tau_{rz}^1(\varphi) &= A_{44}^1 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[(1 + k_1^1) \varphi_1 + (1 + k_2^1) \varphi_2 \right], \\ \left[\nabla_1^2 + (v_i^1)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi_i &= 0, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (13)$$

де k_i^1 , $(v_i^1)^2$ ($i = 1, 2$) — корені характеристичного рівняння [7].

Таким чином, для визначення переміщення і напружень в трансверсально-ізотропному шарі маємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} u_z^1 &= -a_1 \lambda^1 h_2^1 R \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta z}{\lambda^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\lambda^1}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta + \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{k_1^1}{v_1^1} \times \right. \\ &\times \left[-F_1^*(\eta) e^{-\frac{\eta z}{v_1^1}} + F_2^*(\eta) e^{\frac{\eta z}{v_1^1}} \right] + \frac{k_2^1}{v_2^1} \left[-F_3^*(\eta) e^{-\frac{\eta z}{v_2^1}} + F_4^*(\eta) e^{\frac{\eta z}{v_2^1}} \right] \left. \right\} J_0(\eta \rho) d\eta, \\ \sigma_z^1 &= -(\lambda^1)^2 h_1^1 \int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta z}{\lambda^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\lambda^1}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta + \frac{1}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{d_1^1}{(v_1^1)^2} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left[F_1^*(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2^*(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} \right] + \frac{d_2^1}{(v_2^1)^2} \left[F_3^*(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4^*(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} \right] \Bigg\} J_0(\eta\rho) d\eta,$$

$$\tau_{rz}^1 = \lambda^1 h_1^1 \int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\lambda^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\lambda^1}} \right] J_1(\eta\rho) d\eta + A_{44}^1 \int_0^\infty \left\{ \frac{1+k_1^1}{v_1^1} \times \right. \quad (14)$$

$$\left. \times \left[F_1^*(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_1}} - F_2^*(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} \right] + \frac{1+k_2^1}{v_2^1} \left[F_3^*(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_2}} - F_4^*(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} \right] \right\} J_1(\eta\rho) d\eta,$$

де $\varphi_i(\eta)$ ($i=1,2$), $F_i^*(\eta)$ — невідомі функції; $h_2^1 = s_2^2 h_1^1$ — $a_4^1 / \left[(v_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right]$, s_2^2 — корені рівняння [6; 7]:

$$A_{44}^1 S^4 - (A_{11}^1 - A_{12}^1) S^2 + (A_{11}^1 - A_{12}^1)^2 (A_{13}^1 + A_{44}^1) / \left[A_{11}^1 A_{33}^1 - (A_{13}^1)^2 \right],$$

$$a_1^1 = a_{11}^1 - a_{12}^1, \quad a_2^1 = \frac{a_{11}^1 a_{33}^1 - (a_{13}^1)^2}{a_1^1 a_{11}^1}, \quad a_3^1 = \frac{\beta_{T^1} a_{11}^1 - \alpha_{T^1} a_{13}^1}{a_1^1 a_{11}^1},$$

$$a_4^1 = a_3^1 (v_1^1)^2 - \alpha_{T^1} / a_{11}^1, \quad d_i^1 = k_i^1 A_{33}^1 - (v_i^1)^2 A_{13}^1 \quad (i=1,2).$$

Для спрощення викладок припустимо, що $H_2 = 0$. Для задоволення граничної умови (2) у формулі (11) потрібно покласти $D_k = 0$, $C_k = 0$ ($k = \overline{0, \infty}$), $\beta_k = \mu_k / R$, де μ_k корені рівняння $J_1(\mu_k) = 0$. Гранична умова (1), з урахуванням ортогональності функцій Бесселя, призводить до співвідношень між постійними A_n і B_n , у результаті чого, температуру в циліндрі виразимо через одну нескінчену систему постійних $C_k^{(1)}$ за формулою

$$T(\rho, \zeta) = \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{1}{\lambda^1} \left(\zeta - \frac{1}{k_1} - l \right) C_0^{(1)} + \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{\lambda}{\lambda^1} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_1 \lambda s h \frac{\mu_k}{\lambda} (\zeta - l) - \mu_k c h \frac{\mu_k}{\lambda} (\zeta - l)}{\mu_k s h \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda c h \frac{\mu_k l}{\lambda}} J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)}, \quad k_1 = H_1 R, \quad l = \frac{L}{R}. \quad (15)$$

