

УДК 517. 946

І. М. Конет*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. П. Ленюк**, д-р фіз.-мат. наук, професор

* Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

** Чернівецький факультет Харківського національного
технічного університету «ХПІ», м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА — ФУР'Є — БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом узагальненого скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра — Фур'є — Бесселя зі спектральним параметром одержано розв'язок задачі дифузії на трискладовому сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі в припущенні, що межі середовища м'які по відношенню до відбиття хвиль. Моделювання дифузійних процесів виконано за допомогою гібридного диференціального оператора Лежандра — Фур'є — Бесселя.

Ключові слова: *моделювання дифузійних процесів, гібридний диференціальний оператор, власні елементи, скінченне гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, головні розв'язки.*

Постановка проблеми та її аналіз. Процеси дифузії відіграють значну роль у виробничих процесах, впливають на міцність устаткування при врахуванні механічних та технологічних умов експлуатації металів і сплавів. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є диференціальне рівняння дифузії параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t, r), \quad r \in (R_0, R_3) \quad (1)$$

з відповідними початковою та крайовими умовами.

Потреби практики приводили до різноманітного узагальнення рівняння (1). Та в усіх випадках дифузійні процеси вивчалися в припущенні, що межа середовища жорстка відносно відбиття хвиль. Різко змінюється картина дифузійного процесу, якщо межа середовища є м'якою відносно відбиття хвиль (в крайових операторах та операторах спряження присутня похідна за часовою змінною).

У другій половині ХХ-го століття для вивчення механіко-технічних характеристик композитних матеріалів був розвинутий метод кусково-

сталих фізико-технічних характеристик [2]. Це приводило в кожній конкретній задачі до інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку (або систем таких рівнянь) із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функцій та її похідних. Та отримати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задач цим методом, як виявилось, неможливо. Тому ми пропонуємо моделювання дифузійних процесів методом гібридних диференціальних операторів [3—5].

Основна частина. Побудуємо обмежений в області

$$D_2 = \{(t, r) : t \in (0; \infty); r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 > 0, R_3 < \infty\}$$

розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу зі сталими коефіцієнтами [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[u_1] &= f_1(t, r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{v, \alpha}[u_3] &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \quad (2)$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\left(L_{11}^0[u_1(t, r)] \right) \Big|_{r=R_0} = g_0(t), \left(L_{22}^3[u_3(t, r)] \right) \Big|_{r=R_3} = g_R(t) \quad (3)$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k[u_k(t, r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t, r)] \right) \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad j, k = 1, 2. \quad (4)$$

У рівностях (2) беруть участь диференціальний оператор Бесселя

$$B_{v, (\alpha)} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r^{-1} \frac{d}{dr} - (v^2 - \alpha^2)r^{-2} \quad [6], \text{ диференціальний опера-}$$

тор Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\mu_1^2 (1 - chr)^{-1} + \mu_2^2 (1 + chr)^{-1} \right)$

[7] та диференціальний оператор Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [8], де $2\alpha + 1 > 0$,

$$(\mu) = (\mu_1, \mu_2), \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0, \quad v \geq \alpha.$$

У рівностях (3), (4) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jk}^m = (\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}; \quad j, k = 1, 2; m = \overline{0, 3}.$$

Розв'язок задачі (2)—(4) побудуємо методом скінченного гібридного інтегрального перетворення (СГІП) зі спектральним параметром, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{v,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2\Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2B_{v,\alpha}, \quad (5)$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Оскільки ГДО $M_{v,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений і на множині I_2 не має особливих точок, то його спектр дійсний та дискретний [9].

Власні елементи (власні числа та відповідні їм власні функції) ГДО $M_{v,\alpha}^{(\mu)}$ знайдемо в результаті розв'язання спектральної задачі Штурма — Ліувілля: побудувати на множині I_2 відмінний від нуля розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Фур'є та Бесселя

$$\begin{aligned} (\Lambda_{(\mu)} + b_1^2)V_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_0, R_1), \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)V_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_1, R_2), \\ (B_{v,\alpha} + b_3^2)V_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \quad (6)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \left[\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0\right)V_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta)\right]_{r=R_0} &= 0, \\ \left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3\right)V_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta)\right]_{r=R_3} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

