

УДК 681.03

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, профессор,**Р. А. Абдикаримов****, канд. техн. наук,**А. М. Корнеев*****, старший преподаватель

*Институт проблем моделирования в энергетике

им. Г. Е. Пухова НАН Украины, г. Киев,

** Министерство высшего и среднего специального
образования Республики Узбекистан, г. Ташкент,

*** Хмельницкий национальный университет, г. Хмельницкий

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

На основе гипотезы Кирхгофа-Лява в геометрически нелинейной постановке приведена математическая модель задачи анализа процессов деформирования вязкоупругих прямоугольных ортотропных пластин с переменной жесткостью. Модель задачи построена с учетом распространения упругих волн. С помощью метода Бубнова-Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогиба и перемещений, задача сводится к решению систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Исследуется влияние вязкоупругих свойств материала и изменения толщины пластины.

Ключевые слова: теория Кирхгофа-Лява, математическая модель, дискретная модель, вязкоупругость, ядро релаксации, интегро-дифференциальное уравнение, метод Бубнова-Галеркина.

Введение. В различных областях техники широко используются элементы и узлы, представленные в каноническом виде пластинками и оболочками переменной жесткости. Это связано, прежде всего, с требованиями к прочности, долговечности, дизайну тонкостенных элементов современной конструкции. Наряду с тонкостенными элементами конструкций из традиционных металлических материалов широко используются конструкции из композиционных материалов. Это приводит к необходимости рассмотрения как изотропных, так и, в общем случае, анизотропных пластин и оболочек. При этом, такие задачи следует описывать с помощью моделей теории пластин и оболочек в классической и уточненной постановках. Исследование пластин и оболочек переменной жесткости представляет собой очень сложную задачу. С одной стороны это связано с решением довольно сложных и громоздких уравнений, а с другой — с определенными вычислительными трудностями, т.е. отсутствием отработанных численных методов и вычислительных алгоритмов.

Математическая модель. Построим математическую модель рассматриваемой задачи деформирования вязкоупругой прямоугольной пластинки в геометрически нелинейной постановке на основе

классической теории Кирхгофа-Лява. Предположим, что вязкоупругая пластинка изготовлена из материала, обладающего ортотропными свойствами. В этом случае физическую зависимость между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ примем в виде [5; 6]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}(1 - \Gamma_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1 - \Gamma_{12}^*)\varepsilon_y, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{xy} &= 2B(1 - \Gamma^*)\gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (1)$$

где Γ^*, Γ_{ij}^* — интегральные операторы с ядрами релаксации соответственно $\Gamma(t)$ и $\Gamma_{ij}(t)$:

$$\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad \Gamma_{ij}^* \varphi = \int_0^t \Gamma_{ij}(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad i, j = 1, 2,$$

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad B_{12} = B_{21} = \mu_1 B_{22} = \mu_2 B_{11}, \quad B = \frac{G}{2},$$

E_1, E_2 — модули упругости в направлении осей x и y ; G — модуль сдвига; μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона; здесь и в дальнейшем символ $(x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2)$ указывает, что остальные соотношения получаются круговой подстановкой индексов.

Связь между деформациями в срединной поверхности $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ и перемещениями u, v, w по направлениям x, y, z с учетом начальных неправильностей, примем в виде [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $w_0 = w_0(x, y)$ — начальный прогиб пластинки.