Граничні умови (3), (4) призводять до системи інтегральних рівнянь, які зв'язують функції $\varphi_k(\eta)$ ($k=1,2$) з коефіцієнтами $C_k^{(1)}$ ($k=0, \infty$) і напруженням $\sigma_z^1(\rho)$:

$$\int_0^{\infty} \eta [\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta - C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)} =$$

$$= \frac{\omega k_0}{J \lambda_z^1} R^2 \rho \sigma_z^1(\rho), \quad (\rho < 1), \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} [\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = f_1(\rho), \quad (\rho < 1), \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} [(k_2 + \eta)\varphi_1(\eta) + (k_2 - \eta)\varphi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1), \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(\eta - k_3) e^{-\frac{\eta h}{\lambda^1}} \varphi_1(\eta) + (\eta + k_3) e^{\frac{\eta h}{\lambda^1}} \varphi_2(\eta) \right] J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad (0 \leq \rho < \infty), \quad (19)$$

де

$$f_1(\rho) = -\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{1}{\lambda^1} \left(\frac{1}{h_0^1} + \frac{1}{k_1} + l \right) C_0^{(1)} - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{\lambda}{\lambda^1} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k + k_1 \lambda \left(th \frac{\mu_k l}{\lambda} + \frac{\mu_k}{\lambda h_0^1} \right) J_0(\mu_k \rho)}{\mu_k th \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda} C_k^{(1)},$$

$$h = H / R, \quad k_1 = \lambda H_1 R, \quad k_2 = \lambda^1 H_2^1 R, \quad k_3 = \lambda^1 H_1^1 R, \quad h_0^1 = h_0 R / \lambda_z.$$

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля [9] до рівняння (19), одержимо систему рівнянь відносно функцій $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$, розв'язок яких має вигляд:

$$\varphi_1(\eta) = \frac{\eta + k_3}{2Q(\eta)} e^{\frac{\eta h}{\lambda^1}} \varphi(\eta), \quad \varphi_2(\eta) = \frac{\eta - k_3}{2Q(\eta)} e^{-\frac{\eta h}{\lambda^1}} \varphi(\eta), \quad (20)$$

$$Q(\eta) = \left(\eta^2 + k_2 k_3 \right) sh \frac{\eta h}{\lambda^1} + (k_2 + k_3) \eta ch \frac{\eta h}{\lambda^1}.$$

Підставивши функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$ в рівняння (18) одержимо

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1). \quad (21)$$

Задовольнивши граничним умовам (6), з врахуванням (20), для напруження $\sigma_z^1(\rho, 0)$ і переміщення $u_z^1(\rho, 0)$, на поверхні шару маємо формули:

$$u_z^1(\rho, 0) = \frac{R}{\chi_0} \int_0^\infty [1 - G(\eta h)] \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta)}{Q_1(\eta)} \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (22)$$

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = \int_0^\infty \eta \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta,$$

де

$$R_\eta \varphi(\eta) = \frac{d_1^1}{(\nu_1^1)^2} [F_1^*(\eta) + F_2^*(\eta)] + \frac{d_2^1}{\nu_2^1} [F_3^*(\eta) + F_4^*(\eta)] -$$

$$- R(\lambda^1)^2 h_1^1 \frac{P_5(\eta)}{Q(\eta)} \varphi(\eta),$$

$$\frac{k_1^1}{\nu_1^1} \left[-F_1^*(\eta) e^{\frac{\eta h}{\nu_1^1}} + F_2^*(\eta) e^{-\frac{\eta h}{\nu_1^1}} \right] + \frac{k_2^1}{\nu_2^1} \left[-F_3^*(\eta) e^{\frac{\eta h}{\nu_2^1}} + F_4^*(\eta) e^{-\frac{\eta h}{\nu_2^1}} \right] -$$

$$- a_1^1 h_2^1 \lambda^1 R \frac{k_3}{Q(\eta)} \varphi(\eta) = 0,$$

$$Q_1(\eta) = sh(\alpha h \eta) + \frac{\alpha}{\beta} sh(\beta h \eta), \quad G(\eta h) = 1 - \frac{ch(\alpha h \eta) - ch(\beta h \eta)}{Q_1(\eta)},$$

$$\alpha = \frac{1}{\nu_1^1} + \frac{1}{\nu_2^1}, \quad \beta = \frac{1}{\nu_2^1} - \frac{1}{\nu_1^1}, \quad \chi_0 = \frac{A_{11}^1 (\nu_2^1)^2 + A_{13}^1}{A_{11}^1 (\nu_1^1 + \nu_2^1)} d_1^1,$$

