

УДК 627.324.2/3:532.72

А. П. Власюк, д-р техн. наук, професор,

Т. П. Цветкова, аспірант

Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНОСУ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ ПРИ СУМІСНІЙ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННІ У НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ГРУНТАХ В НЕЛІНІЙНІЙ ОДНОВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Проведено математичне моделювання процесу масоперенесення при фільтрації і вологоперенесенні сольових розчинів в областях повного і неповного насичення. Чисельні розв'язки відповідних крайових задач отримано методом скінченних різниць. Розроблено відповідне програмне забезпечення, з використанням якого проведено чисельні експерименти та зроблено їх аналіз.

Ключові слова: *математична модель, крайова задача, масоперенесення, вологоперенесення, повне і неповного насичення, напір, осмос, різницева схема.*

Вступ. Переміщення вологи та солей в насичено-ненасичених ґрунтах унаслідок дії багаторічних циклічних природно-кліматичних чинників, так і в результаті впливу несприятливих техногенних умов можуть привести до розвитку небезпечних гідрогеологічних процесів: підтоплення територій, забруднення ґрунтових вод. Процес переносу води впливає на перенесення солей, в результаті чого відбувається засолення ґрунтів.

Тому великої уваги в даний час заслуговують питання розробки, дослідження і впровадження методів моделювання для розв'язання задач підземного масоперенесення при фільтрації підземних вод та вологоперенесенні. Використання математичних методів на рівні моделювання складних фізичних процесів відкривають можливість проведення чисельних експериментів при виробленні нових технічних рішень.

Вирішенням даних проблем займався ряд вчених. Теоретичні основи процесів масоперенесення та вологоперенесення закладені в роботах [1—4; 6]. Однак, у вищезгаданих роботах дані процеси розглядалися окремо в областях повного і неповного насичення; домінували лише процеси вологоперенесення без врахування масоперенесення.

В даній роботі здійснено сумісне дослідження солеперенесення при фільтрації підземних вод та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі. Для більш адекватного опису вказаних процесів в математичній моделі задачі враховано наявність осмотичних явищ [10; 14].

Постановка задачі. Дослідимо процес масоперенесення сольових розчинів при сумісній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунті (рис. 1).

На поверхню ґрунту можуть попадати атмосферні опади і поливи. В зв'язку з цим, на деякій глибині l_1 від поверхні землі утворюється вільна поверхня рівня ґрунтових вод (РГВ), яка, надалі, вважається нерухомою. На глибині l_2 є фронт промочування, який для простоти будемо вважати нерухожим (рис. 1).

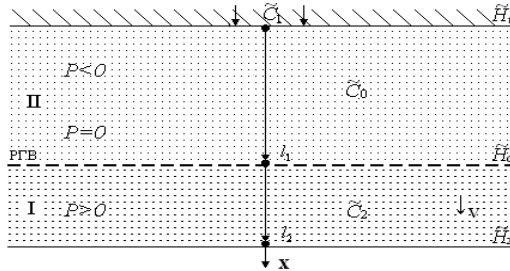


Рис. 1. Масоперенесення солей в областях повного і неповного насичення

Таким чином, в ґрунтовому масиві сформувалося дві області: I — область повного насичення — між поверхнею землі і вільною поверхнею; II — область неповного насичення — між вільною поверхнею та фронтом промочування. Крім того, на поверхню ґрунту може потрапляти сольовий розчин з атмосферними опадами або за рахунок інших факторів з концентрацією \tilde{C}_1 . Розподіл концентрації в області неповного насичення — \tilde{C}_2 , в області повного насичення — \tilde{C}_2 .

Потрібно розрахувати напір води в області неповного насичення, розподіл п'єзометричних напорів в області повного водонасичення та поле розподілу концентрації солей в даних областях; дослідити вплив осмосу на процеси масо- та вологоперенесення в ґрунтовому середовищі.

Математична модель задачі. Математична модель задачі перенесення солей при фільтрації підземних вод у насиченому пористому середовищі з вільною поверхнею в одновимірному випадку на основі робіт [3; 5; 9—14] у загальноприйнятих позначеннях має вигляд

$$\frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 (c_1 - C_1^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_1(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x}) - u_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

або

$$v_1 = -k_1(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + u_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad (3)$$

$$c_1(x, 0) = \tilde{C}_0^1(x), \quad c_1(0, t) = \tilde{C}_1^1(t), \quad c_1(l_2, t) = \tilde{C}_2^1(t), \quad (4)$$

$$h_1(x, 0) = \tilde{H}_0^1(x), \quad h_1(0, t) = \tilde{H}_1^1(t), \quad h_1(l_2, t) = \tilde{H}_2^1(t). \quad (5)$$

Математичну модель задачі перенесення солей при вологоперенесенні в умовах неповного насичення ґрунту можна записати наступним чином [6; 9—14]:

$$\frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_2}{\partial x} - \gamma_2(c_2 - C_2^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\mu(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_2(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x}) - u_2 \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad (7)$$

$$v_2 = -k_2(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad (8)$$

$$c_2(x, 0) = \tilde{C}_0^2(x), \quad c_2(l_2, t) = \tilde{C}_2^2(t), \quad (9)$$

$$h_2(x, 0) = \tilde{H}_0^2(x), \quad h_2(0, t) = \tilde{H}_1^2(t), \quad h_2(l_2, t) = \tilde{H}_2^2(t). \quad (10)$$