та однорідними умовами спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right)V_{v,\alpha;k}^{(\mu)}(r, \beta) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right)V_{v,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r, \beta)\right]_{r=R_k} = 0; \quad (8)$$

$$j, k = 1, 2.$$

У рівностях (6)—(8) беруть участь: спектральний параметр β , компоненти $V_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(r, \beta)$ спектральної власної функції

$$V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta) = \sum_{j=1}^3 \theta(r - R_{j-1})\theta(R_j - r)V_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(r, \beta) \quad (9)$$

та функції $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $(k_j^2 \geq 0, j = \overline{1,3})$; $\tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2)\delta_{jk}^m$,

$$\tilde{\beta}_{jk}^m = \tilde{\beta}_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2) \delta_{jk}^m, (\gamma^2 \geq 0; j, k = 1, 2; m = \overline{0, 3}).$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2)v = 0$ складають функції $v_1 = A_{v_1}^{(\mu)}(chr)$ та $v_2 = B_{v_1}^{(\mu)}(chr)$, $v_1^* = -\frac{1}{2} + ib_1$ [7]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)v = 0$ складають функції $v_1 = \cos b_2 r$ та $v_2 = \sin b_2 r$ [8]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{v,\alpha} + b_3^2)v = 0$ складають функції $v_1 = J_{v,\alpha}(b_3 r)$ та $v_2 = N_{v,\alpha}(b_3 r)$ [6].

В силу лінійності задачі (6)—(8) покладемо

$$\begin{aligned} V_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta) &= A_1 A_{v_1}^{(\mu)}(chr) + B_1 B_{v_1}^{(\mu)}(chr), r \in (R_0, R_1), \\ V_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta) &= A_2 \cos b_2 r + B_2 \sin b_2 r, r \in (R_1, R_2), \\ V_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta) &= A_3 J_{v,\alpha}(b_3 r) + B_3 N_{v,\alpha}(b_3 r), r \in (R_2, R_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення шести величин A_j, B_j ($j = \overline{1, 3}$) дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$\begin{aligned} Y_{v_1;11}^{(\mu);01}(chR_0)A_1 + Y_{v_1;11}^{(\mu);02}(chR_0)B_1 &= 0, \\ Y_{v_1;j1}^{(\mu);11}(chR_1)A_1 + Y_{v_1;j1}^{(\mu);12}(chR_1)B_1 - v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2 - v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2 &= 0, j = 1, 2; \\ v_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2 + v_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2 - u_{v,\alpha;j2}^{21}(b_3R_2)A_3 - u_{v,\alpha;j2}^{22}(b_3R_2)B_3 &= 0, (11) \\ u_{v,\alpha;22}^{31}(b_3R_3)A_3 + u_{v,\alpha;22}^{32}(b_3R_3)B_3 &= 0. \end{aligned}$$

Введемо до розгляду функції:

$$\begin{aligned} \delta_{v_1;j1}^{(\mu)}(chR_0, chR_1) &= Y_{v_1;11}^{(\mu);01}(chR_0)Y_{v_1;j1}^{(\mu);12}(chR_1) - \\ &\quad - Y_{v_1;11}^{(\mu);02}(chR_0)Y_{v_1;j1}^{(\mu);11}(chR_1); j = 1, 2; \\ \delta_{jk}(b_2R_1, b_2R_2) &= v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2) - v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2); j, k = 1, 2; \\ \delta_{v,\alpha;j2}(b_3R_2, b_3R_3) &= u_{v,\alpha;j2}^{21}(b_3R_2)u_{v,\alpha;22}^{32}(b_3R_3) - u_{v,\alpha;j2}^{22}(b_3R_2)u_{v,\alpha;22}^{31}(b_3R_3); \\ a_{(\mu);j}(\beta) &= \delta_{v_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)\delta_{2j}(b_2R_1, b_2R_2) - \\ &\quad - \delta_{v_1;21}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)\delta_{1j}(b_2R_1, b_2R_2); \end{aligned}$$

$$\delta_{v,\alpha}^{(\mu)}(\beta) = a_{(\mu),1}(\beta) \delta_{v,\alpha;22}(b_3 R_2, b_3 R_3) - a_{(\mu),2}(\beta) \delta_{v,\alpha;12}(b_3 R_2, b_3 R_3).$$

Алгебраїчна система (11) має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\delta_{v,\alpha}^{(\mu)}(\beta) = 0.$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{v,\alpha}^{(\mu)}$.