$$Q_2(\eta) = \frac{1}{2} \left[(\eta + k_3) e^{\frac{\eta h}{\lambda^1}} \left(q_1 k_3 P_3(\eta) - q_1 P_4(\eta) Q_1(\eta) - q_2 sh \frac{\eta h}{\nu_2^1} ch \frac{\eta h}{\nu_1^1} P_4(\eta) + \right. \right.$$

$$\left. + q_3 sh \frac{\eta h}{\nu_1^1} sh \frac{\eta h}{\nu_2^1} P_5(\eta) + q_2 k_3 sh \frac{\eta h}{\nu_2^1} \right) + (\eta - k_3) e^{-\frac{\eta h}{\lambda^1}} \left(-q_1 P_3(\eta) + \right.$$

$$\left. + q_1 k_2 Q_1(\eta) + q_2 k_2 sh \frac{\eta h}{\nu_2^1} ch \frac{\eta h}{\nu_1^1} + q_3 \eta sh \frac{\eta h}{\nu_1^1} sh \frac{\eta h}{\nu_2^1} - q_2 sh \frac{\eta h}{\nu_2^1} P_6(\eta) \right) \right],$$

$$P_3(\eta) = \frac{2}{\nu_1^1 - \nu_2^1} \left(\nu_1^1 sh \frac{\eta h}{\nu_2^1} - \nu_2^1 sh \frac{\eta h}{\nu_1^1} \right), \quad P_4(\eta) = \eta sh \frac{\eta h}{\lambda^1} + k_3 ch \frac{\eta h}{\lambda^1},$$

$$P_5(\eta) = \eta ch \frac{\eta h}{\lambda^1} + k_3 sh \frac{\eta h}{\lambda^1}, \quad P_6(\eta) = \eta sh \frac{\eta h}{\lambda^1} + k_2 ch \frac{\eta h}{\lambda^1}, \quad (23)$$

$$q_1 = \lambda^1 \left[a_1^1 h_2^1 - \frac{k_1^1 h_1^1}{A_{44}^1 (1 + k_1^1)} \right], \quad q_2 = \frac{2 \lambda^1 h_1^1 v_1^1 A_{11}^1 (v_1^1 + v_2^1)}{\left[A_{11}^1 (v_2^1)^2 + A_{13}^1 \right] (1 + k_1^1) A_{44}^1},$$

$$q_3 = \frac{2 (v_1^1)^2 (v_1^1 + v_2^1) h_1^1 (\lambda^1)^2 A_{11}^1}{d_1^1 \left[A_{11}^1 (v_2^1)^2 + A_{13}^1 \right]}.$$

Задовольнивши граничним умовам (5), приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\varphi(\eta)$ і $\phi(\eta)$:

$$\frac{1}{\chi_0} \int_0^\infty \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{\chi_0} \int_0^\infty G(\eta h) \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta -$$

$$-\int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta)}{Q_1(\eta)} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta \quad (\rho < 1), \quad (24)$$

$$\int_0^\infty \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1). \quad (25)$$

Якщо ввести функцію $f(t)$ співвідношенням

$$\phi(\eta) = \chi_0 \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt, \quad (26)$$

то рівняння (25) задовольняється тотожно, а рівняння (24) зводиться до інтегрального рівняння Абеля

$$\int_0^\rho \frac{f(t)}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} dt = g(\rho),$$

розв'язок якого, відповідно до [10], визначається формулою

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho, \quad (27)$$

де

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{\chi_0} \int_0^\infty G(\eta h) \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{Q_1(\eta)}{Q_2(\eta)} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta. \quad (28)$$

Підставивши вираз (28) у формулу (27), одержимо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно функції $f(t)$

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^\infty G(\eta h) \cos \eta x \cos \eta t d\eta -$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{Q_1(\eta)}{Q(\eta)} \cos \eta t \varphi(\eta) d\eta \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (29)$$

Використовуючи умову рівноваги штампа

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma_z^1(\rho) d\rho$$

і вирази (22), (26), рівняння (29) зведемо до вигляду:

$$f(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^\infty G(\eta h) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta =$$

$$= -\frac{P}{2\pi R^2 \chi_0} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{Q_1(\eta)}{Q(\eta)} \varphi(\eta) \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (30)$$

Для визначення функції $\varphi(\eta)$ продовжимо рівняння (21) на весь інтервал $(0 \leq \rho < \infty)$

$$\int_0^\infty \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = U(1 - \rho) X(\rho), \quad (0 \leq \rho < \infty). \quad (31)$$

Тут $U(x)$ — функція Хевісайда, $X(\rho)$ — невідома функція, яку подамо співвідношенням

$$X(\rho) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k J_0(\mu_k \rho),$$

де a_k ($k = \overline{0, N}$) — невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити; значення N підбирається із умови забезпечення необхідної точності розв'язку задачі.