На РГВ задаються умови спряження для напору та концентрації відповідно

$$[h] |_{x=l_1} = [c] |_{x=l_1} = \left[cv_x - D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right] \Big|_{x=l_1} = 0. \quad (11)$$

В рівняннях (1)—(11) використані такі позначення: $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$ — концентрації сольових розчинів, $D_1(c_1)$, $D_2(c_2)$ — коефіцієнти конвективної дифузії, $k_1(c_1, h_1)$, $k_2(c_2, h_2)$ — коефіцієнти фільтрації, v_1 , v_2 — швидкості фільтрації сольових розчинів; C_1^* , C_2^* — коефіцієнти граничного насичення сольових розчинів, γ_1 , γ_2 — коефіцієнти масообміну; σ_1 , σ_2 — пористості відповідних ґрунтових середовищ; $h_1 = P - x$ — напір рідини; $P = \frac{p}{\rho g}$ — висота

тиску, h_2 — п'єзометричний напір, u_1 , u_2 — коефіцієнти осмосу.

Диференціальні рівняння (1), (6) описують масоперенесення солей в областях повного ($P > 0$) та неповного ($P < 0$) насичення відповідно. (2), (7) — рівняння фільтрації та вологоперенесення; (3), (8) — швидкості фільтрації з врахуванням осмосу. Умови (4), (5), (9), (10) — крайові умови для концентрації та напорів для відповідних

областей водонасичення. (11) — умова спряження, задана на межі областей повного та неповного насичення.

Чисельний розв'язок задачі. Знайдемо спочатку чисельний розв'язок задачі в області повного насичення. Для знаходження розв'язку задачі фільтрації (2), (5), використаємо неявну різницеву схему, яка при $u_1 = const$ має наступний вигляд:

$$\frac{1}{h_1^2} \left[b_{i+1}^j (H_{1,i+1}^{j+1} - H_{1,i}^{j+1}) - b_i^j (H_{1,i}^{j+1} - H_{1,i-1}^{j+1}) - u_1 (C_{1,i+1}^j - 2C_{1,i}^j + C_{1,i-1}^j) \right] = 0, \quad (12)$$

де

$$b_i^j = 0.5 \left(K(H_i^j, C_i^j) + K(H_{i-1}^j, C_{i-1}^j) \right), \\ b_{i+1}^j = 0.5 \left(K(H_{i+1}^j, C_{i+1}^j) + K(H_i^j, C_i^j) \right).$$

При $u_1 = u_1(c_1)$ різницєва схема задачі набуде наступного вигляду:

$$\frac{1}{h_1^2} \left[b_{i+1}^j (H_{1,i+1}^{j+1} - H_{1,i}^{j+1}) - b_i^j (H_{1,i}^{j+1} - H_{1,i-1}^{j+1}) \right] - \frac{1}{h_1} \left(Z_{i+1}^j \frac{C_{1,i+1}^{j+1} - C_{1,i}^{j+1}}{h_1} - Z_i^j \frac{C_{1,i}^{j+1} - C_{1,i-1}^{j+1}}{h_1} \right) = 0. \quad (13)$$

де $Z_{i+1}^j = 0.5(u_1(C_{i+1}^j) + u_1(C_i^j))$, $Z_i^j = 0.5(u_1(C_i^j) + u_1(C_{i-1}^j))$.

Розв'язок різницєвих схем (12), (13) знайдемо методом прогонки. Для цього запишемо дану різницєву схему в прогнотичному вигляді

$$a_1 H_{1,i-1}^{j+1} - c_1 H_{1,i}^{j+1} + b_1 H_{1,i+1}^{j+1} = -f_1, \quad (14)$$

де $a_1 = \frac{b_i^j}{h_1^2}$, $b_1 = \frac{b_{i+1}^j}{h_1^2}$, $c_1 = \frac{b_{i+1}^j + b_i^j}{h_1^2}$, $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{0, m}$,

$f_1 = \frac{u_1}{h_1^2} (C_{1,i+1}^j - 2C_{1,i}^j + C_{1,i-1}^j)$, $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{0, m}$ при $u_1 = const$,

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \left(Z_{i+1}^j \frac{C_{1,i+1}^j - C_{1,i}^j}{h_1} - Z_i^j \frac{C_{1,i}^j - C_{1,i-1}^j}{h_1} \right),$$

$i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{0, m}$ при $u_1 = u_1(c_1)$.

Розв'язок задачі фільтрації методом прогонки знаходимо у вигляді

$$H_{1,i}^{j+1} = \alpha_{i+1}^1 H_{1,i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^1, \quad (15)$$

де $\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}$, $\beta_{i+1}^1 = \frac{a_1 \beta_i^1 + f_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}$, $i = \overline{n_1 - 1, 1}$.