Изгибающие M_x, M_y и крутящие моменты H с учетом (2) имеют вид [5; 6]:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{h^3}{12} \left[B_{11}(1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} + B_{12}(1 - \Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} \right], \\ &\quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2), \\ H &= -\frac{Bh^3}{3} (1 - \Gamma^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (1) и (3) в уравнения движения [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + P_x(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

получим систему интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\begin{aligned} h \left[B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B (1 - \Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right] + \\ + \frac{\partial h}{\partial x} \left[B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \varepsilon_y \right] + 2B \frac{\partial h}{\partial y} (1 - \Gamma^*) \varepsilon_{xy} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ h \left[B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B (1 - \Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right] + \\ + 2B \frac{\partial h}{\partial x} (1 - \Gamma^*) \varepsilon_{xy} + \frac{\partial h}{\partial y} \left[B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \varepsilon_y \right] - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ D \left[B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^4} + (8B_{11} (1 - \Gamma^*) + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*)) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial y^4} \right] + \\ \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left(B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} \right) + \\ + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \left[B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x^3} + (B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + 4B (1 - \Gamma^*)) \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x \partial y^2} \right] + \\ + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \left[B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial y^3} + \right. \\ \left. + (B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + 4B (1 - \Gamma^*)) \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y} \right] + \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \left(B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} \right) + \\
 & \quad + 8 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} B (1 - \Gamma^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x \partial y}, \\
 & - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B (1 - \Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial h}{\partial x} \left[B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \varepsilon_y \right] + 2B \frac{\partial h}{\partial y} (1 - \Gamma^*) \varepsilon_{xy} \right\} - \\
 & - h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \varepsilon_y \right] - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B (1 - \Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right] + 2B \frac{\partial h}{\partial x} (1 - \Gamma^*) \varepsilon_{xy} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial h}{\partial y} \left[B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \varepsilon_y \right] \right\} - h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + \right. \\
 & \quad \left. + B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \varepsilon_y \right] - 4h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} B (1 - \Gamma^*) \varepsilon_{xy} + P_x(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.
 \end{aligned}$$

Полученная математическая модель (5) с соответствующими граничными и начальными условиями одновременно учитывает вязкоупругие свойства, а также ортотропность материала пластинки.

Отметим, что если при решении задач динамики вязкоупругих систем в изотропной постановке в системе интегро-дифференциальных уравнений участвует только одно ядро релаксации с тремя различными реологическими параметрами [1], то в ортотропной постановке по гипотезе Кирхгофа-Лява принимают участие 5 различных ядер с 15 реологическими параметрами вязкости.

При расчетах в качестве ядер релаксации $\Gamma(t), \Gamma_{ij}(t), i, j = 1, 2$ используются сингулярные ядра Колтунова-Ржаницына вида [6]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(t) &= A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1), \\
 \Gamma_{ij}(t) &= A_{ij} e^{-\beta_{ij} t} t^{\alpha_{ij}-1}, \quad (0 < \alpha_{ij} < 1).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Дискретная модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластинки с переменной жесткостью. Наиболее эффективным методом построения дискретной модели нелинейных задач динамики наследственной теории вязкоупругости яв-

ляется вариационный метод Бубнова-Галеркина, с помощью которого получим основные рабочие интегро-дифференциальные уравнения данной задачи.

Рассмотрим динамическую устойчивость вязкоупругой прямоугольной ортотропной пластинки со сторонами a и b из неоднородного материала, подвергающейся быстровозрастающему сжатию со стороны a силой $P(t) = \nu t$ (ν — скорость нагружения). В этом случае уравнения динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластины имеет вид (5).

Решение системы (5), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать относительно перемещений u и v , а также прогиба w в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y), \\ v(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y), \\ w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в систему уравнений (5) и выполняя процедуру Бубнова-Галеркина с учетом безразмерных величин

$$\begin{aligned} \frac{u}{h_0}, \frac{v}{h_0}, \frac{w}{h_0}, \frac{w_0}{h_0}, \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{h}{h_0}, \lambda = \frac{a}{b}, \lambda = \frac{a}{b}, \delta = \frac{b}{h_0}, \\ t^* = \frac{P}{P_{кр}} = \frac{\nu t}{P_{кр}} = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{P^*}{P_{кр}^*}, t^* = \frac{P}{P_{кр}} = \frac{\nu t}{P_{кр}} = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{P^*}{P_{кр}^*}, \\ P^* = \frac{P}{E} \left(\frac{b}{h_0} \right)^2, q^* = \frac{q}{E} \left(\frac{b}{h_0} \right)^4, S = P_{кр}^* \left(\frac{\pi c E h_0^3}{\nu b^4} \right)^2 \end{aligned}$$

