

References

1. Верлань А. Ф. Методы и алгоритмы восстановления сигналов и изображений: монография / А. Ф. Верлань, И. О. Горошко, Е. Ю. Карпенко, В. Ю. Королёв, Л. В. Мосенцова. — К., 2011. — 367 с.
2. Сизиков В. С. Математические методы обработки результатов измерений / В.С. Сизиков. — СПб. : Политехника, 2001. — 240 с.
3. Грановский В. А. Динамические измерения: основы метрологического обеспечения / В. А. Грановский. — Л. : Энергоатомиздат, 1984. — 224 с.
4. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусатаров, А. А. Игнатченко, Н. А. Максимович. — К. : Наук. думка, 1993. — 208 с.

В статті розглядаються алгоритми відновлення неперервних сигналів, на які динамічно впливають істотні спотворення у вигляді шумів. Показано, що розроблені алгоритми цифрової фільтрації можна застосувати для стабільної роботи оператора інверсії каналу. Для забезпечення стійкості розв'язку некоректних задач застосовуються методи регуляризації з максимальним використанням додаткової апріорної інформації про сигнал і шум. Приведено результати комп'ютерних експериментів.

Ключові слова: відновлення сигналів, методи регуляризації.

Отримано: 26.09.2012

УДК 519.6:519.85

Є. Ю. Карпенко*, канд. техн. наук,
О. А. Наконечна**, старший преподаватель,
Р. М. Ирмухаметова***, старший преподаватель

*Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев,

**Восточноевропейский университет экономики

и менеджмента, г. Черкассы,

***Ташкентский государственный технический университет,

г. Ташкент, Узбекистан

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Рассмотрены параллельные алгоритмы решения СЛАУ методами мельчайших квадратов по схеме Холецкого и сингулярного разложения с использованием преобразования Хаус-холдера. Дана оценка временной реализации рассмотренных алгоритмов.

Ключевые слова: параллельные алгоритмы, сингулярное расписание, метод Холецкого, преобразования Хаусхолдера.

Введение и постановка задачи. Проблема распараллеливания вычислений вообще и алгоритмов решения СЛАУ, в частности, привлекает внимание исследователей с момента появления вычислитель-

ной техники, и стала особенно актуальной в настоящее время в связи с появлением БИС и СБИС, открывшим новые возможности в создании вычислительных устройств параллельного типа. Вопросам распараллеливания алгоритмов решения СЛАУ посвящено значительное число публикаций, в частности работы [1—2].

При распараллеливании алгоритмов следует учитывать критерий их эквивалентности. Так, если при переводе алгоритма из одной формы записи в другую сохраняется вся совокупность операций и определены (возможно, различными способами) порядки их выполнения, то чаще всего оказывается, что разные формы записи алгоритмов порождают один и тот же граф, и в этом смысле они полностью эквивалентны. Если же разные формы записи приводят к разным графам, то это говорит о неэквивалентности алгоритмов, заданных этими записями.

Решение СЛАУ методом наименьших квадратов по схеме Холецкого. Решение переопределенных СЛАУ методом наименьших квадратов сводится к решению СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей коэффициентов, получаемой путем умножения слева исходной матрицы коэффициентов на транспонированную матрицу

$$\hat{A} = A^T A.$$

Известно [3], что если \hat{A} — положительно определенная симметричная $(n \times n)$ матрица, то в силу теоремы Холецкого ее можно представить в виде произведения

$$\hat{A} = C^T C, \quad (1)$$

где C — верхняя треугольная $(n \times n)$ матрица. Выражению (1) соответствует компактная схема вычисления элементов C_{ij} матрицы C :

$$C_{ii} = \left(\hat{\alpha}_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} C_{ki}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i \geq 1.$$

$$C_{ij} = C_{ii}^{-1} \left(\hat{\alpha}_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} C_{ki} C_{kj} \right), \quad i < j.$$

$$C_{ij} = 0, \quad i > j.$$

Решение СЛАУ

$$\hat{A}X \equiv C^T CX = \hat{B},$$

где $\hat{B} \equiv A^T B = \{\hat{b}_{ij} = \overline{1, n}\}$, $\hat{b}_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} b_j$, осуществляется в два этапа.

Сначала путем прямой подстановки решается СЛАУ

$$C^T D = \hat{B},$$

элементы d_i , вектора решения D которого определяются по формуле

$$d_i = C_{ii}^{-1} \left(\hat{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} d_j C_{ji} \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Затем путем обратной подстановки из СЛАУ

$$CX = D$$

находится решение $X = \{x_{i/i} = \overline{1, n}\}$ по формуле,

$$x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^n C_{ik} x_k.$$

Максимальная ярусно-параллельная форма (ЯПФ) алгоритма решения переопределенной СЛАУ методом наименьших квадратов, с учетом параллельных схем выполнения операций умножения матриц и решения СЛАУ методом Холецкого, представлена на рис. 1.