Для знаходження чисельного розв'язку задачі масоперенесення (1), (3), (4) застосуємо монотонну різницеву схему [7; 8].

$$\sigma_1 \frac{C_{1,i}^{j+1} - C_{1,i}^j}{\tau} = \frac{1}{h_1} \left(\eta_{i2}^j d_{i+1}^{j+1} \frac{C_{1,i+1}^{j+1} - C_{1,i}^{j+1}}{h_1} - \eta_{i1}^j d_i^{j+1} \frac{C_{1,i}^{j+1} - C_{1,i}^{j+1}}{h_1} \right) + \frac{r_{i+}^j}{h_1} (C_{1,i+1}^{j+1} - C_{1,i}^{j+1}) + \frac{r_{i-}^j}{h_1} (C_{1,i}^{j+1} - C_{1,i-1}^{j+1}) - \gamma_1 (C_{1,i}^{j+1} - C_1^*), \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} d_i^j &= 0.5 \left(D(x_i, C_{1,i}^j) + D(x_{i-1}, C_{1,i-1}^j) \right), \\ d_{i+1}^j &= 0.5 \left(D(x_{i+1}, C_{1,i+1}^j) + D(x_i, C_{1,i}^j) \right), \\ r_{i+}^j &= \frac{-V(x_i, C_{1,i}^j) + |V(x_i, C_{1,i}^j)|}{2} \geq 0, \quad r_{i-}^j = \frac{-V(x_i, C_{1,i}^j) - |V(x_i, C_{1,i}^j)|}{2} \leq 0, \\ V(x_i, C_i^k) &= r_{i+}^j + r_{i-}^j, \quad \eta_{i1}^j = \frac{1}{1 + \frac{0,5h_1 |r_{i-}^j|}{d_i^j}}, \quad \eta_{i2}^j = \frac{1}{1 + \frac{0,5h_1 |r_{i+}^j|}{d_{i+1}^j}}. \end{aligned}$$

Розв'язок різницевої схеми (16) знайдемо методом прогонки. Для цього запишемо дану різницеву схему в прогоночному вигляді

$$a_2 C_{1,i-1}^{j+1} - c_2 C_{1,i}^{j+1} + b_2 C_{1,i+1}^{j+1} = -f_2, \quad (17)$$

$$\text{де } a_2 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{d_i^j \eta_{i1}^j}{h_1} - r_{i-}^j \right), \quad b_2 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{d_{i+1}^j \eta_{i2}^j}{h_1} + r_{i+}^j \right),$$

$$c_2 = \frac{1}{h_1^2} \left(d_i^j \eta_{i1}^j + d_{i+1}^j \eta_{i2}^j \right) + \frac{|r_{i-}^j|}{h_1} + \frac{\sigma_1}{\tau}, \quad f_2 = \gamma_1 (C_{1,i}^{j+1} - C_1^*).$$

Розв'язок задачі (17) методом прогонки знаходимо у вигляді

$$C_{1,i}^{j+1} = \alpha_{i+1} C_{1,i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad (18)$$

де

$$\alpha_{i+1} = \begin{cases} \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i = \overline{0, n_s - 1}, \\ \frac{D_{n_s}^j}{\left(D_{n_s+1}^j - v_{n_s+1}^j \right) + \left(D_{n_s}^j - v_{n_s}^j \right) (1 - \alpha_{n_s})}, & i = n_s, \\ \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i = \overline{n_s + 1, n - 1}. \end{cases}$$

$$\beta_{i+1} = \begin{cases} \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - a_i \alpha_i}, i = \overline{0, n_s - 1}, \\ \frac{D_{n_s}^j \beta_i}{\left(D_{n_s+1}^j - v_{n_s+1}^j \right) + \left(D_{n_s}^j - v_{n_s}^j \right) \left(1 - \alpha_{n_s} \right)}, i = n_s, \\ \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - a_i \alpha_i}, i = \overline{n_s + 1, n - 1}. \end{cases}$$

n_s — значення координати на РГВ, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \tilde{C}_1^1(t)$.

Швидкість фільтрації при $u_1 = const$ обчислюємо за формулою

$$V_i^{j+1} = -k_{1,i}^j \left(\frac{H_{1,i+1}^j - H_{1,i-1}^j}{2h_1} + u_1 \frac{C_{1,i+1}^j - 2C_{1,i}^j + C_{1,i-1}^j}{h_1^2} \right) \quad (19)$$

при $u_1 = u_1(c_1)$,

$$V_i^{j+1} = -k_{1,i}^j \left(\frac{H_{1,i+1}^j - H_{1,i-1}^j}{2h_1} + \frac{1}{h_1} \left(Z_{i+1}^j \frac{C_{i+1}^{j+1} - C_i^{j+1}}{h_1} - Z_i^j \frac{C_i^{j+1} - C_{i-1}^{j+1}}{h_1} \right) \right), \quad (20)$$

де $Z_{i+1}^j = 0,5(u_1(C_{i+1}^j) + u_1(C_i^j))$, $Z_i^j = 0,5(u_1(C_i^j) + u_1(C_{i-1}^j))$.

Знайдемо чисельний розв'язок задач вологоперенесення та масоперенесення в області неповного насичення. Для знаходження чисельного розв'язку задачі вологоперенесення (7), (10) застосуємо неявну різницеву схему.

Тоді різницева схема даної задачі при $u_2 = const$ прийме вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_2^2} \left[b_{i+1}^j \left(H_{2,i+1}^{j+1} - H_{2,i}^{j+1} \right) - b_i^j \left(H_{2,i}^{j+1} - H_{2,i-1}^{j+1} \right) - \right. \\ & \left. - u_2 \left(C_{2,i+1}^j - 2C_{2,i}^j + C_{2,i-1}^j \right) \right] = \mu_i^j \frac{H_{2,i}^{j+1} - H_{2,i}^j}{\tau}, \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} & b_i^j = 0.5 \left(K(H_i^j, C_i^j) + K(H_{i-1}^j, C_{i-1}^j) \right), \\ & b_{i+1}^j = 0.5 \left(K(H_{i+1}^j, C_{i+1}^j) + K(H_i^j, C_i^j) \right), \quad \mu_i^j = a \rho g \left(1 - \frac{2h_2}{H_{i+1}^j - H_{i-1}^j} \right). \end{aligned}$$

