УДК 532.72

А. П. Власюк, д-р техн. наук,
О. М. Багнюк, аспірант

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

ІДЕНТИФІКАЦІЯ МІСЦЕПОЛОЖЕННЯ ДЖЕРЕЛА ЗАБРУДНЕННЯ В СТАЦІОНАРНІЙ ОДНОВИМІРНІЙ ЗАДАЧІ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ

Отримано розв'язок задачі чисто дифузійного перенесення забруднення від точкового джерела в деякому середовищі на відрізку $[0,l]$ методами скінченного синус-перетворення Фур'є та функції Гріна. Отримано також значення максимальної концентрації забруднення та формулу для розрахунку кількості викинутих джерелом забруднень. На конкретному прикладі проведено чисельні експерименти та їх аналіз.

Ключові слова: *ідентифікація, джерело забруднення, метод скінчених синус-перетворень Фур'є, метод функції Гріна.*

1. Вступ. Важливою задачею науки на сучасному етапі розвитку є прогнозування змін екологічних систем під впливом природних і антропогенних факторів. Останнім часом виникає все більше проблем пов'язаних з визначенням невідомих параметрів різноманітних джерел забруднення ґрунтів. Такі задачі виникають при: визначенні місцеположення точкових джерел забруднень в задачах масопереносу (в тім числі і радіоактивних); визначенні ореолу родовищ корисних копалин; визначенні місцеположення поривів нафтопроводів; визначенні розміщення точкових електричних зарядів; визначенні місцеположення точкових джерел тепла; в системі моніторингу великих промислових об'єктів де, як правило, ведуться постійні спостереження за станом забрудненості ґрунтів, але спостереження можуть констатувати лише факт проникнення забруднень у ґрунті, і, як правило, не дають можливості з'ясувати, де саме розташоване джерело забруднення та визначити його потужність [1—6].

2. Постановка задачі. Розглянемо одновимірну задачу чисто дифузійного перенесення забруднень в деякому однорідному середовищі (ґрунті, повітрі, воді) на відрізку $[0,l]$ від деякого джерела потужності Q, розміщеного в точці $x = x_0$ [2]. Нехай процес перенесення забруднення є встановленим і описується першим законом Фіка. Задача полягає в тому, що при заданих значеннях параметрів процесу масопереносу (коефіцієнта дифузії, потужності джерела забруднення) та необхідній кількості замірів концентрації в деяких точках досліджуваної області потрібно знайти координату місцеположення джерела забруднення в заданій області [7].

3. Математична модель задачі. Знайдемо точку x_0 розміщення джерела, концентрація забруднень $c\left(x, x_0\right)$ від якого визначається із розв'язку крайової задачі

$$D\frac{d^2c}{dx^2} - \gamma c = -Q\delta(x - x_0),\ x \in \left(0, l\right), \tag{1}$$

$$c(0, x_0) = 0,\ c(l, x_0) = 0, \tag{2}$$

де $c\left(x, x_0\right)$ — концентрація забруднень в точці x від джерела, розміщеного в точці x_0, D — коефіцієнт дифузії, γ — коефіцієнт, що враховує зміну інтенсивності забруднюваної речовини, Q — потужність джерела забруднень, x_0 — координата точки розміщення джерела забруднення.

Потрібно при заданих вхідних даних $\gamma > 0, Q > 0,\ D > 0$ та значеннях концентрацій, заміряних в деяких точках x_i, $i = \overline{1, n}$, знайти точку розміщення джерела $x = x_0$ на відрізку $\left[0, l\right]$.

Зауважимо, що права частина рівняння записана у вигляді дельта-функції, яка моделює миттєвий викид забруднення точковим джерелом з потужністю Q, розміщеним у точці $x = x_0$.