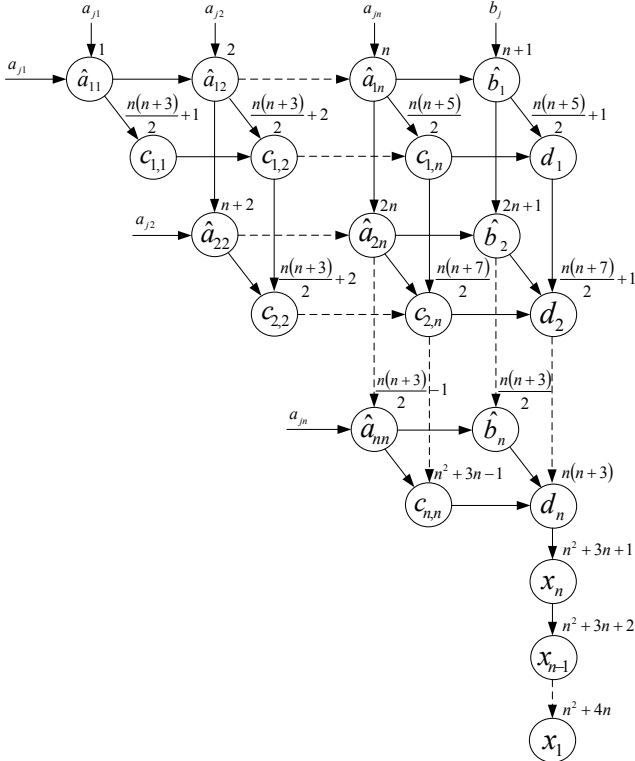


Рис. 1. Максимальная ярусно-параллельная форма (ЯПФ) алгоритма решения переопределенной СЛАУ методом наименьших квадратов

Общее число операций типа накопления $s = s + \alpha_i b_i \ (i = \overline{1, n})$, характеризующее операционную сложность алгоритма решения переопределенной СЛАУ методом наименьших квадратов с использованием разложения Холецкого, определяется суммарным числом операций, необходимых для выполнения матричного произведения, реализации разложения Холецкого и обратной подстановки по формуле

$$\begin{aligned} \omega_H &= \left(\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{sn}{6} \right) + \frac{mn(n+3)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \\ &= \frac{3mn^2 + n^3}{6} + \frac{3}{2}(n^2 + mn) + \frac{n}{3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Временная задержка при трехмерной интерпретации потоковой вычислительной схемы метода, соответствующей рис. 1, определяется величиной

$$T_{H3} = m + 3n - 2 + n - 1 = m + 4n - 3. \quad (3)$$

Решение СЛАУ методом сингулярного разложения с использованием преобразований Хаусхолдера. Рассмотрим метод решения СЛАУ общего вида размерностью $(m \times n, m > n)$ методом сингулярного разложения с использованием преобразований Хаусхолдера (метод отражений). Предположим, что столбцы матрицы коэффициентов упорядочены таким образом, что столбцы с минимальным количеством нулевых элементов расположены слева. Процесс решения СЛАУ состоит из n этапов преобразования исходной матрицы A коэффициентов к верхней треугольной матрице и этапа нахождения корней СЛАУ путем обратной подстановки. На каждом l -ом этапе осуществляются следующие операции по преобразованию исходной матрицы коэффициентов.

1. Определение евклидовой нормы l -го вектора столбца размерности $(m-l+1)$ текущей промежуточной матрицы коэффициентов

тов $A^{(l)} = \left\{ \alpha_{ij}^{(l)} = \overline{l, m}, j = \overline{l, n} \right\}$ по формуле

$$sig = \left(\sum_{i=l}^m \left(\alpha_{il}^{(l)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Определение l -го диагонального элемента по формуле

$$\alpha_{ll} = \alpha_{ll}^{(l-1)} + \text{sign} \left(\alpha_{ll}^{(l-1)} \right) sig,$$

вычисление вспомогательной переменной $\beta = \alpha_{ll} sig$ и l -го элемента вектора V_x норм столбцов преобразованной матрицы A :

$$V_x(l) = -sig.$$

3. Вычисление промежуточной преобразованной матрицы $A^{(l)}$ с элементами

$$\alpha_{ij}^{(l)} = \alpha_{ij}^{(l-1)} - \alpha_{il}^{(l-1)} R_j, \quad i = \overline{l+1, m},$$

где $R_j = \left(\sum_{k=l}^m \alpha_{kl}^{(l-1)} \alpha_{kj}^{(l-1)} \right) / \beta, \quad j = \overline{l+1, n}.$

