УДК 517.946

І. М. Конет*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. П. Ленюк,** д-р фіз.-мат. наук, професор

*Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,
**Чернівецький факультет Харківського національного
технічного університету «ХПІ», м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є — ЛЕЖАНДРА — ЛЕЖАНДРА НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом узагальненого скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є — Лежандра — Лежандра зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі дифузії на сегменті $[R_0, R_3]$ з двома точками спряження полярної осі в припущенні, що межі середовища м'які по відношенню до відбиття хвиль. Моделювання дифузійного процесу виконано за допомогою гібридного диференціального оператора Фур'є — Лежандра — Лежандра.

Ключові слова: *моделювання дифузійних процесів, гібридний диференціальний оператор, власні елементи, скінченне гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, головні розв'язки.*

Постановка проблеми та її аналіз. Процеси дифузії відіграють значну роль у виробничих процесах, впливають на міцність устаткування при врахуванні механічних та технологічних умов експлуатації металів і сплавів. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є диференціальне рівняння дифузії параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t, r), \quad r \in (R_0, R_3) \tag{1}$$

з відповідними початковою та крайовими умовами.

Потреби практики приводили до різноманітного узагальнення рівняння (1). Але в усіх випадках дифузійні процеси вивчалися в припущенні, що межа середовища жорстка відносно відбиття хвиль. Різко змінюється картина дифузійного процесу, якщо межа середовища є м'якою по відношенню до відбиття хвиль (в крайових операторах та операторах спряження присутня похідна за часовою змінною).

У другій половині XX-го століття для вивчення механіко-технічних характеристик композитних матеріалів був розвинутий метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик [2]. Це приводило в кожній конкретній задачі до інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку (або системи таких рівнянь) із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних. Та отримати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задач цим методом, як виявилося, неможливо. Тому ми пропонуємо моделювання дифузійних процесів методом гібридних диференціальних операторів [3—5].

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині

$$D_2 = \{(t,r) : t \in (0,\infty); r \in (R_0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,R_3); R_0 \geq 0, R_3 < \infty\}$$

розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу зі сталими коефіцієнтами [1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} = f_1(t,r), \quad r \in (R_0,R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)_1}[u_2] = f_2(t,r), \quad r \in (R_1,R_2), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)_2}[u_3] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2,R_3)$$

з початковими умовами

$$u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r), \quad r \in (R_{j-1},R_j), \quad j = \overline{1,3}, \tag{3}$$

крайовими умовами

$$\left(L_{11}^0[u_1(t,r)]\right)\Big|_{r=R_0} = g_0(t), \quad \left(L_{22}^3[u_3(t,r)]\right)\Big|_{r=R_3} = g_R(t) \tag{4}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k[u_k(t,r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)]\right)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad j,k = 1,2. \tag{5}$$

У рівняннях (2) беруть участь диференціальний оператор Фур'є другого порядку $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}$ [6] та узагальнений диференціальний оператор Лежандра [7]

$$\Lambda_{(\mu)_j} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\mu_{1j}^2(1-chr)^{-1} + \mu_{2j}^2(1+chr)^{-1}\right);$$

$$\mu_{1j} \geq \mu_{2j} \geq 0, \; j = 1,2; \; (\mu)_j = (\mu_{1j},\mu_{2j}); \; (\mu) = \left((\mu)_1,(\mu)_2\right).$$

У рівностях (3), (4) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jk}^m = \left(\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}; \quad j,k = 1,2; \quad m = 0,1,2,3.$$

Розв'язок задачі (2)—(5) побудуємо методом скінченного гібридного інтегрального перетворення (СГІП) зі спектральним параметром, породженого на множині $I_2 = (R_0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,R_3)$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\mu)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)a_1^2\frac{d^2}{dr^2} + \\ +\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2\Lambda_{(\mu)_1} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)a_3^2\Lambda_{(\mu)_2} \quad (6)$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [8].

Оскільки ГДО $M_{(\mu)}$ самоспряжений і на множині I_2 не має особливих точок, то його спектр дійсний та дискретний [9].