при сохранении прежних обозначений получим следующую систему основных разрешающих дискретизированных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_k \ln m \ddot{u}_{nm} - \eta_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[\left[(1 - \Gamma_{11}^*) d_{1k \ln m} + (1 - \Gamma^*) d_{2k \ln m} \right] u_{nm} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[(1 - \Gamma_{12}^*) d_{3k \ln m} + (1 - \Gamma^*) d_{4k \ln m} \right] v_{nm} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n,t=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[(1 - \Gamma_{11}^*) d_{7k \ln mij} + (1 - \Gamma_{12}^*) d_{8k \ln mij} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(1 - \Gamma^*\right) d_{9k \ln mij} \left] \left(w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}\right)\right\} = 0, \\
 & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{k \ln m} \ddot{v}_{nm} - \eta_2 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[\left(1 - \Gamma_{21}^*\right) e_{1k \ln m} + \left(1 - \Gamma^*\right) e_{2k \ln m} \right] u_{nm} + \right. \\
 & \quad \left. + \left[\left(1 - \Gamma_{22}^*\right) e_{3k \ln m} + \left(1 - \Gamma^*\right) e_{4k \ln m} \right] v_{nm} \right\} + \\
 & \quad + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[\left(1 - \Gamma_{22}^*\right) e_{7k \ln mij} + \left(1 - \Gamma_{21}^*\right) e_{8k \ln mij} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(1 - \Gamma^*\right) e_{9k \ln mij} \right] \left(w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}\right)\right\} = 0, \quad (8) \\
 & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{k \ln m} \ddot{w}_{nm} + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[\left(1 - \Gamma_{11}^*\right) f_{5k \ln m} + \left(1 - \Gamma_{12}^*\right) f_{6k \ln m} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(1 - \Gamma_{22}^*\right) f_{7k \ln m} + \left(1 - \Gamma_{21}^*\right) f_{8k \ln m} + \left(1 - \Gamma^*\right) f_{9k \ln m} \right] \left(w_{nm} - w_{0nm}\right) + \\
 & \quad + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M p_{k \ln m}^* w_{nm} t^* - \eta_3 \left\{ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[\left(1 - \Gamma_{11}^*\right) \xi_{1k \ln mij} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(1 - \Gamma_{21}^*\right) \xi_{2k \ln mij} + \left(1 - \Gamma^*\right) \xi_{3k \ln mij} \right] u_{ij} + \right. \\
 & \quad \left. + \left[\left(1 - \Gamma_{22}^*\right) \xi_{4k \ln mij} + \left(1 - \Gamma_{12}^*\right) \xi_{5k \ln mij} + \left(1 - \Gamma^*\right) \xi_{6k \ln mij} \right] v_{ij} \right\} + \\
 & \quad + \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \left\{ \left[\left(1 - \Gamma_{11}^*\right) g_{5k \ln mijrs} + \left(1 - \Gamma_{12}^*\right) g_{6k \ln mijrs} + \left(1 - \Gamma_{22}^*\right) g_{7k \ln mijrs} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(1 - \Gamma_{21}^*\right) g_{8k \ln mijrs} + \left(1 - \Gamma^*\right) g_{9k \ln mijrs} \right] \left(w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}\right) \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

где постоянные коэффициенты, входящие в эту систему, связаны с координатными функциями и их производными; $c = \sqrt{\sqrt{E_1 E_2} / \rho}$ — скорость звука в материале пластины; $\omega = \sqrt{\pi^2 \sqrt{E_1 E_2} h^2 P_{kp}^* / (\rho b^4)}$;

$P_{kp} = \frac{\pi^2}{3(1 - \mu^2)} E \left(\frac{h}{b}\right)^2$ — статическая критическая нагрузка; c —

плотность материала пластины.