При $u_2 = u_2(c_2)$ різницева схема задачі має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_2^2} \left[b_{i+1}^j \left(H_{2,i+1}^{j+1} - H_{2,i}^{j+1} \right) - b_i^j \left(H_{2,i}^{j+1} - H_{2,i-1}^{j+1} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{h_2} \left(Z_{i+1}^j \frac{C_{2,i+1}^{j+1} - C_{2,i}^{j+1}}{h_2} - Z_i^j \frac{C_{2,i}^{j+1} - C_{2,i-1}^{j+1}}{h_2} \right) = \frac{\mu_i^j}{\tau} H_{2,i}^{j+1} - \frac{\mu_i^j}{\tau} H_{2,i}^j, \end{aligned} \quad (22)$$

де $Z_{i+1}^j = 0,5(u_2(C_{i+1}^j) + u_2(C_i^j))$, $Z_i^j = 0,5(u_2(C_i^j) + u_2(C_{i-1}^j))$.

Розв'язок різницьових схем (21), (22) знайдемо методом прогонки. Для цього запишемо дану різницеву схему в прогоночному вигляді

$$a_3 H_{2,i-1}^{j+1} - c_3 H_{2,i}^{j+1} + b_3 H_{2,i+1}^{j+1} = -f_3, \quad (23)$$

де $a_3 = \frac{b_i^j}{h_2^2}$, $b_3 = \frac{b_{i+1}^j}{h_2^2}$, $c_3 = \frac{b_{i+1}^j + b_i^j}{h_2^2}$, $i = \overline{1, n_2}$, а при $u_2 = const$ коефіцієнт f_3 має вигляд

$$f_3 = \frac{u_2}{h_2^2} (C_{2,i+1}^j - 2C_{2,i}^j + C_{2,i-1}^j), \quad i = \overline{1, n_2}.$$

При $u_2 = u_2(c_2)$ коефіцієнт f_3 наступний:

$$f_3 = \frac{1}{h_2} \left(Z_{i+1}^j \frac{C_{2,i+1}^{j+1} - C_{2,i}^{j+1}}{h_2} - Z_i^j \frac{C_{2,i}^{j+1} - C_{2,i-1}^{j+1}}{h_2} \right), \quad i = \overline{1, n_2}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Чисельний розв'язок задачі вологоперенесення методом прогонки знаходимо у вигляді

$$H_{2,i}^{j+1} = \alpha_{i+1}^3 H_{2,i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^3, \quad (24)$$

де $\alpha_{i+1}^3 = \frac{b_3}{c_3 - \alpha_i^3 a_3}$, $\beta_{i+1}^3 = \frac{a_3 \beta_i^3 + f_3}{c_3 - \alpha_i^3 a_3}$, $i = \overline{n_2 - 1, 1}$.

Для розв'язування задачі масоперенесення солей (6), (8), (9) використаємо монотонну різницеву схему [8].

Тоді різницєва схема даної задачі матиме вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_2 \frac{C_{2,i}^{j+1} - C_{2,i}^{j1}}{\tau} &= \frac{1}{h_2} \left(\eta_{i2}^j d_{i+1}^{j+1} \frac{C_{2,i+1}^{j+1} - C_{2,i}^{j+1}}{h_2} - \eta_{i1}^j d_i^{j+1} \frac{C_{2,i}^{j+1} - C_{2,i}^{j1}}{h_2} \right) + \\ &+ \frac{r_{i+}^j}{h_2} (C_{2,i+1}^{j+1} - C_{2,i}^{j+1}) + \frac{r_{i-}^j}{h_2} (C_{2,i}^{j+1} - C_{2,i-1}^{j+1}) - \gamma_2 (C_{2,i}^{j+1} - C_2^*), \end{aligned} \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} d_i^j &= 0.5 \left(D(x_i, C_{2,i}^j) + D(x_{i-1}, C_{2,i-1}^j) \right), \\ d_{i+1}^j &= 0.5 \left(D(x_{i+1}, C_{2,i+1}^j) + D(x_i, C_{2,i}^j) \right), \quad V(x_i, C_{2,i}^k) = r_{i+}^j + r_{i-}^j, \\ r_{i+}^j &= \frac{-V(x_i, C_{2,i}^j) + |V(x_i, C_{2,i}^j)|}{2} \geq 0, \quad r_{i-}^j = \frac{-V(x_i, C_{2,i}^j) - |V(x_i, C_{2,i}^j)|}{2} \leq 0. \end{aligned}$$

Згідно методу прогонки

$$a_4 C_{2,i-1}^{j+1} - c_4 C_{2,i}^{j+1} + b_4 C_{2,i+1}^{j+1} = -f_4, \quad (26)$$

де

$$a_4 = \frac{1}{h_2} \left(\frac{d_i^j \eta_{i1}^j}{h_2} - r_{i-}^j \right), \quad b_4 = \frac{1}{h_2} \left(\frac{d_{i+1}^j \eta_{i2}^j}{h_2} + r_{i+}^j \right),$$

$$c_4 = \frac{1}{h_2^2} \left(d_i^j \eta_{i1}^j + d_i^j \eta_{i2}^j \right) + \frac{|r_i^j|}{h_2} + \frac{\sigma_2}{\tau}, \quad f_4 = \gamma_2 \left(C_{2,i}^{j+1} - C_2^* \right),$$

чисельний розв'язок задачі перенесення знаходимо у вигляді

$$C_{2,i}^{j+1} = \alpha_{i+1}^4 C_{2,i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^4, \quad (27)$$

де $a_{i+1}^4 = \frac{b_4}{c_4 - \alpha_i^4 a_4}$, $\beta_{i+1}^4 = \frac{a_4 \beta_i^4 + f_4}{c_4 - \alpha_i^4 a_4}$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \tilde{C}_1^1(t)$.