Підставимо в алгебраїчну систему (11) $\beta = \beta_n (b_j(\beta_n) \equiv b_{jn}; v_{1n}^* = -\frac{1}{2} + i b_{1n})$ і відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Покладемо $A_1 = -A_0 Y_{v_n^*;11}^{(\mu);02}(chR_0)$, $B_1 = A_0 Y_{v_n^*;11}^{(\mu);01}(chR_0)$, де $A_0 \neq 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи стає тотожністю. Для визначення A_2, B_2 маємо алгебраїчну систему

$$v_{j2}^{11}(b_{2n} R_1) A_2 + v_{j2}^{12}(b_{2n} R_1) B_2 = A_0 \delta_{v_n^*;j1}^{(\mu)}(chR_0, chR_1), j = 1, 2.$$

Звідси знаходимо, що

$$A_2 = \frac{A_0}{c_{21,1} b_{2n}} \left[\delta_{v_n^*;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1) v_{22}^{12}(b_{2n} R_1) - \delta_{v_n^*;21}^{(\mu)}(chR_0, chR_1) v_{12}^{12}(b_{2n} R_1) \right],$$

$$B_2 = \frac{A_0}{c_{21,1} b_{2n}} \left[\delta_{v_n^*;21}^{(\mu)}(chR_0, chR_1) v_{12}^{11}(b_{2n} R_1) - \delta_{v_n^*;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1) v_{22}^{11}(b_{2n} R_1) \right]. \quad (13)$$

Для обчислення величин A_3, B_3 отримаємо алгебраїчну систему

$$u_{v,\alpha;j2}^{21}(b_{3n} R_2) A_3 + u_{v,\alpha;j2}^{22}(b_{3n} R_2) B_3 = \frac{-A_0}{c_{21,1} b_{2n}} \cdot a_{(\mu);j}(\beta_n), j = 1, 2.$$

Звідси знаходимо, що

$$A_0 = c_{21,1} b_{2n} \frac{2}{\pi} \frac{c_{21,2}}{b_{3n}^{2\alpha} R_2^{2\alpha+1}}, A_3 = -\omega_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n); B_3 = \omega_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n), \quad (14)$$

$$\omega_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta_n) = a_{(\mu);1}(\beta_n) u_{v,\alpha;22}^{2j}(b_{3n} R_2) - a_{(\mu);2}(\beta_n) u_{v,\alpha;12}^{2j}(b_{3n} R_2).$$

Одержані згідно формул (13) та (14) значення величин $A_j, B_j (j = 1, 3)$ підставимо у формули (10). Отримаємо функції:

$$V_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta) = c_{21,1} b_{2n} \frac{2}{\pi} \frac{c_{21,2}}{b_{3n}^{2\alpha} R_2^{2\alpha+1}} \times$$

$$\times \left[Y_{v_n^*;11}^{(\mu);01}(chR_0) B_{v_n^*}^{(\mu)}(chr) - Y_{v_n^*;11}^{(\mu);02}(chR_0) A_{v_n^*}^{(\mu)}(chr) \right],$$

$$V_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n) = \frac{2}{\pi} \frac{c_{21,2}}{b_{3n}^{2\alpha} R_2^{2\alpha+1}} \left[\delta_{v_n^*,11}^{(\mu)} (chR_0, chR_1) \varphi_{22}^1(b_{2n}R_1; b_{2n}r) - \right. \\ \left. - \delta_{v_n^*,21}^{(\mu)} (chR_0, chR_1) \varphi_{12}^1(b_{2n}R_1; b_{2n}r) \right], \quad (15)$$

$$\varphi_{j2}^1(b_{2n}R_1; b_{2n}R_2) = v_{j2}^{12}(b_{2n}R_1) \cos(b_{2n}r) - v_{j2}^{11}(b_{2n}R_1) \sin(b_{2n}r); j = 1, 2;$$

$$V_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n) = \omega_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n) N_{v,\alpha}(b_{3n}r) - \omega_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n) J_{v,\alpha}(b_{3n}r).$$