4. Знаходження концентрації методом скінченних синус-перетворень Фур'є. Для знаходження розв'язку задачі (1), (2) використаємо метод скінченних синус-перетворень Фур'є [8]. Для цього до рівняння (1) застосуємо скінченне синус-перетворення Фур'є

$$\overline{c}\left(x_0\right) = \int_0^l c(x, x_0)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{3}$$

Тоді з рівняння (1) знайдемо трансформанту

$$\overline{c}\left(x_0\right) = \frac{Q\sin\frac{n\pi x_0}{l}}{D\frac{n^2\pi^2}{l^2} + \gamma}. \tag{4}$$

Застосувавши обернене синус-перетворення Фур'є, отримаємо розв'язок задачі (1), (2) при відомій точці розміщення джерела забруднень

$$c(x, x_0) = 2Ql\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x_0}{l}}{n^2\pi^2 D + \gamma l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{5}$$

5. Знаходження концентрації методом функції Гріна. Знайдемо розв’язок задачі (1), (2) іншим методом — методом функції Гріна [9]. В зв’язку з цим запишемо її у вигляді

$$Lc \equiv \frac{d^2c}{dx^2} - \omega^2 c = -\frac{Q}{D}\delta\left(x - x_0\right), \tag{6}$$

$$c\left(0, x_0\right) = c\left(x_0, l\right) = 0, \tag{7}$$

де $\omega^2 = \frac{\gamma}{D}$, $\gamma > 0$.

Розв’язок задачі будемо шукати у вигляді такої функції Гріна:

$$c\left(x, x_0\right) = \begin{cases} A_1 e^{\omega x} + B_1 e^{-\omega x}, & 0 < x < x_0, \\ C_1 e^{\omega x} + D_1 e^{-wx}, & x_0 < x < l. \end{cases} \tag{8}$$

Для знаходження констант A_1, B_1, C_1, D_1 маємо дві крайові умови (7) і дві умови спряження:

$$\begin{gathered} c\left(x_0 - 0, x_0\right) = c\left(x_0 + 0, x_0\right), \\ c'_x\left(x_0 + 0, x_0\right) = c'_x\left(x_0 - 0, x_0\right) - \frac{Q}{D}. \end{gathered} \tag{9}$$

Рівності (7), (9) однозначно визначають невідомі A_1, B_1, C_1, D_1.

Враховуючи крайові умови (7), функцію Гріна знаходимо у такому вигляді:

$$c\left(x, x_0\right) = \begin{cases} A\left(x_0\right) sh\omega x, & 0 < x < x_0, \\ B\left(x_0\right) sh\omega\left(x - l\right), & x_0 < x < l. \end{cases} \tag{10}$$

де $A\left(x_0\right)$, $B\left(x_0\right)$ невідомі, що залежать від параметра x_0.

Врахувавши умови спряження (9), знаходимо

$$\begin{cases} A\left(x_0\right) = -\frac{Q}{D}\frac{sh\omega\left(x_0 - l\right)}{\omega sh\omega l} = \frac{Q}{\omega D}\frac{sh\omega\left(l - x_0\right)}{sh\omega l}, \\ B\left(x_0\right) = -\frac{Q}{D}\frac{sh\omega x_0}{\omega sh\omega} = -\frac{Q}{\omega D}\frac{sh\omega x_0}{\omega sh\omega l}. \end{cases} \tag{11}$$

Враховуючи (11), знаходимо функцію Гріна задачі (6), (7)

$$c\left(x, x_0\right) = \frac{Q}{\omega D sh\omega l}\begin{cases} sh\omega\left(l - x_0\right) sh\omega x, & 0 < x < x_0, \\ sh\omega x_0 sh\omega\left(l - x\right), & x_0 < x < l. \end{cases} \tag{12}$$

Максимальна концентрація $C_{\max}$ досягається в точці $x = x_0$ і обчислюється за формулою

$$C_{\max}\left(x_0\right) = c\left(x_0, x_0\right) = c\left(l - x_0, x_0\right) = \frac{Q}{2\omega D sh\omega l}\left[ch\omega l - ch\omega\left(l - 2x_0\right)\right]. \tag{13}$$