Значення швидкості фільтрації (8) при $u_2 = const$ та $u_2 = u_2(c_2)$ обчислюється за формулами відповідно

$$V_i^{j+1} = -k_{2,i}^j \left(\frac{H_{2,i+1}^j - H_{2,i-1}^j}{2h_2} + u_2 \frac{C_{2,i+1}^j - C_{2,i-1}^j}{2h_2} \right),$$

$$V_i^{j+1} = -k_{2,i}^j \left(\frac{H_{2,i+1}^j - H_{2,i-1}^j}{2h_2} + \frac{1}{h_2} \left(Z_{i+1}^j \frac{C_{2,i+1}^{j+1} - C_{2,i}^{j+1}}{h_2} - Z_i^j \frac{C_{2,i}^{j+1} - C_{2,i-1}^{j+1}}{h_2} \right) \right).$$

де $Z_{i+1}^j = 0,5(u(C_{i+1}^j) + u(C_i^j))$, $Z_i^j = 0,5(u(C_i^j) + u(C_{i-1}^j))$.

Алгоритм розв'язування задачі масоперенесення солей у насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі побудовано повністю.

Програмна реалізація та результати чисельних експериментів. Для реалізації задачі розроблена комплексна програма в інтегрованому середовищі візуально-подійного програмування Visual C# 2010 з використанням технології .NET Framework 4.0.

На основі програмної реалізації задачі були проведені чисельні експерименти, що дало можливість детально дослідити характер протікання процесів в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища та провести аналіз отриманих результатів при наступних вхідних даних:

$$T = 360 \text{ діб}, \quad l_1 = 10 \text{ м}, \quad l_2 = 15 \text{ м}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0,4, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0,0065,$$

$$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad C^* = 350 \text{ г/л}, \quad \tilde{C}_0 = 0 \text{ г/л}, \quad \tilde{C}_1 = 0 \text{ г/л}, \quad \tilde{C}_2 = 10 \text{ г/л},$$

$$H_1^1 = 1,4 \text{ м}, \quad H_2^1 = 0,1 \text{ м}, \quad \nu = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}.$$

Початкові та граничні умови для задач вологоперенесення та фільтрації: $h(x, 0) = \frac{H_1 - H_2}{l_2} x + H_2$, $h(0, t) = H_2 e^{0,01t}$, $h(l_2, t) = H_2$.

Початкові та граничні умови для задачі масоперенесення солей наступні: $c(x, 0) = 0$, $c(0, t) = 10 e^{-0,1t}$, $c(l_2, t) = 0$.

Результатом розв'язання задачі масоперенесення в області неповного насичення є знаходження значень розподілу напорів води та концентрації солей в межах даної області з врахуванням осмотичних явищ.

В результаті розв'язання задачі вологоперенесення з врахуванням осмосу та без отримали наступні графіки розподілу напорів води (рис. 2, 3).

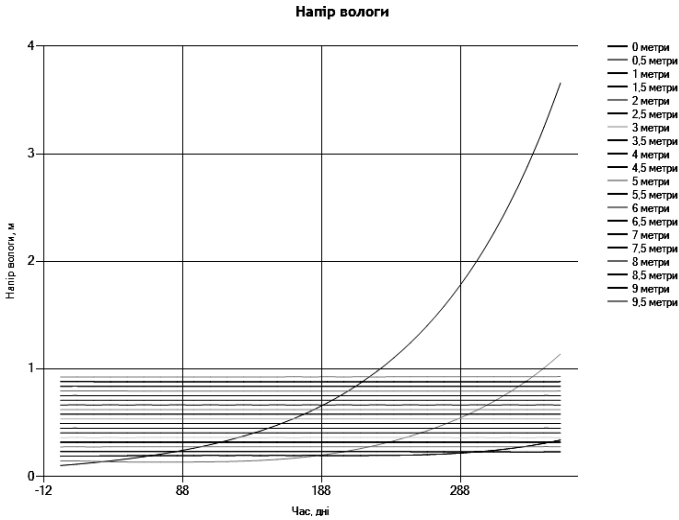


Рис. 2. Графік розподілу напорів води з осмосом

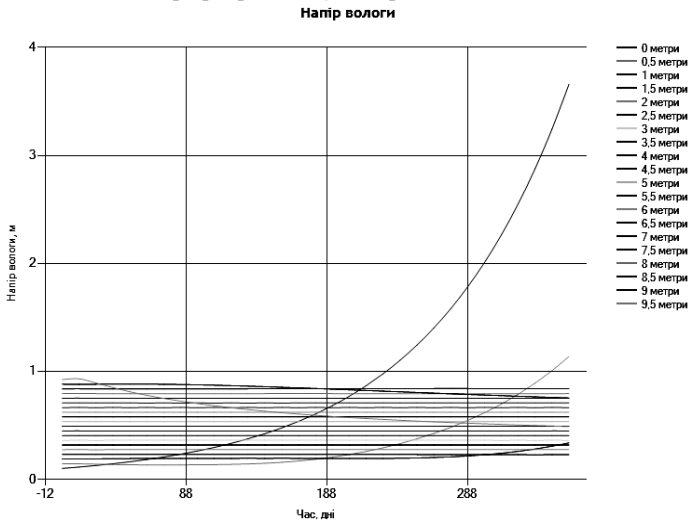


Рис. 3. Графік розподілу напорів води без осмосу

Як видно з рис. 2, 3, напір води зменшується з часом та зростає з глибиною, набуваючи максимального значення на межі РГВ. Вплив осмосу на процес розподілу води незначний.