Згідно рівності (9) спектральна вектор функція $V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)$ визначена.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти:

$$\alpha_{11}^0 \leq 0, \beta_{11}^0 \geq 0, |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0, \alpha_{22}^3 \geq 0, \beta_{22}^3 \geq 0, \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0;$$

$$\alpha_{jm}^k \geq 0, \delta_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0, \gamma_{jm}^k \geq 0, c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0, c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k;$$

$$c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0; \delta_{2j}^k \beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k \beta_{2j}^k = \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k.$$

Визначимо числа

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1} c_{11,2} R_2^{2\alpha+1}}{c_{21,1} c_{21,2} shR_1}, a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}} R_2^{2\alpha+1}, a_3^2 \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0) \theta(R_1 - r) \sigma_1 shr + \\ + \theta(r - R_1) \theta(R_2 - r) \sigma_2 + \theta(r - R_2) \theta(R_3 - r) a_3 r^{2\alpha+1} \quad (16)$$

та квадрат норми власної вектор-функції [10]

$$\left\| V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \right\|_1^2 = \int_{R_0}^{R_3} \left[V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \right]^2 \sigma(r) dr + G_2(\beta_n, \beta_n). \quad (17).$$

Згідно з роботою [10] маємо такі твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{v,\alpha}^{(\mu)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M_{v,\alpha}^{(\mu)}$: дійсні, різні, симетрично розташовані відносно точки $\beta = 0$ й на півосі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2 (про спектральну функцію). Система $\left\{ V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій узагальнено ортогональна з ваговою функцією $\sigma(r)$ на множині I_2 , повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь яка вектор-функція $g(r) = \{g_1(r), g_2(r), g_3(r)\} \in G$ (область визначення ГДО $M_{v,\alpha}^{(\mu)}$) зображається за системою $\left\{V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R_3} g(\rho) V_{v,\alpha}^{(\mu)}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho \frac{V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)}{\left\|V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\right\|^2}. \quad (18)$$

Перейдемо до узагальнено ортонормованої системи власних вектор-функцій

$$\left\{v_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \left(\left\|V_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\right\|\right)^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Одержимо ряд Фур'є (18) в такій формі:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R_3} g(\rho) v_{v,\alpha}^{(\mu)}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho v_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n). \quad (19)$$

Ряд Фур'є (19) визначає пряме $H_{v,\alpha}^{(\mu)}$ та обернене $H_{v,\alpha}^{- (\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення зі спектральним параметром, породжене на множині I_2 ГДО $M_{v,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{v,\alpha}^{(\mu)} [g(r)] = \int_{R_0}^{R_3} g(r) v_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n, \quad (20)$$

$$H_{v,\alpha}^{- (\mu)} [\tilde{g}(r)] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{v,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \equiv g(r). \quad (21)$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = a_1^2 \sigma_1 sh R_1 : c_{11,1}, d_2 = a_2^2 \sigma_2 : c_{11,2}, \tilde{g}_{1n} = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_1 sh r dr,$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) v_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_2 dr, \tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_3 r^{2\alpha+1} dr,$$

$$Z_{v,\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta_n) = \left(\tilde{\alpha}_{i2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{i2}^k \right) v_{v,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \Big|_{r=R_k}; i, k = 1, 2.$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \left\{ \Lambda_{(\mu)} [g_1(r)]; g_2''(r); B_{v,\alpha} [g_3(r)] \right\}$ неперервна на множині I_2 , а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0 \right) g_1(r) \Big|_{r=R_0} = g_0, \left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3 \right) g_3(r) \Big|_{r=R_3} = g_R \quad (22)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k \right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k \right) g_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, j, k = 1, 2, \quad (23)$$

то справджується основна тотожність скінченного гібридного інтегрального перетворення ГДО $M_{v,\alpha}^{(\mu)}$:

$$\begin{aligned} H_{v,\alpha}^{(\mu)} \left[M_{v,\alpha}^{(\mu)} g(r) \right] = & -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \tilde{g}_{in} + \\ & + \left(-\tilde{\alpha}_{11}^0 \right)^{-1} v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0, \beta_n) a_1^2 \sigma_1 sh R_0 g_0 + \left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \right)^{-1} v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) R_3^2 g_R + \\ & + \sum_{k=1}^2 d_k \left[Z_{v,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{v,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{1k} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Правила (20), (21) та (24) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку задачі дифузії (2)—(4).