Максимум функції $C_{\max}\left(x_0\right)$ досягається при $x_0 = \frac{l}{2}$ і дорівнює

$$C_{\max}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Q}{2\omega D sh\omega l}\left(ch\omega l - 1\right) = \frac{Q}{2\omega D} th\frac{\omega l}{2}. \qquad (14)$$

Кількість викинутих джерелом забруднень становить

$$q\left(x_0\right) = \int_0^l c\left(x, x_0\right)dx = \frac{Q}{D\omega^2 sh\omega l}\left(sh\omega\left(l - x_0\right) - sh\omega x_0 + sh\omega l\right). \qquad (15)$$

6. Знаходження точного значення координати розміщення джерела x_0, використовуючи значення точного розв'язку. Нехай маємо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$c\left(x, x_0\right) = A_0 \begin{cases} A_1\left(x_0\right)sh\omega x, & 0 < x < x_0, \\ A_2\left(x_0\right)sh\omega\left(l - x\right), & x_0 < x < l, \end{cases} \qquad (16)$$

де

$$A_0 = \frac{Q}{\omega D sh\omega l}, \; A_1\left(x_0\right) = sh\omega\left(l - x_0\right), \; A_2\left(x_0\right) = sh\omega x_0. \qquad (17)$$

Якщо з якихось міркувань відоме хоч одне точне значення $C_1 = c\left(x_1, x_0\right)$, то тоді отримаємо

$$C_1 = A_0 sh\omega\left(l - x_0\right)sh\omega x_1, \text{ якщо } 0 < x_1 < x_0,$$

$$C_1 = A_0 sh\omega x_0 sh\omega\left(l - x_1\right), \text{ якщо } x_0 < x_1 < l.$$

Звідки маємо

$$sh\omega\left(l - x_0\right) = \frac{C_1}{A_0 sh\omega x_1}, \text{ якщо } 0 < x_1 < x_0,$$

$$sh\omega x_0 = \frac{C_1}{A_0 sh\omega\left(l - x_1\right)}, \text{ якщо } x_0 < x_1 < l.$$

Тоді координата x_0 розміщення джерела визначається як

$$x_0 = \begin{cases} l - \frac{1}{\omega} Arsh\left(\frac{C_1}{A_0 sh\omega x_1}\right), & 0 < x_1 < x_0, \\ \frac{1}{\omega} Arsh\left(\frac{C_1}{A_0 sh\omega\left(l - x_1\right)}\right), & x_0 < x_1 < l. \end{cases} \qquad (18)$$

7. Знаходження наближеного значення координати розміщення джерела $\tilde{x}_0^1$, за даними вимірювань $\overline{C}_1$. Нехай у точці x_1 маємо результат вимірювань $\overline{C}_1$. При підстановці $\overline{C}_1$ в (18), замість точного значення x_0 отримаємо деяке наближене значення $\tilde{x}_0^1$

$$\tilde{x}_0^1 = \begin{cases} l - \dfrac{1}{\omega} Arsh\left(\dfrac{\bar{C}_1}{A_0 \cdot sh\omega x_1} \right), & 0 < x_1 < x_0, \\ \dfrac{1}{\omega} Arsh\left(\dfrac{\bar{C}_1}{A_0 \cdot sh\omega (l - x_1)} \right), & x_0 < x_1 < l. \end{cases} \tag{19}$$

8. Оцінка похибки розв'язку. Для отримання похибки розв'язку маємо відхилення $\varepsilon = \left| x_0 - \tilde{x}_0^1 \right|$. Врахувавши (18), (19), отримаємо

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} \left| Arsh\left(\dfrac{\bar{C}_1}{A_0 \cdot sh\omega x_1} \right) - Arsh\left(\dfrac{C_1}{A_0 \cdot sh\omega x_1} \right) \right|, & 0 < x_1 < x_0, \\ \dfrac{1}{\omega} \left| Arsh\left(\dfrac{\bar{C}_1}{A_0 \cdot sh\omega (l - x_1)} \right) - Arsh\left(\dfrac{C_1}{A_0 \cdot sh\omega (l - x_1)} \right) \right|, & x_0 < x_1 < l. \end{cases} \tag{20}$$

