УДК 519.852:519.876

В. А. Богаенко*, канд. техн. наук,
В. И. Кудин,** д-р техн. наук

*Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, г. Киев,
**Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченка, г. Киев

АНАЛИЗ СХЕМ МЕТОДА БАЗИСНЫХ МАТРИЦ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НЕДООПРЕДЕЛЁННЫМ СИСТЕМАМ

Анализируются компьютерные схемы решения прямоугольных (недоопределенных) СЛАУ с матрицами ограничений общего вида с помощью метода базисных матриц. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, показывающие эффективность алгоритмов МБМ.

Ключевые слова: *анализ СЛАУ, недоопределённые СЛАУ, метод базисных матриц.*

Введение. Математический аппарат анализа линейных систем уравнений (СЛАУ) и неравенств (СЛАН), является основополагающим при проведении исследований более сложных нелинейных задач. В частности, при моделировании многих процессов движения жидкостей характерными проблемами являются: неадекватность процесса и математической модели, математической и машинной модели [1]; некорректность задачи; накопление ошибок округления, усечения и других в ходе вычислений [1—2] при реализации вычислительного метода и алгоритмов приближенного решения в конусе общих решений соответствующей СЛАН.

В случае решения обратных задач или задач с неполными данными, СЛАУ, являющиеся результатом дискретизации исходной задачи, имеют прямоугольную матрицу ограничений и, в определённых ситуациях, множество решений. В данной работе рассматриваются особенности применения метода базисных матриц (МБМ) [6] для решения таких СЛАУ, а также проводится сравнительный анализ эффективности схем МБМ с такими широко известными алгоритмами, как метод Гаусса, псевдообращение с помощью SVD и метод Гревиля.

Основные положения метода базисных матриц (МБМ). Будем рассматривать СЛАУ вида

$$Au = C\ , \tag{1}$$

где матрица A (со строками $a_1, a_2, \dots, a_n$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm})$, $j = \overline{1,m}$) — полностью заполненная матрица размерности $(m \times n)$, $m > n$, $u = (u_1, u_2, .., u_m)^T$, $C = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$.

Введем соответственно системе (1) изменением знака $''=''$ на $''\leq''$ СЛАН вида

$$Au \leq C. \tag{2}$$

При наличии целевой функций вида

$$f_1 = \max Bu, \tag{3}$$

модель приобретет вид задачи линейного программирования (1)—(3), в которой $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$ — вектор целевой функции.

В основу МБМ положена идея базисной матрицы.

Определение 1. Матрицу $A_б$, составленную из m линейно независимых нормалей гиперплоскостей (ограничений (2)), будем называть искусственной базисной, а решение u_0 соответствующей ей системы уравнений $A_б u = C^0$, где $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})^T$, искусственным базисным.

Определение 2. Две базисных матрицы с отличной одной строкой будем называть смежными.

При анализе задачи (1)—(3), базисные матрицы в ходе итераций последовательно изменяются вводом-выводом из нее нормалей ограничений задачи используя связывающие соотношения [6], которые имеют место между коэффициентами разложения нормалей ограничений (1), целевой функции (3) по строкам искусственной базисной матрицы, элементами обратных матриц, базисными решениями, невязками ограничений (1) и значениями целевой функции в двух смежных базисных матрицах.

На основе формул связи элементов метода в смежных базисных матрицах можно получить аналитические представления общих решений соответствующей системы линейных алгебраических неравенств (СЛАН) с разным типом ограничений в случае невырожденности матрицы ограничений. Также можно проанализировать влияние количественных изменений в элементах модели на величину ранга и свойства матрицы ограничений.

Построение общего решения СЛАН (2) основывается на свойствах решения соответствующей СЛАУ (1).

Рассмотренная методология может быть применена для анализа соответствующих моделей линейного программирования (МЛП) и для решения ряда других задач. В частности, на основе формул связи элементов метода в смежных базисных матрицах можно анализировать величину ранга матрицы ограничений, а также уточнять найденное решение СЛАУ [7; 8].

Метод базисных матриц применительно к недоопределённым системам. Применение алгоритмов метода базисных матриц (МБМ) к полноранговым недоопределённым системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) позволяет получать матрицу, псевдообратную к матрице ограничений и множество решений СЛАУ. Более того, при выборе начальной базисной матрицы в виде $A_б^{(0)} = A$, вычислительная схема МБМ является альтернативной вычислительной схемой метода Гревиля.