Застосувавши до обох частин рівняння (31) формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля, знайдемо функцію $\varphi(\eta)$ через невідомі коефіцієнти a_k :

$$\varphi(\eta) = a_0 J_1(\eta) + \eta^2 J_1(\eta) \sum_{k=1}^N \frac{a_k J_0(\mu_k)}{\eta^2 - \mu_k^2}. \quad (32)$$

Підставивши функцію $\varphi(\eta)$ (32) в інтегральні рівняння (16), (17), (30), з врахуванням (20), прийдемо до співвідношень, які зв'язують між собою функцію $f(t)$ і коефіцієнти $C_k^{(1)}$, a_k :

$$\sum_{k=0}^N a_k \alpha_k^{(1)}(\rho) + \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{\varepsilon_0}{\lambda^1} C_0^{(1)} + \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{\lambda}{\lambda^1} \sum_{k=1}^\infty J_0(\mu_k \rho) \varepsilon_k C_k^{(1)} = 0, \quad (\rho < 1), \quad (33)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k \alpha_k^{(2)}(\rho) - C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)} = \frac{\omega k_0 R^2}{J \lambda_z^1} \rho \sigma_z^1(\rho), \quad (\rho < 1), \quad (34)$$

$$f(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 G(\eta h) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta =$$

$$= -\frac{P}{2\pi R^2 \chi_0} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^N a_k \delta_k(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (35)$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{h_0^1} + \frac{1}{k_1} + l, \quad \varepsilon_k = \frac{\mu_k + k_1 \lambda \left(th \frac{\mu_k l}{\lambda} + \frac{\mu_k}{\lambda h_0^1} \right)}{\mu_k th \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda},$$

$\alpha_k^{(j)}(\rho)$ ($j = 1, 2; k = \overline{0, \infty}$) — невідні інтеграли, обчислені згідно [11]:

$$\alpha_0^{(j)}(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{P_j(\eta) J_1(\eta) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta)} d\eta = r_1^{(j)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_1^*(y_m) I_0(y_m \rho) K_1(y_m)}{Q'(iy_m)},$$

$$\alpha_k^{(j)} = J_0(\mu_k) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 P_j(\eta) J_0(\eta \rho) J_1(\eta)}{Q(\eta)(\eta^2 - \mu_k^2)} d\eta = \frac{P_j(\mu_k)}{Q(\mu_k)} J_0(\mu_k \rho) +$$

$$+ 2J_0(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m^2 P_j^*(y_m) I_0(y_m \rho) K_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)}, \quad (j = (1, 2), k = \overline{1, \infty}),$$

$$r_1^{(1)} = \left(\frac{k_3 h}{\lambda^1} + 1 \right) r_0, \quad r_1^{(2)} = k_3 r_0, \quad r_0 = \left(k_2 k_3 \frac{h}{\lambda^1} + k_2 + k_3 \right)^{-1},$$

y_m ($m = \overline{1, \infty}$) — корені рівняння $Q(iy_m) = 0$;

$$P_1(\eta) = k_3 sh \frac{\eta h}{\lambda^1} + \eta ch \frac{\eta h}{\lambda^1}, \quad P_2(\eta) = \eta \left(\eta sh \frac{\eta h}{\lambda^1} + k_3 ch \frac{\eta h}{\lambda^1} \right), \quad (36)$$

$$P_1^*(y_m) = k_3 \sin \frac{y_m h}{\lambda^1} + y_m \cos \frac{y_m h}{\lambda^1}, \quad P_2^*(y_m) = y_m \left(k_3 \cos \frac{y_m h}{\lambda^1} - y_m \sin \frac{y_m h}{\lambda^1} \right),$$

$$Q'(iy_m) = \left[(k_2 k_3 - y_m^2) \frac{h}{\lambda^1} + k_2 + k_3 \right] \cos \frac{y_m h}{\lambda^1} - y_m \left[2 + (k_2 + k_3) \frac{h}{\lambda^1} \right] \sin \frac{y_m h}{\lambda^1},$$

$$\delta_0(t) = \int_0^{\infty} \frac{J_1(\eta) Q_2(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta,$$

$$\delta_k(t) = J_0(\mu_k) \int_0^\infty \frac{\eta^2 J_1(\eta) Q_2(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta) (\eta^2 - \mu_k^2)} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta t}{\eta} \right) d\eta.$$