Запишемо систему (2) й нульові початкові умови у матричній формі:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)} \right) u_1(t, r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) u_2(t, r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3^2 - a_3^2 B_{v,\alpha} \right) u_3(t, r) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} f_1(t, r) \\ f_2(t, r) \\ f_3(t, r) \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \\ u_3(t, r) \end{array} \right] \Big|_{t=0} = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]. \quad (25)$$

Інтегральний оператор $H_{v,\alpha}^{(\mu)}$ згідно правила (20) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$\begin{aligned} H_{v,\alpha}^{(\mu)} [\dots] = & \left[\int_{R_0}^{R_1} \dots v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_1 sh r dr \int_{R_1}^{R_2} \dots v_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_2 dr \right. \\ & \left. \int_{R_2}^{R_3} \dots v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_3 r^{2\alpha+1} dr \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (26) за правилом множення матриць до задачі (25). Внаслідок основної тотожності (24) отримаємо задачу Коші:

$$\left. \frac{d\tilde{u}_n}{dt} + \omega_n^2 \tilde{u}_n = \tilde{F}_n(t); \tilde{u}_n(t) \right|_{t=0} = 0. \quad (27)$$

У рівностях (27) прийняті позначення:

$$q^2 = \max \{ \gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2 \}, \omega_n^2 = \beta_n^2 + q^2; \tilde{F}_n(t) = \\ = (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0, \beta_n) a_1^2 \sigma_1 sh R_0 g_0 + (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) R_3^{2\alpha+1} g_R(t) + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k \left[Z_{v,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{2k}(t) - Z_{v,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n) \omega_{2k}(t) \right].$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (27) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \tilde{F}_n(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Оператор $H_{v,\alpha}^{-(\mu)}$ згідно правила (21) як обернений до (26) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{v,\alpha}^{-(\mu)} [\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \dots v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dots v_{v,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dots v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (29) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (28). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку задачі дифузії (2)—(4):

$$u_j(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) v_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(r, \beta_n) = \sum_{k=1}^3 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \mathcal{H}_{v,\alpha;jk}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho) f_k(\tau, \rho) \times \\ \times \sigma_k \varphi_k(\rho) d\rho d\tau + \int_0^t \left[W_{v,\alpha;1j}^{(\mu)}(t-\tau, r) g_0(\tau) + W_{v,\alpha;3j}^{(\mu)}(t-\tau, r) g_R(\tau) \right] d\tau + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k \int_0^t \left[\mathcal{R}_{v,\alpha;12}^{(\mu),jk}(t-\tau, r) \omega_{2k}(\tau) - \mathcal{R}_{v,\alpha;22}^{(\mu),jk}(t-\tau, r) \omega_{1k}(\tau) \right] d\tau, j = \overline{1,3}$$

$$\left(\varphi_1(\rho) = sh\rho, \varphi_2(\rho) = 1, \varphi_3(\rho) = \rho^{2\alpha+1} \right). \quad (30)$$

У формулі (30) беруть участь головні розв'язки задачі (2)—(4):

1) породжені неоднорідністю системи (2) функції впливу

$$\mathcal{H}_{v,\alpha;jk}^{(\mu)}(t, r, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2 t} v_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(r, \beta_n) v_{v,\alpha;k}^{(\mu)}(\rho, \beta_n); j, k = \overline{1,3}, \quad (31)$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{v,\alpha;1j}^{(\mu)}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2 t} \left(-\tilde{\alpha}_{11}^0 \right)^{-1} v_{v,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0, \beta_n) v_{v,\alpha;j}^{(\mu)} \times \\ \times (r, \beta_n) (a_1^2 \sigma_1 sh R_0); j = \overline{1,3}, \quad (32)$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{v,\alpha;3j}^{(\mu)}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2 t} \left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \right)^{-1} v_{v,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) v_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(r, \beta_n) R_3^{2\alpha+1}; j = \overline{1,3}, \quad (33)$$

4) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}_{v,(\alpha);i2}^{(\mu);jk}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2 t} Z_{v,\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta_n) v_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(r, \beta_n); i, k = 1, 2; j = \overline{1,3}. \quad (34)$$

Зауваження 1. Якщо початкові умови ненульові, тобто

$$u_j(t, r) \Big|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = \overline{1,3}, \quad (35)$$

то переходимо до нових функцій $v_j(t, r) = u_j(t, r) - g_j(r)$, для яких

$$v_j(t, r) \Big|_{t=0} = u_j(t, r) \Big|_{t=0} - g_j(r) = g_j(r) - g_j(r) = 0.$$

Зауваження 2. При $\sigma_{jk}^m = 0$ та $\gamma_{jk}^m = 0$ ($m = \overline{1,3}; j, k = 1, 2$) маємо класичну задачу дифузії на спряження, коли межі жорсткі по відношенню до відбиття дифузійних хвиль.