Опишем шаг алгоритма метода базисных матриц следующим образом.

Обозначим текущую обратную базисную матрицу как $A_б^{(i)}$, $\dim A_б^{(i)} = [m,n]$, $A_б^{(i)}[j]$ — столбец матрицы $A_б^{(i)}$. Тогда [6]

$$A_б^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{A_б^{(i-1)}[j]}{a_i A_б^{(i-1)}[j]}, j = i \\ A_б^{(i-1)}[j] - \dfrac{a_i A_б^{(i-1)}[j]}{a_i A_б^{(i-1)}[i]} A_б^{(i-1)}[i], j \neq i. \end{cases}$$

Введем обозначение: $\overline{A}_б^{(i)} = \{A_б^{(i)}[1],..., A_б^{(i)}[i]\}$. Тогда

$$\overline{A}_б^{(i)} = \left(\overline{A}_б^{(i-1)} - A_б^{(i-1)}[i] \frac{a_i \overline{A}_б^{(i-1)}}{a_i A_б^{(i-1)}[i]} \vdots \frac{A_б^{(i-1)}[i]}{a_i A_б^{(i-1)}[i]} \right). \quad (4)$$

Утверждение 1. Если $A_б^{(0)} = A$, то на i-ой итерации МБМ, матрица $\overline{A}_б^{(i)}$ будет псевдообратной к матрице A_i, $\dim A_i = [i,m]$, составленной из i первых строк прямой базисной матрицы.

Доказательство утверждения 1. Покажем, что, независимо от значения $A_б^{(0)}$,

$$A_i A_б^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{A_i A_б^{(i-1)}[j]}{a_i A_б^{(i-1)}[j]}, j = i \\ A_i A_б^{(i-1)}[j] - \dfrac{a_i A_б^{(i-1)}[j]}{a_i A_б^{(i-1)}[i]} A_i A_б^{(i-1)}[i], j \neq i \end{cases} = \begin{pmatrix} I & \vdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Если (5) выполняется для $i = k$, то оно выполняется и для $i = k + 1$ так как

$$A_{k+1} A_б^{(k+1)} = \begin{pmatrix} B & \vdots & C & \vdots & D \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} A_k \overline{A}_б^{(k)} - A_k A_б^{(k)}[k+1] \dfrac{a_{k+1} \overline{A}_б^{(k)}}{a_{k+1} A_б^{(k)}[k+1]} \\ \cdots \\ a_{k+1} \overline{A}_б^{(k)} - a_{k+1} A_б^{(k)}[k+1] \dfrac{a_{k+1} \overline{A}_б^{(k)}}{a_{k+1} A_б^{(k)}[k+1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} \dfrac{A_k A_б^{(k)}[k+1]}{a_{k+1}A_б^{(k)}[k+1]} \\ \cdots \\ \dfrac{a_{k+1}A_б^{(k)}[k+1]}{a_{k+1}A_б^{(k)}[k+1]} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} A_k A_б^{(k)}[k+2:m]-A_k A_б^{(k)}[k+1]\dfrac{a_{k+1}A_б^{(k)}[k+2:m]}{a_{k+1}A_б^{(k)}[k+1]} \\ \cdots \\ a_{k+1}A_б^{(k)}[k+2:m]-a_{k+1}A_б^{(k)}[k+1]\dfrac{a_{k+1}A_б^{(k)}[k+2:m]}{a_{k+1}A_б^{(k)}[k+1]} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $A_б^{(k)}[k+2:m]=\{A_б^{(k)}[k+2],...,A_б^{(k)}[m]\}$.

А для $i=1$, независимо от значения $A_б^{(0)}$,

$$A_1A_б^{(1)}=\begin{cases} \dfrac{a_1A_б^{(0)}[1]}{a_1A_б^{(0)}[1]}, j=1 \\ a_1A_б^{(0)}[j]-\dfrac{a_1A_б^{(0)}[j]}{a_1A_б^{(0)}[i]}a_1A_б^{(0)}[i], j\neq 1 \end{cases}=\begin{pmatrix}1 & \vdots & 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно (5) выполняется для всех итераций МБМ ($i\geq 1$).