Пример расчета процесса деформирования вязкоупругой ортотропной прямоугольной пластины с переменной толщиной. Интегрирование системы (8) проводилось с помощью программного

комплекса [7] с использованием квадратурных формул [2; 8]. Результаты вычислений при различных физических и геометрических параметрах приведены на графиках, рис. 1, 2. Зависимость изменения толщины имеет следующий вид: $h = 1 + \alpha^* x$, $h_0 = h(0) = const$, где α^* — параметр изменения толщины.

Аналогично [4], в качестве критерия, определяющего критическое время, а вместе с тем и критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине пластинки h_0 . В качестве параметра определяющего устойчивость пластинки принят K_d — коэффициент динамичности, равный отношению динамической критической нагрузки к эйлеровой статической.

Рассматриваемая методика позволяет изучить влияние неоднородных свойств материала на процесс устойчивости пластинки (рис. 1).

Как видно из рисунка, увеличение параметра $\Delta = \sqrt{E_1/E_2}$, определяющего степень анизотропии (кривая 1 — $D = 1$; кривая 2 — $D = 1.5$ и кривая 3 — $D = 2$), приводит к более позднему интенсивному возрастанию прогибов, соответственно увеличению критического значения K_d . Аналогичные эффекты наблюдаются в случае вязкоупругой пластины с постоянной толщиной [9].

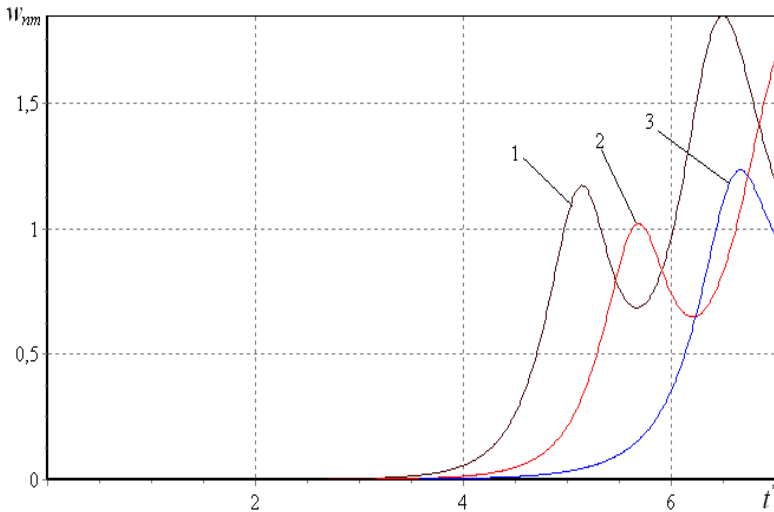


Рис. 1. Зависимость прогиба от времени при $\Delta = 1$ (1); 1.5 (2); 2 (3)

Результаты исследования влияния параметра изменения толщины пластинки α^* на динамическую устойчивость приведены на (рис. 2).

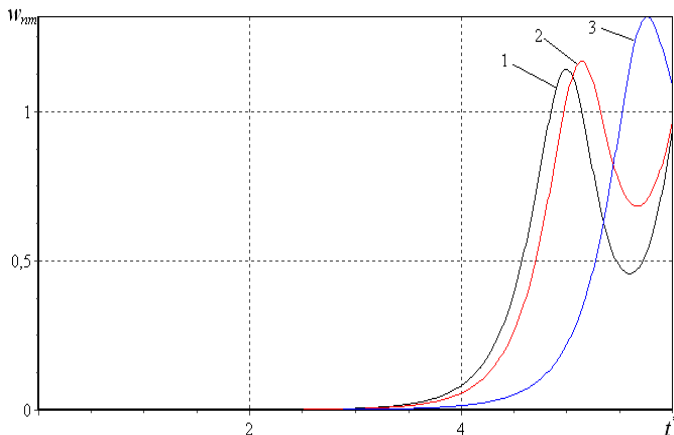


Рис. 2. Зависимость прогиба от времени при $\alpha^* = 0$ (1); 0.5 (2); 0.8 (3)

При значениях $\alpha^* = 0; 0.5; 0.8$ величины коэффициентов динамичности K_d равен соответственно 4.85, 4.97, 5.52. Напомним, что увеличение параметра α^* влечет за собой увеличение толщины пластинки. Вычисления производились при равных объемах пластин постоянной и переменной толщины. Из графиков видно, что с увеличением параметра толщины значение коэффициента K_d увеличивается.