4. Вычисление промежуточного преобразованного вектора-столбца правой части СЛАУ $B^{(l)}$ с элементами

$$b_i^{(l)} = b_i^{(l-1)} - \alpha_{il}^{(l-1)} s, \quad i = \overline{l, m},$$

где $s = \frac{\left(\sum_{k=l}^m \alpha_{kl}^{(l-1)} b_k^{(l-1)} \right)}{\beta}.$

После выполнения n этапов преобразования получаем верхнюю треугольную матрицу $A^{(n)}$. Обратная подстановка осуществляется по компактной схеме:

$$x_j = \frac{\left(b_j^{(n)} - \sum_{i=j+1}^n \alpha_{ji}^{(n)} x_i \right)}{V_x(j)}, \quad j = \overline{n, 1}.$$

Анализ рассмотренного алгоритма показывает, что на каждом этапе возможно распараллеливание вычисления векторов-столбцов промежуточной матрицы $A^{(l)}$ и вектора правой части $B^{(l)}$ после вычисления соответствующего диагонального элемента α_{ll} . Двумерная максимальная ЯПФ алгоритма решения переопределенной СЛАУ методом сингулярного разложения с использованием преобразования Хаусхолдера приведена на рис. 2.

Общее число операций типа накопления, характеризующее операционную сложность алгоритма решения СЛАУ методом сингулярного разложения с использованием преобразования Хаусхолдера определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \omega_s &= \sum_{l=1}^n \left[3m - 2l + 3 + (n-l)(2m - 2l + 1) \right] + \frac{n(n-1)}{2} = \\ &= n^2 \left(m - \frac{n}{3} \right) + n(2m + 3n) + \frac{10}{3}n. \end{aligned} \tag{4}$$

Временная задержка при двумерной интерпретации потоковой вычислительной схемы метода, соответствующей рис. 2, определяется величиной:

$$T_{s2} = m + \sum_{l=1}^n (2m - l + 1) + n - 1 = n \left(2m - \frac{n}{2} \right) + \left(m + \frac{3}{2}n \right) - 1. \quad (5)$$

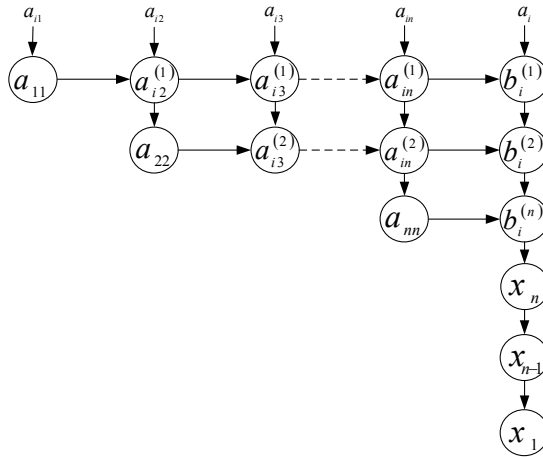


Рис. 2. Двумерная максимальная ЯПФ алгоритма решения переопределенной СЛАУ методом сингулярного разложения

Поскольку для переопределенных СЛАУ $m \geq n$, то число операций для решения СЛАУ методом наименьших квадратов по схеме Холецкого, определяемое по формуле (2), и число операций для решения СЛАУ методом сингулярного разложения с использованием преобразования Хаусхолдера, определяемое по формуле (3), можно оценить по соответствующим неравенствам:

$$\omega_H \geq \frac{2n^3}{3} + 3n^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3}n^2 + 0(3n^2), \quad (6)$$

$$\omega_S \geq \frac{2n^3}{3} + 5n^2 + \frac{10n}{3} = \frac{2}{3}n^3 + 0(5n^2 + 3n). \quad (7)$$

Из сравнения неравенств (6) и (7) следует, что решение СЛАУ методом сингулярного разложения требует на $(2n^2 + 3n)$ операций больше, чем решение по схеме Холецкого. Однако, второй метод менее устойчив к погрешностям исходных данных и округления, что иногда делает его применение нецелесообразным. К недостаткам метода сингулярного разложения следует отнести ограниченные возможности по его распараллеливанию. Следует отметить интересное свойство парал-

лельных форм алгоритма решения СЛАУ по схеме Холецкого, которое состоит в том, что временные задержки реализации метода при трехмерной и двумерной интерпретации равны между собой. Действительно, первоначально во всех вычислителях определяются элементы матричного произведения $A^T A$ и произведения матрицы на вектор $A^T B$, что требует параллельного выполнения m операций типа накопления в каждом вычислителе. Затем выполняется разложение полученной СЛАУ по теореме Холецкого и нахождения корней обратной подстановкой, со временами задержки соответственно $(3n-2)$ и $n-1$. Просуммировав затраты времени на каждом этапе и сравнивая результат с (3) получим общее время реализации метода наименьших квадратов по схеме Холецкого при двумерной интерпретации:

$$T_{H2} = T_{H3} = m + 4n - 3.$$

Эта особенность объясняется тем, что матричные операции и собственно решение СЛАУ связаны отношением строгого порядка следования, вследствие чего трехмерная интерпретация алгоритма не дает выигрыша по сравнению с двумерной.