Из (5) следует, что

$$A_i\overline{A}_б^{(i)}=I. \tag{6}$$

По определению [9], матрица A^+ является псевдообратной к матрице A если она удовлетворяет следующим условиям:

$$A^+AA^+=A^+, \tag{7}$$

$$AA^+A=A, \tag{8}$$

$$(AA^+)^*=AA^+, \tag{9}$$

$$(A^+A)^*=A^+A. \tag{10}$$

Истинность условий (7)—(9) для матриц $A=A_i$, $A^+=\overline{A}_б^{(i)}$ непосредственно вытекает из (6).

В случае условия (10), покажем, что при соблюдении определённых условий, шаг МБМ идентичен шагу метода Гревиля, из чего следует, что $\overline{A}_б^{(i)}=A_i^+$.

Запишем шаг метода Гревиля (с учётом того, что исходная матрица полноранговая) в виде:

$$A_i^+ = \begin{pmatrix} A_{i-1} \\ \dots \\ a_i \end{pmatrix}^+ = \left(A_{i-1}^+ - \frac{Z_{i-1}a_i^T a_i A_{i-1}^+}{a_i Z_{i-1} a_i^T} \vdots \frac{Z_{i-1}a_i^T}{a_i Z_{i-1} a_i^T} \right), \tag{11}$$

$$\dim A_i^+ = [i,n],\ \dim A_i = [n,i] = \{a_1,...,a_i\},\ Z_i = I - A_i^+ A_i.$$

Если $A_б^{(i-1)}[i] = Z_{i-1}a_i^T$, то преобразование (11) идентично преобразованию (4) и, следовательно, $A_i^+ = \overline{A}_б^{(i)} \Rightarrow \overline{A}_б^{(m)} = A_б^{(m)} = A^+$.

Покажем, что условие $A_б^{(i-1)}[i] = Z_{i-1}a_i^T$ соблюдается в том случае, если $A_б^{(0)} = A$.

Пусть $A_б^{(0)} = A$. Тогда

$$A_б^{(i-1)}[i] = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} A_б^{(i-1)}[j] \frac{a_j A_б^{(j-1)}[i]}{a_j A_б^{(j-1)}[j]}. \tag{12}$$

С другой стороны

$$Z_{i-1}a_i^T = (I - A_{i-1}^+ A_{i-1})a_i^T = a_i^T - A_{i-1}^+ A_{i-1} c_i^T,$$

$$A_i^+ A_i = \left(A_{i-1}^+ - \frac{Z_{i-1}a_i^T a_i A_{i-1}^+}{a_i Z_{i-1} a_i^T} \vdots \frac{Z_{i-1}a_i^T}{a_i Z_{i-1} a_i^T} \right) \begin{pmatrix} A_{i-1} \\ \cdots \\ a_i \end{pmatrix} =$$

$$= A_{i-1}^+ A_{i-1} - \frac{Z_{i-1}a_i^T a_i A_{i-1}^+ A_{i-1}}{a_i Z_{i-1} a_i^T} + \frac{Z_{i-1}a_i^T}{a_i Z_{i-1} a_i^T} a_i =$$

$$= A_{i-1}^+ A_{i-1} + \frac{Z_{i-1}a_i^T a_i Z_{i-1}}{a_i Z_{i-1} a_i^T} = \sum_{j=1}^{i} \frac{Z_{j-1}a_j^T a_j Z_{j-1}}{a_j Z_{j-1} a_j^T} \Rightarrow$$

$$Z_{i-1}a_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Z_{j-1}a_j^T a_j Z_{j-1} a_i^T}{a_j Z_{j-1} a_j^T}. \tag{13}$$

При $A_б^{(i-1)}[i] = Z_{i-1}a_i^T$ формулы (12) и (13) идентичны, $A_б^{(m)} = A^+$, а множество решений системы (1) описывается формулой $U = A^+ C + (I - A^+ A)v$, где v — произвольный вектор.

Следует также отметить, что аналогичным образом МБМ позволяет получать псевдообратную матрицу для переопределённых систем, пользуясь коммутативностью операций псевдообращения и транспонирования, что позволяет находить среднеквадратическое приближение решения таких СЛАУ.