Выводы. Рассмотренный метод математического моделирования позволяет разрабатывать эффективные алгоритмы и программы для решения сложных задач анализа процессов деформации в элементах и узлах современных механических конструкций.

Список использованной литературы:

1. Абдикаримов Р. А. Колебания прямоугольной вязкоупругой пластинки с сосредоточенными массами / Р. А. Абдикаримов, Д. А. Ходжаев // Труды III всероссийской конф. по теории упругости с международным участием. 13-16 сентября 2003. — Ростов-на-Дону. — С. 394–396.
2. Бадалов Ф. Б. О некоторых методах решения систем ИДУ, встречающихся в задачах вязкоупругости / Ф. Б. Бадалов, Х. Эшматов, М. Юсупов // ПММ. — 1987. — Т. 51, № 5. — С. 867–871.
3. Верлань А. Ф. Численное решение нелинейных задач динамики вязкоупругих систем / А. Ф. Верлань, Х. Эшматов, Б. Худаяров, Ш. П. Бобоназаров // Электронное моделирование. — 2004. — Т. 26. — № 3. — С. 3–14.
4. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. — М. : Наука, 1972. — 432 с.
5. Ильющин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильющин, Б. Е. Победря. — М. : Наука, 1970. — 280 с.
6. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация / М. А. Колтунов. — М. : Высшая школа, 1976. — 276 с.

7. Корнеев О. М. Програмный комплекс для розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь / О. М. Корнеев, В. А. Федорчук // Наук. пр. Кам'янець-Подільського нац. ун-т імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : К-ПНУ, 2011. — С. 94–102.
8. Эшматов Х. Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем : автореферат дисс. ... док. тех. наук / Х. Эшматов. — К., 1991.
9. Eshmatov B. Kh. Nonlinear vibrations and dynamic stability of viscoelastic orthotropic rectangular plate / B. Kh. Eshmatov // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — Vol.300. — P. 709–726.

On the basis of the Kirchhoff-Love in a geometrically nonlinear formulation The mathematical model of the processes of deformation of viscoelastic analysis of orthotropic rectangular plates with variable stiffness. The model builds on the problem of propagation of elastic waves. With the help of the Bubnov-Galerkin method based on polynomial approximation of the deflection and displacement, the problem is reduced to solving nonlinear integral-differential equations with variable coefficients. Examines the impact of the viscoelastic properties of the material and thickness variation of the plate.

Key words: *theory of Kirchhoff-Love, a mathematical model, discrete model, viscoelasticity, relaxation kernel, integral-differential equation of the Bubnov-Galerkin method.*

Отримано: 13.09.2012

УДК 681.3.057:518.12:621.314.6:537:312.62

А. А. Верлань, канд. техн. наук

Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев

СПОСОБЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ

Рассмотрена задача локализации структурных неисправностей, которые изменяют функционирование одного из звеньев электрического устройства с ограниченным доступом. Показано, что сочетание методов локализации неисправностей и параметрической идентификации позволяют с приемлемой глубиной диагностирования определить место неисправности и оценить значение параметра неисправного элемента.

Ключевые слова: *электрические устройства, диагностика, параметрическая идентификация.*

Введение. Обычно при решении задачи диагностирования с ограниченным доступом к внутренним точкам объекта рассматриваются параметрические неисправности [1—3]. Однако, в реальных объ-