Розподіл концентрації солей в даній області насичення має вигляд (рис. 4, 5)

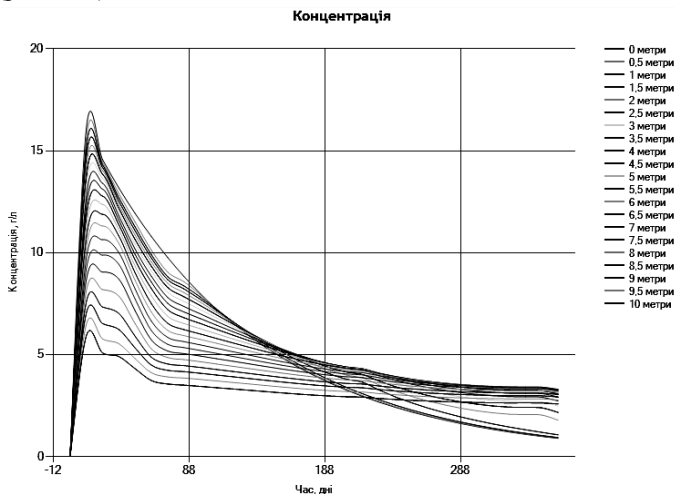


Рис. 4. Графік розподілу концентрації солей з осмосом

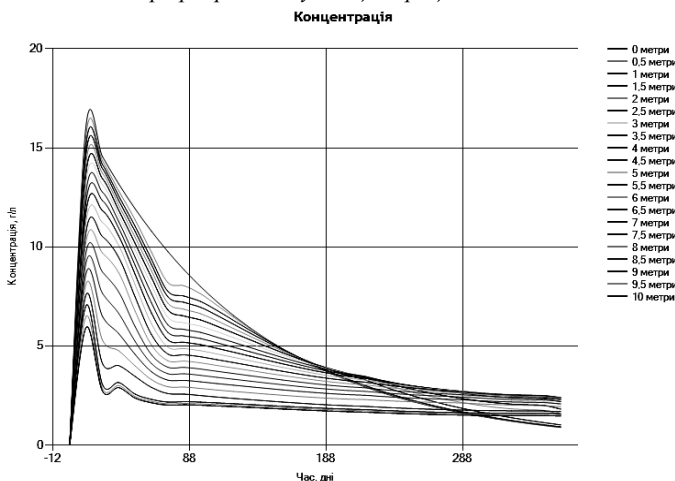


Рис. 5. Графік розподілу концентрації солей без осмосу

На основі аналізу графіків (рис. 4, 5) розподіл концентрації солей зменшується з часом та з глибиною, що пояснюється вимиванням солевих розчинів з пористого середовища. З врахуванням осмосу розпо-

діл концентрації солей зростає швидше (рис. 4). Величина впливу пропорційна вибору коефіцієнта осмосу або осмотичної функції.

Розв'язавши задачу в області неповного насичення, знайдемо розв'язок задачі в області повного насичення.

В результаті розв'язання задачі було знайдено наступне графічне представлення розподілу п'езометричних напорів (рис. 6, 7):