Результаты численных экспериментов. Характеристики алгоритмов МБМ при решении недоопредлённых СЛАУ, такие как быстродействие и точность решения ($\varepsilon = \left\|C - Au\right\|_2^2$), оценивались путем проведения численных экспериментов.

В первом из них решалась методом функций Грина обратная задача для линейного параболического уравнения в частных производных в трёхмерном пространстве, во втором — обратная задача для эллиптического уравнения.

Полученная после дискретизации прямоугольная СЛАУ (в случае первого эксперимента размерности 2544 x 250, в случае второго — 5488 x 3375) решалась двумя наборами методов: в первом псевдообращение проводилось после сведения к квадратной матрице, во втором — непосредственно. Применялись следующие методы псевдообращения: МБМ, метод Гревиля, псевдообращение через построение SVD. В случае сведения к квадратной матрице вместо псевдообращения применялось также обращение с помощью метода Гаусса.

По умолчанию, вычисления проводились с 64-битной разрядностью.

Измеренные характеристики алгоритмов приведены в табл. 1 (для первого эксперимента) и 2 (для второго).

Таблица 1

Время работы и точность решения

Алгоритм	**Время, мс**	**Точность**	**Ранг матрицы**
МБМ ($A_б^{(0)} = I$)	210	8.622713e+01	69
МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$)	1270	2.757579e-13	243
МБМ ($A_б^{(0)} = A$)	1120	1.130675e-04	104
МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$), одна итерация уточнения решения	2390	3.810552e-11	246
МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$), две итерации уточнения решения	3490	1.443047e-11	246
МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$), вычисления 128-битной точности	5830	5.472333e-13	244
МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$), вычисления 32-битной точности на GPU	2070	3.02e+7	
Сведение к квадратной матрице + МБМ ($A_б^{(0)} = I$)	690	2.750671e-04	206
Сведение к квадратной матрице + МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$)	690	6.784639e-004	215

Продолжение таблицы 1

Сведение к квадратной матрице + МБМ ($A_б^{(0)} = A$)	690	5.620380e+000	51
Сведение к квадратной матрице + метод Гаусса	690	4.170714e+00	
Сведение к квадратной матрице +метод Гревиля	830	5.059977e-03	
Сведение к квадратной матрице + SVD	740	2.869429e-05	
Метод Гревиля	2440	1.721952e-05	
SVD	2550	5.731771e-15	

Таблица 2

Время работы и точность решения

Алгоритм	**Время, мс**	**Точность**	**Ранг**
МБМ ($A_б^{(0)} = I$)	353090	8.659082e+08	3371
МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$)	578040	1.025009e-17	3375
МБМ ($A_б^{(0)} = A$)	573320	1.794419e-05	3318
МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$), одна итерация уточнения решения	1153150	4.488249e-17	3375
МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$), вычисления 128-битной точности	2214100	4.913289e-19	3375
МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$), вычисления 32-битной точности на GPU	120180	1,75e+00	
Сведение к квадратной матрице + МБМ ($A_б^{(0)} = rnd(0,1)$)	673510	1.300065e-05	3341
Сведение к квадратной матрице + метод Гаусса	918220	1.218781e-07	
Сведение к квадратной матрице +метод Гревиля	810600	3.113444e+00	
Сведение к квадратной матрице + SVD	1361550	1.460000e+00	
Метод Гревиля	679550	1.895083e-07	
SVD	2627860	7.877083e-20	

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Выбор начальной матрицы в МБМ существенно влияет на точность решения. Эксперименты показывают, что в случае прямоугольной матрицы ограничений СЛАУ, наибольшая точность достигается при случайном заполнении начальной матрицы. При выборе $A_б^{(0)} = I$ алгоритм имеет большее быстродействие из-за появляющейся возмож-

ности оптимизации вычислений, однако в случае прямоугольных матриц точность решения неудовлетворительна. В то же время, для квадратных матриц точности решений при выборе $A_б^{(0)} = rnd(0,1)$ и $A_б^{(0)} = I$ близки. Выбор $A_б^{(0)} = A$ приводит к существенному накоплению ошибки и получаемая точность ниже, чем при других вариантах, аналогичная ситуация возникает и при применении метода Гревиля.