Подамо функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = -\frac{P}{2\pi R^2 \chi_0} \sum_{k=0}^{N_1} (2k+1) P_k(1-2t^2) y_k. \quad (37)$$

Тоді нормальне напруження $\sigma_z^1(\rho, 0)$, враховуючи (22), (26) і (37) матиме вигляд

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = -\frac{P}{\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[y_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^\infty (2k+1) (-1)^k T_{2k+1}(\rho) y_k \right], \quad (\rho < 1), \quad (38)$$

де $T_{2k+1}(\rho)$ — функція Чебишева.

Помноживши обидві рівності (33), (34) на ρ , $\rho J_0(\mu_k \rho)$ з врахуванням виразу (38) і ортогональності функцій Бесселя, а також, помноживши обидві частини рівняння (35) на t , $t P_0(1-2t^2)$ з врахуванням ортогональності функцій Лежандра на інтервалі $(0; 1)$ і функції (37), прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих x_k ($k = \overline{0, N}$) і y_k ($k = \overline{0, N_1}$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \alpha_{0,k} x_k - \frac{\pi}{4} \Lambda y_0 &= 0, \\ \sum_{k=0}^N \alpha_{n,k} x_k - \frac{\pi}{4} \Lambda \sum_{k=0}^{N_1} g_k(\mu_n) y_k &= 0 \quad (n = \overline{1, N}), \\ \sum_{k=0}^N i_{0,k} x_k + \sum_{k=0}^{N_1} A_{0,k} y_k &= 1, \\ \sum_{k=0}^N i_{n,k} x_k + \sum_{k=0}^{N_1} A_{n,k} y_k &= 0 \quad (n = \overline{1, N_1}), \end{aligned} \quad (39)$$

де

$$\begin{aligned} a_k \alpha_{T^1} &= -\frac{P}{2\pi R^2 \chi_0} x_k, \quad \Lambda = \frac{\omega k_0 \chi_0 R^2}{\lambda_z^1 J} \alpha_{T^1}, \quad C_0^{(1)} = -2 \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1 \varepsilon_0} \frac{\lambda^1}{\alpha_{T^1}} \sum_{k=0}^N x_k \alpha_{0,k}^{(1)}, \\ C_n^{(1)} &= -2 \frac{\lambda_z}{\lambda \lambda_z^1} \frac{\lambda^1}{\alpha_{T^1}} \frac{1}{\varepsilon_n J_0^2(\mu_n)} \sum_{k=0}^N x_k \alpha_{n,k}^{(1)}, \\ \alpha_{0,k} &= \alpha_{0,k}^{(2)} + \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} \frac{\lambda^1}{\varepsilon_0} \alpha_{0,k}^{(1)}, \quad \alpha_{n,k} = \alpha_{n,k}^{(2)} + \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} \frac{\lambda^1}{\varepsilon_n} \alpha_{n,k}^{(1)}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$g_k(\mu_n) = J_{k+1}\left(\frac{\mu_n}{2}\right)J_{-k-1}\left(\frac{\mu_n}{2}\right) + J_k\left(\frac{\mu_n}{2}\right)J_{-k}\left(\frac{\mu_n}{2}\right),$$

$$\alpha_{0,0}^{(j)} = \int_0^1 \rho \alpha_0^{(j)}(\rho) d\rho = \frac{1}{2} r_1^{(j)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_j^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{y_m Q'(iy_m)},$$

$$\alpha_{0,k}^{(j)} = \int_0^1 \rho \alpha_k^{(j)}(\rho) d\rho = 2J_0(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m P_j^*(y_m) K_1(y_m) I_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)} \quad (j=1,2),$$

$$\alpha_{n,0}^{(j)} = \alpha_{0,n}^{(j)}, \quad \beta_{n,k} = \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \alpha_k^{(j)}(\rho) d\rho =$$

$$= 2J_0(\mu_k) J_0(\mu_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m^3 P_j^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_k^2)(y_m^2 + \mu_n^2) Q'(iy_m)},$$

$$\alpha_{n,k}^{(j)} = \begin{cases} \beta_{n,k}, & k \neq n \\ \beta_{n,k} + \frac{P_j(\mu_n)}{2Q(\mu_n)} J_0^2(\mu_n), & k = n \end{cases}$$