Зауваження 3. Нехай початкові умови $u \Big|_{t=0} = g_j(r) \neq 0$. Ефектом того, що межа м'яка по відношенню до відбиття хвиль дифузії, є поява в розв'язку (30) доданків

$$\theta_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(t, r) = W_{v,\alpha;1j}^{(\mu)}(t, r) \psi_{11}^0 + v_{v,\alpha;3j}^{(\mu)}(t, r) \psi_{22}^3 + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k \left[\mathcal{R}_{v,\alpha;12}^{(\mu);jk}(t, r) \psi_{2k} - \mathcal{R}_{v,\alpha;22}^{(\mu);jk}(t, r) \psi_{1k} \right].$$

У цій рівності беруть участь величини:

$$\psi_{11}^0 = \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0), \psi_{22}^3 = \delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3); \\ \psi_{jk} = \left[\delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - \left(\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k) \right) \right]; j, k = 1, 2.$$

Зауваження 4. Якщо покласти $g_j(r) - (a_j + b_j) \equiv \bar{g}_j(r), (j = \overline{1,3})$ й знайти коефіцієнти із системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} (\delta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 R_0) a_1 + \gamma_{11}^0 b_1 &= 0, \\ (\delta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k R_k) a_k + \gamma_{j1}^k b_j - \left[(\delta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k R_k) a_{k+1} + \gamma_{j2}^k b_{k+1} \right] &= \psi_{jk}; j, k = 1, 2; \\ (\delta_{23}^3 + \gamma_{23}^3 R_3) a_3 + \gamma_{22}^3 b_3 &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

то величина ефекту $\theta_{v,\alpha;j}^{(\mu)}(t, r) = 0$.

Зауважимо, що при виконанні умов на коефіцієнти, які беруть участь у формулюванні задачі (2)—(4), алгебраїчна система (36) має єдиний розв'язок. Його можна одержати за правилами Крамера.

Зауваження 5. Якщо $q^2 = \gamma_1^2 > 0$, то $k_1^2 = 0, k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0, k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $q^2 = \gamma_2^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \geq 0, k_2^2 = 0, k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $q^2 = \gamma_3^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \geq 0, k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \geq 0, k_3^2 = 0$.

Висновки. Одержані розв'язки поліпараметричні. Це дозволяє вибором параметрів виділяти безпосередньо із загальних структур будь-який практично важливий частковий випадок (у рамках розглянутої моделі). Розв'язок (30) дифузійної задачі (2)—(4) носить алгоритмічний характер. Це дає можливість застосувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці числових розрахунків.

Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
3. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра — Фур'є — Фур'є на сегменті $[R_0; R_3]$ полярної осі / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія: Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т, 2008. — Вип. 1. — С. 126–133.
4. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра — Фур'є — Лежандра на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 119–136.
5. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального опера-

- тора Бесселя — Лежандра — Фур'є на сегменті полярній осі / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 5. — С. 112–123.
6. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83-3).
 7. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера — Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
 8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М.: Физматгиз, 1959. — 468 с.
 9. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
 10. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — Чернівці : Рута, 2006. — Вип. 314–315. — С. 105–113.

Generalized method of finite hybrid integral transformation of Legendre — Fourier — Bessel with spectral parameter obtained solution of the problem of diffusion in three-segment $[R_0, R_3]$ polar axis under the assumption that the limits of the medium soft with respect to reflection of waves. Simulation of diffusion processes is made using hybrid Legendre differential operator — Fourier — Bessel.

Key words: *modeling of diffusion processes, hybrid differential operator, own elements, finite hybrid integral transformation, the basic identity, the main solutions.*

Отримано: 05.03.2012