Аналогичным свойством обладают параллельные формы алгоритма решения СЛАУ методом сингулярного разложения. Однако здесь отличие состоит в том, что одно и то же время реализации решения обеспечивается для двумерной и одномерной интерпретации алгоритма. К такому выводу можно прийти на основе следующих рассуждений.

Из анализа алгоритма можно заметить, что вычисление очередной промежуточной матрицы коэффициентов $A^{(l)}$ и вектора правой части $B^{(l)}$ начинается после вычисления диагонального элемента α_{ll} . Для вычисления элемента α_{ll} требуется m операций типа накопления. Вычисление элементов векторов столбцов матрицы $A^{(l)}$ выполняется параллельно и требует выполнения $(2m-2l+1)$ операций типа накопления. Вычисление вектора $B^{(l)}$ требует $(2m-l+1)$ таких операций. После завершения l -го преобразования в первых l вычислителях хранятся значения элементов $\alpha_{ij}^{(l)}$ ($i = \overline{1, l}; j = \overline{1, l}; i \leq j$), которые не подлежат дальнейшему преобразованию. Наибольшее время требуется для преобразования вектора $B^{(l)}$. Поэтому общее время решения СЛАУ методом сингулярного разложения при одномерной интерпретации алгоритма определяется величиной

$$T_{S1} = m + \sum_{l=1}^n (2m-l+1) + n - 1.$$

Сравнивая с (5) получим

$$T_{S1} = T_{S2} = n \left(2m - \frac{n}{2} \right) + \left(m + \frac{3}{2}n \right) - 1. \quad (8)$$

Время решения СЛАУ методом наименьших квадратов по схеме Холецкого при одномерной интерпретации алгоритма определяется величиной

$$T_{H1} = mn + \frac{1}{2}(n^2 + 3n - 2). \quad (9)$$

Представляя (8) и (9) в виде неравенств (полагая $m \geq n$), получим соответственно

$$T_{H1} \geq \frac{3}{2}(n^2 + n) - 1,$$

$$T_{S1} \geq \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 1.$$

Численный эксперимент. Оценка эффективности рассмотренных алгоритмов была проведена при решении систем, которые возникают при численном решении интегральных уравнений Фредгольма I рода. Такого типа задачи входят в класс обратных задач и характеризуются неустойчивостью решения при повышении размерности системы.

Численные эксперименты проводились с использованием одного и двух процессоров (1,74 GHz), при этом максимальная пропускная способность коммуникационной сети составляла 3500 Mb/s. В качестве реализации MPI был выбран mpich2, а также использовалась библиотека подпрограмм линейной алгебры ScaLAPACK.

Результаты численного эксперимента представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты численного эксперимента

Метод	Наименьших квадратов по схеме Холецкого (с)		Сингулярного разложения (с)	
	1 процессор	2 процессора	1 процессор	2 процессора
Размерность матрицы				
512x512	0.91	0.61	1.27	0.88
1024x1024	7.37	4.10	8.56	4.77
2048x2048	58.32	32.35	104.19	38.90
4096x4096	474.25	370.09	512.22	399.35

Выводы. Для решения СЛАУ методами сингулярного разложения и наименьших квадратов по схеме Холецкого при одномерной интерпретации соответствующих алгоритмов, требуется приблизительно одно и то же время.

Проведенный анализ параллельных форм алгоритмов решения СЛАУ показал, что эффективность параллельной реализации соответствующих методов определяется внутренней структурой информационных связей внутри этих методов, а максимальная ЯПФ не всегда обеспечивает максимальное время решения СЛАУ.

Сравнение времени реализации метода наименьших квадратов по схеме Холецкого при двумерной и одномерной интерпретации показало, что для $n \leq 3$ $T_{H1} \approx T_{Hl}$. Таким образом, в ряде приложений одномерная интерпретация алгоритмов решения СЛАУ является весьма эффективной с точки зрения достижения компромисса между производительностью и структурной сложностью параллельных устройств.

Список использованной литературы:

1. Ортега Дою. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Дою Ортега. — М. : Мир, 1990.
2. Гергель В. П. Теория и практика параллельных вычислений / В. П. Гергель. — М. : Мир, 2007. — 424 с.
3. Голуб Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоу. — М. : Мир, 1999. — 548 с.

The article deals with parallel algorithms for solving algebraic equations by methods of smallest squares scheme Holetskoho and singular decomposition using conversion Hausholdera. The evaluation time of the considered algorithms.

Key words: *parallel algorithms, singular decomposition, the method Holetskoho, conversion Hausholdera.*

Отримано: 10.10.2012