Власні елементи (власні числа та відповідні їм власні функції) ГДО $M_{(\mu)}$ побудуємо методом спектральної задачі Штурма—Ліувілля: знайти на множині I_2 ненульовий розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Фур'є та Лежандра

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_1^2\right)V_{(\mu);1}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_0,R_1),$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)_1}+b_2^2\right)V_{(\mu);2}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2), \quad (7)$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)_2}+b_3^2\right)V_{(\mu);3}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_2,R_3)$$

з крайовими умовами

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^0\right)V_{(\mu);1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}=0,\ \left(\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^3\right)V_{(\mu);3}(r,\beta)\Big|_{r=R_3}=0 \quad (8)$$

та умовами спряження

$$[(\tilde{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^k)V_{(\mu);k}(r,\beta)-(\tilde{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^k)V_{(\mu);k+1}(r,\beta)]\Big|_{r=R_k}=0, \\ j,k=1,2 \quad (9)$$

У рівностях (7)—(9) беруть участь: спектральний параметр β, компоненти $V_{(\mu);j}(r,\beta)$ спектральної власної вектор-функції

$$V_{(\mu)}(r,\beta)=\sum_{j=1}^{3}\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)V_{(\mu);j}(r,\beta) \quad (10)$$

та функції

$$b_j=a_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2},\ \ (k_j^2\ge 0,\ \ j=\overline{1,3}),\ \tilde{\alpha}_{jk}^m=\alpha_{jk}^m-(\beta^2+\gamma^2)\delta_{jk}^m,$$
$$\tilde{\beta}_{jk}^m=\beta_{jk}^m-(\beta^2+\gamma^2)\gamma_{jk}^m,\ \gamma^2=\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2}+b_1^2)v=0$ складають функції $v_1=\cos b_1 r$ та $v_2=\sin b_1 r$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)_j} + b_j^2)v = 0$ складають функції $A_{\upsilon_j^*}^{(\mu)_j}(chr)$ та $B_{\upsilon_j^*}^{(\mu)_j}(chr)$ [7], $\upsilon_j^* = -1/2 + ib_j$, $j = 1,2$.

В силу лінійності спектральної задачі (7)—(9) покладемо

$$V_{(\mu);1}(r,\beta) = A_1 \cos b_1 r + B_1 \sin b_1 r, \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$V_{(\mu);2}(r,\beta) = A_2 A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)_1}(chr) + B_2 B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)_1}(chr), \quad r \in (R_1, R_2), \tag{11}$$

$$V_{(\mu);3}(r,\beta) = A_3 A_{\upsilon_3^*}^{(\mu)_2}(chr) + B_3 B_{\upsilon_3^*}^{(\mu)_2}(chr), \quad r \in (R_2, R_3).$$

Крайові умови (8) та умови спряження (9) для визначення величин $A_j, B_j (j = \overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$A_1 v_{11}^{01}(b_1 R_0) + B_1 v_{11}^{02}(b_1 R_0) = 0,$$

$$v_{j1}^{11}(b_1R_1)A_1 + v_{j1}^{12}(b_1R_1)B_1 - Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu)_1;11}(chR_1)A_2 - Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu)_1;12}(chR_1)B_2 = 0, j = 1,2,$$

$$Y_{\upsilon_2^*;j1}^{(\mu)_1;21}(chR_2)A_2 + Y_{\upsilon_2^*;j1}^{(\mu)_1;22}(chR_2)B_2 - Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu)_2;21}(chR_2)A_3 - Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu)_2;22}(chR_2)B_3 = 0,$$

$$Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu)_2;31}(chR_3)A_3 + Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu)_2;32}(chR_3)B_3 = 0. \tag{12}$$