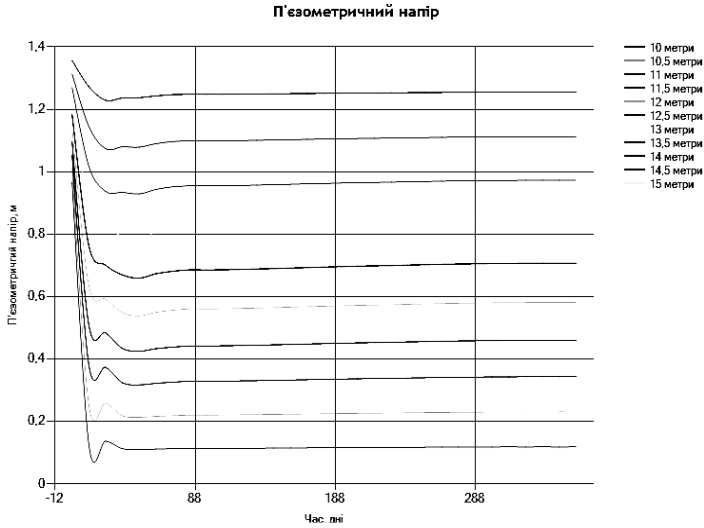


Рис. 6. Графік розподілу п'езометричних напорів з осмосом

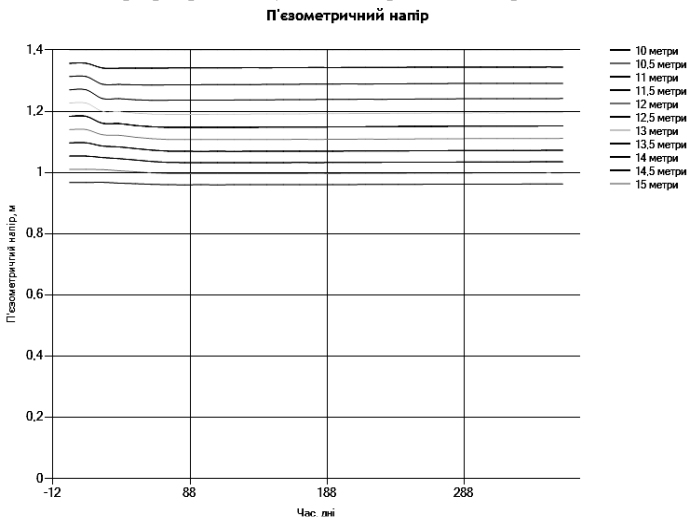


Рис. 7. Графік п'езометричних напорів без осмосу

З рис. 6, 7 видно, що значення розподілу напорів рідини зменшуються з часом дуже повільно та зростають з глибиною пористого середовища. Врахування звичайного осмосу приводить до зростання значень розподілу.

В результаті розв'язання задачі масоперенесення отримано наступні графіки розподілу концентрації солей (рис. 8, 9):

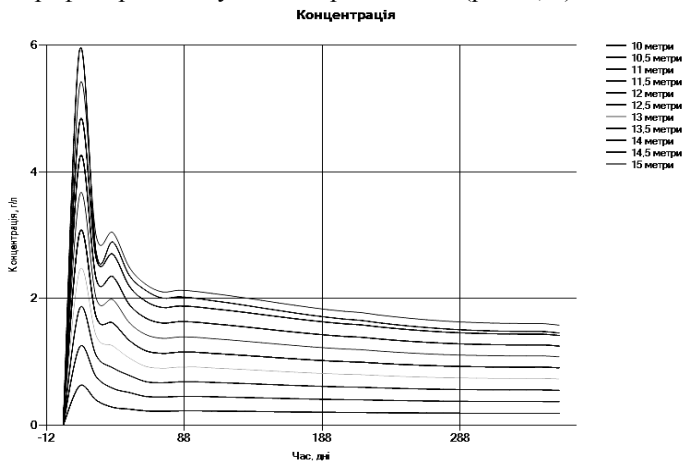


Рис. 8. Графік розподілу концентрації солей без осмосу

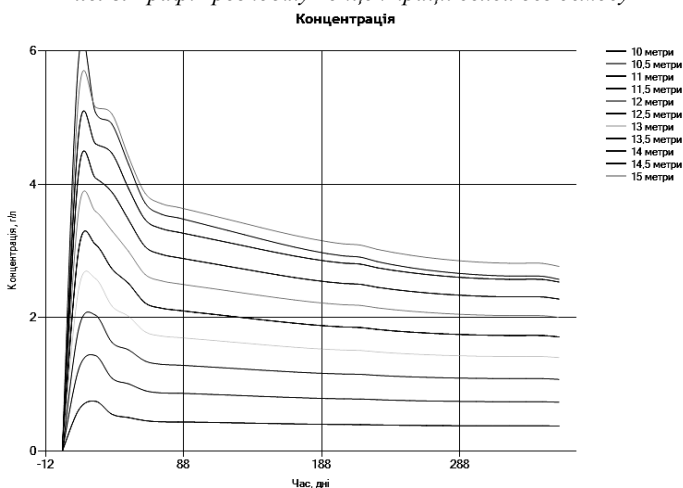


Рис. 9. Графік розподілу концентрації солей з осмосом

Розподіл концентрації солей зменшується з часом та з глибиною, набуваючи менших значень в порівнянні з розподілом концентрації в області неповного насичення. Як видно з рис. 9, вплив осмосу на

процес розподілу концентрації солей є значним: значення концентрації солей зростають.

Важливою особливістю даної задачі є розгляд процесів масоперенесення в насиченій і ненасиченій областях в комплексі.

Графічне представлення розподілу поля концентрації солей в насичено-ненасиченій області представлено на наступних графіках (рис. 10, 11):

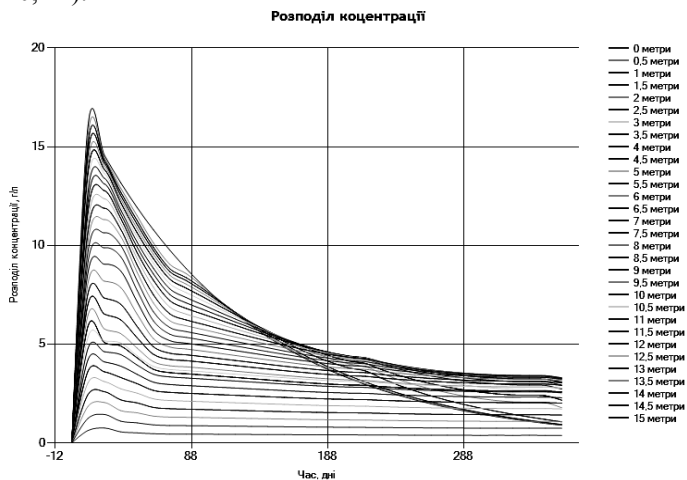


Рис. 10. Графік розподілу концентрації солей з часом в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища

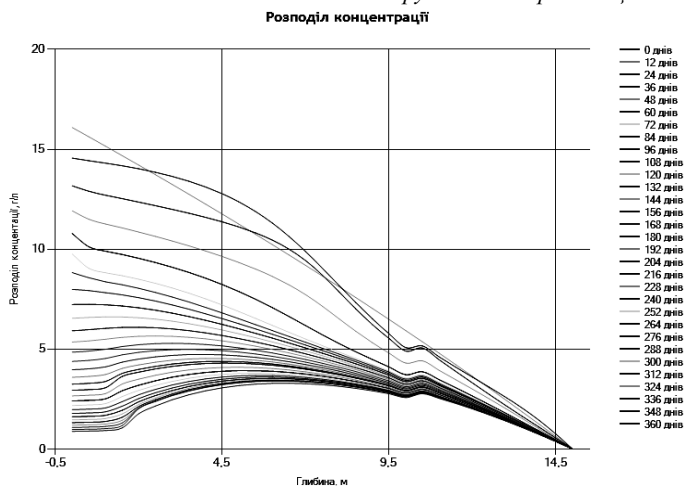


Рис. 11. Графік розподілу концентрації солей з глибиною в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища

Графіки, зображені на рис. 10, 11 демонструють зменшення значень розподілу концентрації солей в області насичено-ненасиченого середовища з часом та з глибиною, що пояснюється вимиванням солевих розчинів з пористого середовища.

Висновки. Побудовано математичну модель переносу солевих розчинів, що описується крайовою задачею (1)—(5), (11) та (6)—(10), (11).

Для крайової задачі (1)—(11) побудовано монотонну різницеву схему, знайдено її чисельний розв'язок та виконано програмну реалізацію в середовищі Visual C# 2010.

Проведено комплексне дослідження солеперенесення в насичено-ненасичених ґрунтах, при якому знайдено поля розподілів напорів вологи, п'єзометричних напорів та поля концентрацій в областях повного та неповного насичення; побудовано спільний графік розподілу концентрації солей в насичено-ненасиченій області; визначено вплив осмотичних явищ на процеси волого- та масоперенесення. Проведено ряд чисельних експериментів за результатами розв'язаних задач волого- і масоперенесення на різних часових проміжках та в залежності від товщини шару ґрунту, що дає змогу оцінити та прогнозувати характер протікання даних процесів.

Встановлено, що розподіл напорів вологи з врахуванням концентрації солей при наявності осмотичних явищ зазнав незначних змін в області неповного насичення ґрунту на відміну від розподілу п'єзометричних напорів в області повного насичення, де чисельні експерименти показують значний вплив осмосу. Це свідчить про те, що осмос впливає на процес розподілу напорів вологи пропорційно величині коефіцієнта осмосу або осмотичної функції. Крім того, розподіл напорів вологи з врахуванням концентрації солей та при наявності осмосу збільшується з часом та з глибиною швидше. Розподіл поля концентрації солей зменшується з часом та з глибиною в насичено-ненасиченій області.

Список використаних джерел:

1. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). — М. : Наука, 1969. — С. 237–313.
2. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. — К. : Наук. думка, 1991. — С. 29–33.
3. Ляшко С. И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод / С. И. Ляшко. — К. : Наук. думка, 1998. — 256 с.
4. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — С. 27–31.
5. Лукнер Л. Моделирование геофильтрации / Л. Лукнер, В. М. Шестаков. — М. : Надра, 1976. — С. 68–71.

6. Гусев Е. М. Проблемы теории переноса жидкости в ненасыщенных пористых средах / Е. М. Гусев // Физика почвенных вод. — М. : Наука, 1981.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — 3-е изд. — М. : Наука, 1989. — 616 с.
8. Власюк А. П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, О. М. Степанченко // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — Вип. 3. — С. 188-197.
9. Власюк А. П. Математичне моделювання масоперенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах в нелінійній постановці / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова / Тези XVII Міжн. конф. „Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності”. — Східниця, 2011. — С. 48–50
10. Цветкова Т. П. Математичне моделювання масопереносу з врахуванням осмосу на вологоперенос в одновимірному випадку / Т. П. Цветкова / Математичне та комп. моделювання. Серія: Техн. науки : збірник наукових праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 227–233.
11. Vlasyuk A. Application of numerical conformal mappings for solving problems of mass transfer during filtration and moisture transfer of salt solutions in full and partial saturation soils / A. Vlasyuk, T. Tsvetkova / XVI Conference on Analytic Functions and Related Topics — Chelm (Poland), 2011. — (Submitted for Publication)
12. Власюк А. П. Математичне моделювання фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах в стаціонарному режимі / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова / Тез. XVIII Міжн. конф. „Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності”. — Ялта, 2011. — С. 48–50
13. Власюк А. П. Математичне моделювання процесу масопереносу при фільтрації і вологоперенесенні сольових розчинів в областях повного і неповного насичення / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2011. — Вип. 4. — (подано до друку).
14. Власюк А. П. Математичне моделювання масоперенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова / Тез. XVII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». — Львів, 2011. — С. 27.

Mathematical model of the mass transfer during the filtration and the moisture transfer of salt solutions in full and partial saturation soils is formulated. Numerical solutions of respective boundary problems are obtained by means of finite differences method. Proper software is developed using which numerical experiments and their analysis are performed.

Key words: *mathematical model, boundary problem, mass transfer, moisture transfer, area of partial saturation, osmosis, concentration, pressure, osmosis, difference scheme.*

Отримано: 12.10.2012