Звідки знаходимо

$$\varepsilon = \frac{2}{\omega} Arsh\left(a_0 \cdot \delta \right). \tag{21}$$

$$a_0 = \frac{1}{2A_0} \begin{cases} \dfrac{1}{sh\omega x_1 ch \dfrac{\omega}{2}\left(2l - x_0 - \tilde{x}_0^1 \right)}, & 0 < x_1 < x_0, \\ \dfrac{1}{sh\omega (l - x_1) ch \dfrac{\omega}{2}\left(x_0 + \tilde{x}_0^1 \right)}, & x_0 < x_1 < l. \end{cases} \tag{22}$$

Зрозуміло що, якщо $a_0 = const,$ то

$$\min \varepsilon = \frac{2}{\omega} Arsh\left(a_0 \cdot \min \delta \right). \tag{23}$$

9. Знаходження координати розміщення джерела x_0 у випадку n замірів концентрації. У випадку n замірів концентрації $\overline{C_i} = c\left(x_i, x_0 \right)$, $i = \overline{1,n}$ слідуючи [9], маємо задачу

$$Lc = f\left(x \right), \tag{24}$$

$$c\left(0 \right) = c\left(l \right) = 0, \tag{25}$$

де $f\left(x \right)$ — поки-що невідома функція. Тоді розв'язок задачі (24), (25) представляється так [8]:

$$c\left(x \right) = \int_0^l G\left(x, \xi \right) f\left(\xi \right) d\xi, \tag{26}$$

де функція Гріна $G\left(x, \xi \right)$ в даному випадку має вигляд [11]

$$G\left(x,\xi\right)=\frac{Q}{\omega Dsh\omega l}\begin{cases}sh\omega\xi\cdot sh\omega\left(l-x\right), & 0<\xi<x,\\ sh\omega\left(l-\xi\right)\cdot sh\omega x, & x<\xi<l.\end{cases} \tag{27}$$

Тоді, з врахуванням (27), розв'язок задачі (24), (25) має вигляд

$$c\left(x,\xi\right)=\frac{Q}{\omega Dsh\omega l}\begin{cases}sh\omega\left(l-x\right)\int\limits_0^l sh\omega\xi\cdot f\left(\xi\right)d\xi, & 0<\xi<x,\\ sh\omega x\int\limits_0^l sh\omega\left(l-\xi\right)\cdot f\left(\xi\right)d\xi, & x<\xi<l.\end{cases} \tag{28}$$

Нехай відомо заміри концентрації $c\left(x_i\right)=\overline{C_i}$ в точках x_i, $i=\overline{1,N}$. Тоді маємо в даному конкретному випадку

$$\overline{C_i}=\frac{Q}{\omega Dsh\omega l}\begin{cases}sh\omega\left(l-x_i\right)\int\limits_0^l sh\omega\xi\cdot f\left(\xi\right)d\xi, & 0<\xi<x_i,\\ sh\omega x_i\int\limits_0^l sh\omega\left(l-\xi\right)f\left(\xi\right)d\xi, & x_i<\xi<l, \quad i=\overline{1,N}.\end{cases} \tag{29}$$

Як відомо, (29) є системою лінійних інтегральних рівнянь. Розв'язок системи інтегральних рівнянь (29) шукаємо у вигляді

$$\widehat{f}\left(\xi\right)=\sum_{j=1}^{N}G\left(\xi,x_j\right)b_j, \tag{30}$$

де b_j — невідомі коефіцієнти, які знаходимо із розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_j=\overline{C_i}, \tag{31}$$

де коефіцієнти a_{ij} є відомі і обчислюються за формулою

$$a_{ij}=\int\limits_0^l G\left(x_i,\xi\right)G\left(\xi,x_j\right)d\xi,\ i,j=\overline{1,N}. \tag{32}$$