У системі (12) беруть участь функції:

$$v_{j1}^{i1}(b_1R_i) = -\tilde{\alpha}_{j1}^i b_1 \sin b_1 R_i + \tilde{\beta}_{j1}^i \cos b_1 R_i,$$

$$v_{j1}^{i2}(b_1R_i) = \tilde{\alpha}_{j1}^i b_1 \cos b_1 R_i + \tilde{\beta}_{j1}^i \sin b_1 R_i,$$

$$Y_{\upsilon_m^*;jk}^{(\mu)_k;m1}(chR_m) = \left[\left(\tilde{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{jk}^m\right) A_{\upsilon_m^*}^{(\mu)_k}(chr)\right]\Bigg|_{r = R_m}; \quad i = 0,1;$$

$$Y_{\upsilon_m^*;jk}^{(\mu)_k;m2}(chR_m) = \left[\left(\tilde{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{jk}^m\right) B_{\upsilon_m^*}^{(\mu)_k}(chr)\right]\Bigg|_{r = R_m}; \quad m = 2,3; j,k = 1,2.$$

Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{j1}(b_1R_0, b_1R_1) = v_{11}^{01}(b_1R_0)v_{j1}^{12}(b_1R_1) - v_{11}^{02}(b_1R_0)v_{j1}^{11}(b_1R_1), \quad j = 1,2; k = 1,2;$$

$$\delta_{\upsilon_2^*;jk}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2) = Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu)_1;11}(chR_1)Y_{\upsilon_2^*;k1}^{(\mu)_1;22}(chR_2) - Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu)_1;12}(chR_1)Y_{\upsilon_2^*;k1}^{(\mu)_1;21}(chR_2),$$

$$\delta_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu)_2}(chR_2, chR_3) = Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu)_2;21}(chR_2)Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu)_2;32}(chR_3) - Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu)_2;22}(chR_2)Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu)_2;31}(chR_3),$$

$$a_{(\mu)_1;j}(\beta) = \delta_{11}(b_1R_0, b_1R_1)\delta_{\upsilon_2^*;2j}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2) - \delta_{21}(b_1R_0, b_1R_1)\delta_{\upsilon_2^*;1j}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2).$$

Алгебраїчна система (12) має відмінний від нуля розв'язок тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю [10]:

$$\delta_{(\mu)}(\beta) \equiv a_{(\mu)_1;1}(\beta)\delta_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu)_2}(chR_2, chR_3) - a_{(\mu)_1;2}(\beta)\delta_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu)_2}(chR_2, chR_3) = 0. \tag{13}$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{(\mu)}$.

Підставимо в алгебраїчну систему (12) $\beta = \beta_n$ ($b_j(\beta_n) \equiv b_{jn}$, $\upsilon_{mn}^* = \upsilon_m^*(\beta_n) = -1/2 + ib_m(\beta_n)$, $m = 2,3$) і відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Покладемо $A_1 = A_0 v_{11}^{02}(b_{1n}R_0)$, $B_1 = -A_0 v_{11}^{01}(b_{1n}R_0)$, де $A_0 \neq 0$ підлягає вибору. Перше рівняння системи стає тотожністю. Для визначення A_2, B_2 маємо алгебраїчну систему:

$$Y_{\upsilon_{2n}^*;j2}^{(\mu)_1;11}(chR_1)A_2 + Y_{\upsilon_{2n}^*;j2}^{(\mu)_1;12}(chR_1)B_2 = -A_0\delta_{j1}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1), \quad j = 1,2 . \quad (14)$$

Визначник алгебраїчної системи (14) обчислюється безпосередньо:

$$q_{(\mu)_1}(\beta_n) \equiv Y_{\upsilon_{2n}^*;12}^{(\mu)_1;11}(chR_1)Y_{\upsilon_{2n}^*;22}^{(\mu)_1;12}(chR_1) -$$

$$-Y_{\upsilon_{2n}^*;22}^{(\mu)_1;11}(chR_1)Y_{\upsilon_{2n}^*;12}^{(\mu)_1;12}(chR_1) = \frac{c_{21,1}}{S_{(\mu)_1}(b_{2n})shR_1} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (14) має єдиний розв'язок [10]:

$$A_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)_1}(\beta_n)}\Big[\delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y_{\upsilon_{2n}^*;12}^{(\mu)_1;12}(chR_1) -$$

$$-\delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y_{\upsilon_{2n}^*;22}^{(\mu)_1;12}(chR_1)\Big], \quad (15)$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)_1}(\beta_n)}[\delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y_{\upsilon_{2n}^*;22}^{(\mu)_1;11}(chR_1) - \delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y_{\upsilon_{2n}^*;12}^{(\mu)_1;11}(chR_1)] .$$