$$i_{n,0} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_2(\eta) \tau_n(\eta) J_1(\eta)}{\eta Q(\eta) Q_1(\eta)} d\eta, \quad i_{n,k} = \frac{4}{\pi} J_0(\mu_k) \int_0^{\infty} \frac{\eta Q_2(\eta) \tau_n(\eta) J_1(\eta)}{(\eta^2 - \mu_n^2) Q(\eta) Q_1(\eta)} d\eta,$$

$$A_{0,0} = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} G(\eta h) \frac{\sin \eta}{\eta} \tau_0(\eta) d\eta, \quad (41)$$

$$A_{0,k} = 2(-1)^{k+1} (2k+1) \int_0^{\infty} G(\eta h) \tau_0(\eta) J_{k+0,5}\left(\frac{\eta}{2}\right) J_{-k-0,5}\left(\frac{\eta}{2}\right) d\eta,$$

$$\tau_0(\eta) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\cos \eta}{\eta} - \frac{1}{\eta} + \frac{\sin \eta}{2} \right), \quad A_{n,0} = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} G(\eta h) \frac{\sin \eta}{\eta} \tau_n(\eta) d\eta,$$

$$A_{n,k} = 2(-1)^{k+1} (2k+1) \int_0^{\infty} G(\eta h) \tau_n(\eta) J_{k+0,5}\left(\frac{\eta}{2}\right) J_{-k-0,5}\left(\frac{\eta}{2}\right) d\eta,$$

$$A_{n,k} = \begin{cases} A_{n,k}^{(1)}, & k \neq n \\ 1 + A_{n,k}^{(1)}, & k = n \end{cases},$$

$$\tau_n(\eta) = \frac{1}{4} \eta \gamma_n\left(\frac{\eta}{2}\right) \left[\gamma_{n-1}\left(\frac{\eta}{2}\right) - \gamma_{n+1}\left(\frac{\eta}{2}\right) \right] - \frac{(-1)^n \sin \eta}{2\Gamma(1+n)\Gamma(1-n)},$$

$\gamma_n(\eta)$ — сферичні функції.

Для визначення температурних полів в циліндрі і шарі, з урахуванням (10), (11), (15), (20), (32), (40) маємо формули:

а) циліндрична область

$$T(\rho, \zeta) = -\frac{P}{2\pi R^2 \chi_0 \alpha_{T^1}} \left\{ 2 \frac{\lambda_z \lambda^1}{\lambda_z^1} \left(\zeta - \frac{1}{k_1} - l \right) \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{k=1}^N \alpha_{0,k}^{(1)} x_k + \right. \\ \left. + 2 \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} \frac{\lambda^1}{\lambda} \sum_{k=0}^N x_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \rho) \alpha_{m,k}^{(1)}}{J_0^2(\mu_m)} \frac{1}{\varepsilon_m} R_2(\mu_m, \zeta) \right\}; \quad (42)$$

б) шар ($-h \leq \zeta \leq 0$, $0 \leq \rho < \infty$)

$$T^1(\rho, \zeta) = -\frac{P}{2\pi R^2 \chi_0 \alpha_{T^1}} \left\{ \left[\frac{1 + k_3(h/\lambda^1 + \zeta)}{k_2 k_3 h / (\lambda^1 + k_2 + k_3)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_1^*(y_m, \zeta)}{Q'(iy_m)} \right] \times \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} K_1(y_m) & I_0(y_m \rho) \\ -K_0(y_m) & I_1(y_m \rho) \end{pmatrix} \right] x_0 + 2 \sum_{k=1}^N x_k \left[\left(\frac{R(\mu_k, \zeta) J_0(\mu_k \rho)}{Q(\mu_k) J_0(\mu_k)} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m^2 R_1^*(y_m, \zeta)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)} \begin{pmatrix} K_1(y_m) & I_0(y_m \rho) \\ -K_0(y_m \rho) & I_1(y_m) \end{pmatrix} \right] \right\}, \quad (43)$$

$$R(\eta, \zeta) = \eta ch \frac{\zeta + h}{\lambda^1} \eta + k_3 sh \frac{\zeta + h}{\lambda^1} \eta,$$

$$R_1^*(y_m, \zeta) = y_m \cos \frac{\zeta + h}{\lambda^1} y_m + k_3 \sin \frac{\zeta + h}{\lambda^1} y_m,$$

$$R_2(\mu_m, \zeta) = \left[k_1 sh \frac{\mu_m(l - \zeta)}{\lambda} + y_m ch \frac{y_m(l - \zeta)}{\lambda} \right] / \left(y_m ch \frac{\mu_m l}{\lambda} + k_1 sh \frac{\mu_m l}{\lambda} \right).$$

При $0 \leq \rho \leq 1$ множником береться верхній вираз в круглих дужках, при $\rho > 1$ — нижній.