2. Использование процедуры уточнения решения и увеличения разрядности вычислений до 128 бит (при конвертировании полученной псевдообратной матрице к 64-битному представлению) не привело к существенному увеличению точности, несмотря на неполный машинный ранг матрицы в случае с первым экспериментом.

3. Вычисления одинарной точности с помощью GPU показали более чем четырёхкратное ускорение работы на матрице большой размерности при замедлении скорости работы на матрице малой размерности, что объясняется значительным по сравнению с общим временем копирования данных с и на GPU. С другой стороны, одинарная точность вычислений не позволила на тестовых задачах получить адекватные решения.

4. Использование сведения к квадратной матрице существенно снижает точность независимо от алгоритма псевдообращения. Быстродействие по сравнению с непосредственным применением алгоритмов псевдообращения при этом растет при большом значении *n/m*, что видно из результатов первого эксперимента, но падает при малом значении *n/m* и увеличении размерности СЛАУ (второй эксперимент), что является следствием увеличения времени выполнения операций умножения матриц по сравнению с операцией псевдообращения.

5. Наилучшим по точности показало себя псевдообращение с помощью SVD. Точность эта на несколько порядков выше, чем при использовании МБМ, однако, быстродействие SVD ниже в 2 раза в случае с первым экспериментом и в 5 раз ниже в случае со вторым экспериментом большей разрядности.

Список использованной литературы:

1. Численное программное обеспечение интеллектуального мини-компьютера Инпарком / А. М. Химич, И. Н. Молчанов и др. — К. : Наук. думка, 2007. — 220 с.
2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложение / Дж. Деммель. — М. : Мир, 2001. — 430 с.
3. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Уилкинсон. — М. : Наука, 1970. — 564 с.
4. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — М. : Наука, 1983. — 335 с.
5. Достоверные вычисления. Базовые численные методы / У. Кулиш, Д. Рац, Р. Хаммер, М. Хокс. — М. ; Ижевск, 2005. — 496 с.
6. Метод штучних базисних матриць / В. І. Кудін, С. І. Ляшко, Ю. П. Яценко, Н. В. Хритоненко // Доповіді НАН України. — 2007. — С. 30–34.

7. Богаенко В. О. Анализ компьютерных схем метода базисных матриц / В. О. Богаенко, В. И. Кудин, В. В. Скопецкий // Компьютерная математика. — 2009. — № 2. — С. 3–13.
8. Богаенко В. О. О свойствах параллельных вычислительных схем метода базисних матриц / В. О. Богаенко, В. И. Кудин // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. — Вип. 2. — С. 3–14.
9. Penrose R. A generalized inverse for matrices / R. Penrose // Proc. of the Cambridge Philosophical Society 51. — 1955. — P. 406–413.

Computational schemes for solving general rectangular (underdetermined) linear systems using basis matrix method has been analyzed in the paper. Computing experiments results which show BMM efficiency have been presented.

Key words: *linear algebraic systems analysis, underdetermined linear systems, basis matrix method.*

Отримано: 17.02.2012

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

А. Я. Бомба, д-р техн. наук, професор,
А. М. Сінчук, аспірант,
С. В. Ярощак, викладач

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

КОМПЛЕКСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ СИСТЕМИ «СВЕРДЛОВИНИ-ТРІЩИНИ» ПРИ ВИТІСНЕННІ ОДНІЄЇ РІДИНИ ІНШОЮ У ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ПЛАСТІ

Розроблено комплексний підхід до математичного моделювання поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою. При цьому, на основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, запропоновано числовий алгоритм ідентифікації притоку пластової рідини до свердловини за умови збурення фільтраційної течії тріщиною гідравлічного розриву пласта скінченної проникності. На конкретному прикладі проаналізовано ефективність гідророзриву та вплив характеристичних параметрів тріщини на роботу експлуатаційної та нагнітальної свердловин.

Ключові слова: *тріщина гідророзриву, квазіконформне відображення, лінія розділу, крайові задачі, гідродинамічна сітка.*

Аналіз стану видобутку нафти і газу на різних родовищах свідчить, що однією із основних причин пониження об'ємів відбору вуглеводнів — погіршення колекторських властивостей середовища у привибійних зонах у процесі розкриття пласта і його розробки [1; 2].

Сучасні технології впливу на привибійну зону пласта, з метою покращення фільтраційних властивостей, ґрунтуються на використанні різ-