При відомих A_2, B_2 для знаходження величин A_3, B_3 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y_{\upsilon_{3n}^*;j2}^{(\mu)_2;21}(chR_2)A_3 + Y_{\upsilon_{3n}^*;j2}^{(\mu)_2;22}(chR_2)B_3 =$$

$$= A_0[q_{(\mu)_1}(\beta_n)]^{-1}a_{(\mu)_1;j}(\beta_n), \quad j = 1,2. \quad (16)$$

Визначник алгебраїчної системи (16) обчислюється безпосередньо:

$$q_{(\mu)_2}(\beta_n) \equiv Y_{\upsilon_{3n}^*;12}^{(\mu)_2;21}(chR_2)Y_{\upsilon_{3n}^*;22}^{(\mu)_2;22}(chR_2) - Y_{\upsilon_{3n}^*;22}^{(\mu)_2;21}(chR_2)Y_{\upsilon_{3n}^*;12}^{(\mu)_2;22}(chR_2) =$$

$$= \frac{c_{21,2}}{S_{(\mu)_2}(b_{3n})shR_2} \neq 0 .$$

Алгебраїчна система (16) має єдиний розв'язок [10]:

$$A_0 = q_{(\mu)_1}(\beta_n)q_{(\mu)_2}(\beta_n), \quad A_3 = -\omega_{(\mu);2}(\beta_n), \quad B_3 = \omega_{(\mu);1}(\beta_n) ; \quad (17)$$

$$\omega_{(\mu);j}(\beta_n) = a_{(\mu)_1;2}(\beta_n)Y_{\upsilon_{3n}^*;12}^{(\mu)_2;2j}(chR_2) - a_{(\mu)_1;1}(\beta_n)Y_{\upsilon_{3n}^*;22}^{(\mu)_2;2j}(chR_2); \quad j = 1,2 .$$

Одержані згідно формул (15) та (17) значення величин $A_j, B_j (j=\overline{1,3})$ підставимо у рівності (11). Отримаємо функції:

$$V_{(\mu);1}(r,\beta_n) = q_{(\mu)_1}(\beta_n) q_{(\mu)_2}(\beta_n)[v_{11}^{02}(b_{1n}R_0)\cos b_{1n}r - v_{11}^{01}(b_{1n}R_0)\sin b_{1n}r],$$

$$V_{(\mu);2}(r,\beta_n) = q_{(\mu)_2}(\beta_n)[\delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1) f_{\upsilon_{2n}^*;22}^{(\mu)_1;1}(chR_1, chr) -$$

$$-\delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1) f_{\upsilon_{2n}^*;12}^{(\mu)_1;1}(chR_1, chr)], \quad (18)$$

$$V_{(\mu);3}(r,\beta_n) = \omega_{(\mu);1}(\beta_n) B_{\upsilon_{3n}^*}^{(\mu)_2}(chr) - \omega_{(\mu);2}(\beta_n) A_{\upsilon_{3n}^*}^{(\mu)_2}(chr),$$

$$f_{\upsilon;j2}^{(\mu);1}(chR_1, chr) = Y_{\upsilon;j2}^{(\mu);11}(chR_1) B_\upsilon^{(\mu)}(chr) - Y_{\upsilon;j2}^{(\mu);12}(chR_1) A_\upsilon^{(\mu)}(chr).$$

Згідно рівності (10) спектральна вектор-функція $V_{(\mu)}(r,\beta_n)$ визначена.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти:

$$\alpha_{11}^0 \le 0,\ \beta_{11}^0 \ge 0,\ |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \ne 0,\ \alpha_{22}^3 \ge 0,\ \beta_{22}^3 \ge 0,\ \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0;$$

$$\alpha_{jm}^k \ge 0,\ \delta_{jm}^k \ge 0\ \ \beta_{jm}^k \ge 0,\ \gamma_{jm}^k \ge 0,\ c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0,$$

$$c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k;\ c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0,$$

$$\delta_{2j}^k \beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k \beta_{2j}^k = \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k,\ j,k = 1,2.$$