Щоб отримати ізотропний випадок задачі [5], достатньо у відповідних формулах: підставити $\lambda = \lambda^1 = 1$, $\alpha_{T^1} = \beta_{T^1}$ і перейти до границі при $\nu_1^1 \rightarrow \nu_2^1 \rightarrow 1$, $s_1^1 \rightarrow s_2^1 \rightarrow 1$, $k_1^1 \rightarrow k_2^1 \rightarrow 1$; виразити модулі пружності A_{ij}^1 і коефіцієнти деформації через пружні постійні ізотропного тіла [8].

Приведемо результати числового аналізу температурних полів і контактних нормальних напружень під штапом в залежності від контактної провідності h_0^1 і параметра Λ для трансверсально-ізотропного матеріалу (магнію) при $l = 2$, $h = 2$, $\lambda_z / \lambda_z^1 = 0,1$, $k_1 = \infty$, $k_2^1 = 1$, $k_1^1 = k_2 = 0$.

Розв'язувалась система лінійних алгебраїчних рівнянь (39) з 40-ма невідомими. В цьому випадку похибка, задоволена граничним умовам задачі, складає не більше 4%.

Графіки залежності температури для шару $T^*(\rho) = -2\alpha_{T1} \pi R^2 \chi_0 T^1(\rho, 0) / P$ (штриховані лінії відповідають ізотропним матеріалам) і нормального контактного напруження $\sigma_z^*(\rho) = -2\pi R^2 \sigma_z^1(\rho, 0) / P$ подані на рис. 2, 3.

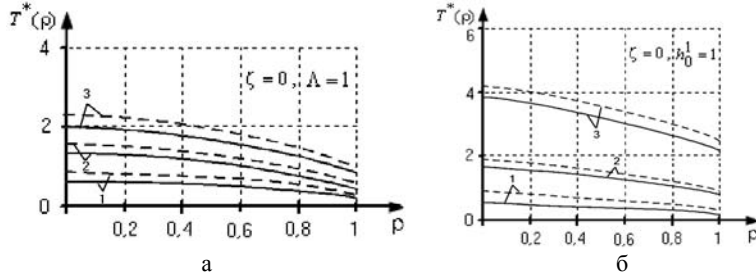


Рис. 2. Розподіл температури в зоні контакту для шару при різних значеннях: а — контактної провідності при $\Lambda = 1$: 1 — $h_0^1 = 0, 1$; 2 — $h_0^1 = 1$; 3 — $h_0^1 = \infty$; б — параметра Λ : 1 — $\Lambda = 1$; 2 — $\Lambda = 5$; 3 — $\Lambda = 10$.

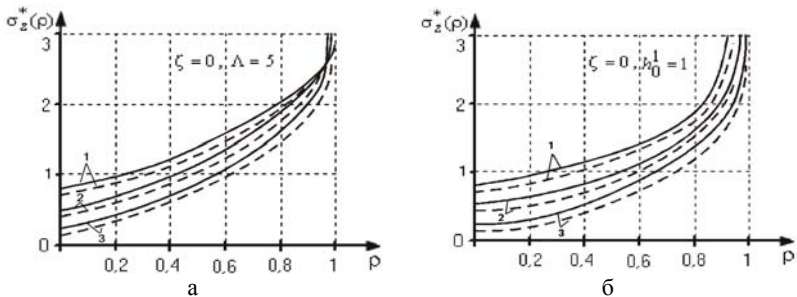


Рис. 3. Розподіл нормального контактного напруження для шару при різних значеннях: а — контактної провідності: 1 — $h_0^1 = 0, 1$; 2 — $h_0^1 = 1$; 3 — $h_0^1 = \infty$; б — параметра Λ : 1 — $\Lambda = 1$; 2 — $\Lambda = 5$; 3 — $\Lambda = 10$.

Висновки. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля та метод Фур'є, розв'язок задачі термопружності зведено до визначення деяких сталих із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходимо температурні поля в будь-якій точці циліндра і шару, а також нормальні напруження у зоні контакту.

Результати розрахунків для магнію показують, що у випадку трансверсально-ізотропних матеріалів, порівняно з ізотропними, тем-

пература в зоні контакту зменшується, а нормальні контактні напруження збільшуються у межах 4—8%.

Дослідження показують, що контактна провідність h_0^1 і параметра Λ значно впливають на розподіл температурних полів і контактних напружень під штампом.