Ця система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок b_j, оскільки матриця $A=\left\{a_{ij}\right\}_{i=1,\,j=1}^{N,\ \ N}$ — додатньо визначена. Тоді точка x_0, де зосереджено джерело, визначається наступним чином:

$$x_0=\widehat{\xi}=Arg\max\widehat{f}\left(\xi\right).$$

У випадку вище поставленої задачі, ввівши позначення

$$I=\int\limits_0^l sh\omega\left(l-\xi\right)\cdot sh\omega\xi d\xi=\frac{1}{2}\left(l\cdot ch\omega l-\frac{1}{\omega}sh\omega l\right),$$

отримаємо

$$a_{ij}=\frac{IQ^2}{\left(\omega Dsh\omega l\right)^2}\begin{cases}sh\omega x_i\cdot sh\omega\left(l-x_j\right), & x_j<\xi<l,\\ sh\omega\left(l-x_i\right)\cdot sh\omega x_j, & 0<\xi<x_j.\end{cases}\qquad(33)$$

Обчисливши a_{ij}, $i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,N}$ за формулою (33), знаходимо невідомі коефіцієнти b_j і будуємо функцію за формулою (30), яка в даному випадку має вигляд

$$\widehat{f}\left(\xi\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{Qb_j}{\omega Dsh\omega l}\begin{cases}sh\omega x_j\cdot sh\omega\left(l-\xi\right), & 0<\xi<x_j\\ sh\omega\left(l-x_j\right)\cdot sh\omega\xi, & x_j<\xi<l.\end{cases}\qquad(34)$$

і знаходимо її максимум з умови

$$0=\widehat{f}'\left(\xi\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{Dsh\omega l}\begin{cases}-sh\omega x_j\cdot ch\omega\left(l-\xi\right), & 0<\xi<x_j,\\ sh\omega\left(l-x_j\right)\cdot ch\omega\xi, & x_j<\xi<l.\end{cases}\qquad(35)$$

З (35) знаходимо значення $\xi_1,\xi_2,...,\xi_k$, звідки x_0 знаходиться як

$$x_0=\max\left\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_k\right\}.$$

10. Програмна реалізація та результати чисельних експериментів. Відповідно до сформульованої задачі та розроблених алгоритмів проведена програмна реалізація та чисельні експерименти.

Розглянемо одновимірне рівняння (1) з граничними умовами (2). За тестовий було використано такий приклад. Спочатку розв'язується пряма задача на відрізку $\left[0,10\right]$ при $D=1, Q=1, \gamma=0,01.$ Вважається, що точка розміщення джерела відома. Наприклад, покладемо $x_0^1=2.8.$ Із симетрії функції Гріна даної задачі, точка розміщення симетричного джерела $x_0^1=7.2.$ Отримали розподіл концентрації забруднень (графіки наведені на рис. 1).

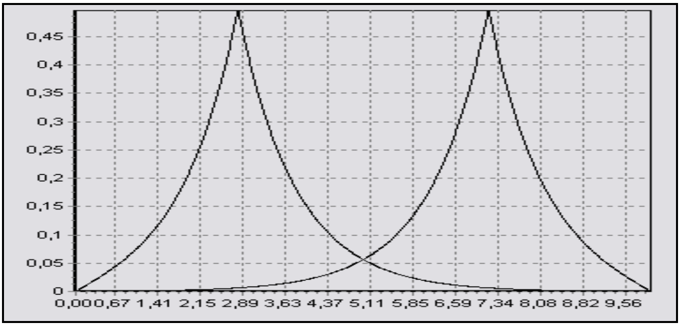

Рис. 1. *Графіки розподілу концентрацій забруднень від симетрично розміщених джерел*

Далі розв'язується обернена задача. З числових розрахунків прямої задачі взято значення концентрації $C_1 = 0,216$; в точці $x_1 = 2$ при тих же вхідних даних знайдено наближене значення координати $x_0 = 2,8$ розміщення джерела забруднення.