Список використаних джерел:

1. Грилицкий Д. В. Осесимметричная контактная задача теории упругости и термоупругости / Д. Грилицкий, Я. Кизыма. — Львов : Изд-во при Львов. ун-те, 1981. — 135 с.
2. Окрепкий Б. С. Осесимметрична контактна задача термопружності про тиск обертаючого штампа на пружний півпростір / Б. С. Окрепкий. — К. : Ін-т математики, 1996. — С. 165—174. — (Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач) (Праці / Ін-т математики НАН України ; т. 13).
3. Окрепкий Б. С. Осесимметрична контактна задача термопружності про тиск обертаючого штампа на пружний півпростір з врахуванням анізотропії матеріалів / Б. С. Окрепкий, І. Крижанівський // Зб. наук. праць академії наук України. — 1998. — № 3. — С. 110—120.
4. Окрепкий Б. С. Осесимметрична контактна задача термопружності про тиск обертаючого штампа, що обертається на пружний півпростір при неідеальному тепловому контакті / Б. Окрепкий, М. Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — 2002. — Т. 7, № 1. — С. 5—11.
5. Грилицкий Д. В. Осесимметричная контактная задача термоупругости о давлении вращающего штампа на слой / Д. Грилицкий, Б. Окрепкий // Изв. АН СССР, МТТ. — 1984. — № 1. — С. 22—30.
6. Singh A. Axisymmetrical thermal stresses in transversely isotropic bodies / A. Singh // Arch. mech. Stosowanej. — 1960. — V. 12, № 3. — P. 287—304.
7. Singh A. Stress distributions within solids of revolution / A. Singh // ZAMM. — 1959. — V. 39, № 12. — P. 484—495.
8. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. — М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. — 300 с.
9. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье / И. Н. Снеддон. — М. : Издательство иностранной литературы, 1955. — 668 с.
10. Уиттнер Э. Т. Курс современного анализа / Э. Уиттнер, Г. Ватсон. — М. : Физматгиз, 1963. — 343 с.
11. Мигович Ф. М. Обчислення групи невластних інтегралів, які містять функції Бесселя I-го роду / Ф. Мигович, Б. Окрепкий // Зб. наук. праць академії наук України. — 1995. — № 8. — С. 133—137.

The axis-symmetric contact task of thermo-elasticity of the cylinder circular punch stress of finite length with a plane foundation which is twirled on an elastic transversal-isotropic layer is observed. It is supposed, that in the contact area deposits warmly which amount is proportional to friction coefficient, to rotate velocities and to a normal contact stress. The heat contact between punch and layer is the imperfect. Between the free

surfaces of the observed bodies system and the environment there is a heat exchange on a Newton's law.

Method of determination of normal contact stress and temperature fields in the cylinder and the layer is offered.

Key words: *punch, layer, anisotropy materials, non-ideal contact, transversal-isotropic, thermo-elasticity.*

Отримано: 15.04.2011

УДК 62.50

С. А. Положаенко, д-р техн. наук, профессор

Одесский национальный политехнический институт, г. Одесса

СИНТЕЗ ЗАКОНОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИМИСЯ ВЫРАЖЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предложен метод синтеза управления энергетическими объектами, переходные процессы в которых отличаются повышенной инерционностью. Рассмотрена вычислительная процедура определения коэффициентов регулятора системы управления.

Ключевые слова: *энергетический объект, закон управления, запаздывания по координатам пространства состояния и управлению, критерий оптимальности.*

Значительный класс энергетических объектов (механизмов, машин и установок) можно характеризовать как объекты с выраженным запаздыванием. К таким объектам, в частности, можно отнести ответственные судовые механизмы: рулевую машину, гидросистемы, энергетические установки (главный двигатель, дизель-генераторы, утиль-котел), лебедки, а также объекты нефтехимии, например, ректификационные перегонные колонны, дозаторы, смесители и целый ряд других объектов. Удельный вес и значимость данного класса объектов велик, поэтому важным вопросом является управление этими объектами.

Как указано, основной отличительной особенностью рассматриваемых объектов является их повышенная инерционность, которая проявляется в наличии запаздываний. При этом, с точки зрения теории управления, запаздывания следует рассматривать двух видов: запаздывания на переменные состояния и запаздывания на управление. Ввиду специфики конструкции (значительные геометрические размеры) или физики протекающих процессов (тепловые процессы в энергетических установках), данные объекты должны рассматриваться как объекты с распределенными параметрами. Негативными проявлениями влияния