Такий же приклад тестувався за алгоритмом №2. На основі розв'язку прямої задачі було взято значення концентрації в точках $x_1 = 2$, $C_1 = 0,216$ і $x_2 = 7$, $C_2 = 0,007$. При взятих значеннях концентрації з прямої задачі ми отримали наближене значення координати розміщення джерела забруднення x_0 з похибкою, що не перевищує 7%.

11. Висновки. В даній роботі отримано аналітичний розв'язок модельної задачі про ідентифікацію місцеположення джерела забруднень в одновимірному стаціонарному випадку з нульовими граничними умовами. Встановлена оцінка залежності похибки розміщення джерела від похибки вимірювань концентрації в даній точці. Виконана програмна реалізація розв'язку даної задачі в середовищі Delphi 7.0, на основі чого проведені чисельні експерименти та зроблено їх аналіз. Встановлено, що похибка розміщення джерела залежить від похибки вимірювань концентрації в даній точці по закону гіперболічного арксинуса.

В роботі показано, що похибка розміщення джерела залежить не тільки від абсолютної величини похибки вимірювань концентрації $\delta = \left|C_1 - \bar{C}_1\right|$, але й від координати точки вимірювань x_1.

$$x_1^{'} < x_2^{"}, \delta_1^{'} = \left|C_1^{'} - \bar{C}_1\right| = \delta_2 = \left|C_1^{"} - \bar{C}_1^{"}\right|, \ \varepsilon_1 = \left|x_0 - \tilde{x}_0^1\right| > \varepsilon_2 = \left|x_0 - \tilde{x}_0^{"}\right|.$$

Це випливає з формул (30), (31). Координата точки розміщення джерела x_0 визначається тим точніше, чим ближче до точки x_0 виконується вимірювання концентрації, чи менші похибки вимірювання $\delta = \left|C_1 - \bar{C}_1\right|$, чим більше вимірювань в одній точці і чим більше точок вимірювань, зосереджених в околі джерела, тим похибка ε стає меншою.

Таким чином, джерело забруднення ідентифікується тим точніше (в сенсі мінімізації похибки джерела $\varepsilon = \left|x_0 - \tilde{x}_0\right|$), чим більше точок вимірювань; чим ближче вони розміщені до джерела; чим більше вимірювань зроблено в кожній точці і чим з меншими величинами похибок вимірювань $\delta = \left|C_1 - \bar{C}_1\right|$.

Список використаних джерел:

1. Акименко В. В. Математическое моделирование экологического состояния пограничного слоя атмосферы региона / В. В. Акименко. — Луганск : Изд-во ВУГУ, 1988. — 188 с.

2. Гладкий А. В. Математичні моделі процесів забруднення навколишнього середовища / А. В. Гладкий, В. В. Скопецький. — К. : ІВЦ "Видавництво „Політехніка", 2004. — 96 с.
3. Израэль Ю. А. Экология и контроль состояния природной среды / Ю. А. Израэль. — М. : Гидрометеоиздат, 1984. — 560 с.
4. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Ю. Г. Мистецкий. — К. : Наук. думка, 1991. — 264 с.
5. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. — М. : Наука, 1982. — 320 с.
6. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. — К. : Наук. думка, 1997. — 368 с.
7. Власюк А. П. Ідентифікація місцеположення джерела забруднення в одновимірних задачах масопереносу / А. П. Власюк, О. М. Багнюк // Вісник НУВГП. — Рівне, 2009. — Вип. 4 (36), ч. 2. — С. 315–325.
8. Снеддон И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 659 с.
9. Арсенин В. Я. Математическая физика: основные уравнения и специальные / В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1966. — 357 с.
10. Наконечний О. Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними / О. Г. Наконечний. — К. : Київський університет, 2004. — 103 с.
11. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1979. — 224 с.

The decision of task is got cleanly diffusive transference of contamination from a point source pollution in some environment on a segment by method of finite Fourier sine and Green function method. The value of maximal concentration of contamination and formula is got also for the calculation of amount of the contaminations thrown out a source. On a concrete example numeral experiments and their analysis are conducted.

Key words: *identification, source pollution, method of finite Fourier sine, Green function method.*

Отримано: 22.02.2012