Визначимо числа

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1} c_{11,2}}{c_{21,1} c_{21,2}} shR_1,\ a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}},\ a_3^2 \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 + [\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3]shr$$

та квадрат норми власної вектор-функції [11]

$$\| V_{(\mu)}(r,\beta_n) \|_1^2 = \int_{R_0}^{R_3} [V_{(\mu)}(r,\beta_n)]^2 \sigma(r) dr + G_2(\beta_n,\beta_n). \quad (19)$$

Згідно з роботою [11] маємо такі твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{(\mu)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M_{(\mu)}$: дійсні, різні, симетрично розташовані відносно точки $\beta = 0$ й на піввісі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2 (про спектральну функцію). Система $\left\{ V_{(\mu)}(r,\beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій узагальнено ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$ з області G визначення ГДО $M_{(\mu)}$ зображається за системою $\left\{V_{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно та рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)V_{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\,\frac{V_{(\mu)}(r,\beta_n)}{\|V_{(\mu)}(r,\beta_n)\|^2}\,. \qquad (20)$$

Перейдемо до узагальнено ортонормованої системи власних вектор-функцій

$$\left\{v_{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{V_{(\mu)}(r,\beta_n)\left(\|V_{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^1\right)^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Одержимо ряд Фур'є (20) в такому вигляді:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)v_{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\;\; v_{(\mu)}(r,\beta_n)\,. \qquad (21)$$

Ряд Фур'є (21) визначає пряме $H_{(\mu)}$ та обернене $H_{(\mu)}^{-1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП) зі спектральним параметром, породжене на множині I_2 ГДО $M_{(\mu)}$, визначеним рівністю (6):

$$H_{(\mu)}[g(r)]=\int_{R_0}^{R_3} g(r)v_{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n\,, \qquad (22)$$

$$H_{(\mu)}^{-1}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n v_{(\mu)}(r,\beta_n)\equiv g(r)\,. \qquad (23)$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1=a_1^2\sigma_1:c_{11,1},\quad d_2=a_2^2\sigma_2 shR_2:c_{11,2}\,;\;\; \tilde{g}_{1n}=\int_{R_0}^{R_1} g_1(r)v_{(\mu);1}(r,\beta_n)\sigma_1 dr\,,$$

$$\tilde{g}_{2n}=\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)v_{(\mu);2}(r,\beta_n)\sigma_2 shrdr,\quad \tilde{g}_{3n}=\int_{R_2}^{R_3} g_3(r)v_{(\mu);3}(r,\beta_n)\sigma_3 shrdr\,,$$

$$Z_{(\mu);i2}^k(\beta_n)=\left(\tilde{\alpha}_{i2}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{i2}^k\right)v_{(\mu);k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k},\quad i,k=1,2.$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\{g_1''(r);\Lambda_{(\mu)_1}[g_2(r)];\Lambda_{(\mu)_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^{0}\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0}=g_0,\ \left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^{3}\right)g_3(r)\Big|_{r=R_3}=g_R \tag{24}$$

та умови спряження

$$[(\tilde{\alpha}_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^{k})g_k(r)-(\tilde{\alpha}_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^{k})g_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk},\quad j,k=1,2 \tag{25}$$

то справджується основна тотожність СГІП ГДО $M_{(\mu)}$:

$$H_{(\mu)}[M_{(\mu)}[g(r)]]=-\beta_n^2\tilde{g}_n-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{in}+(-\tilde{\alpha}_{11}^{0})^{-1}v_{(\mu);1}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1 g_0+$$
$$+(\tilde{\alpha}_{22}^{3})^{-1}v_{(\mu);3}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3 shR_3 g_R+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z_{(\mu);12}^{k}(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{(\mu);22}^{k}(\beta_n)\omega_{1k}]. \tag{26}$$

Одержані правила (22), (23) та (26) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку задачі дифузії (2)—(5).

Припустимо спочатку, що початкові умови дорівнюють нулю ($g_j=0$). Цього завжди можна досягти заміною функцій, поклавши

$$v_j(t,r)=u_j(t,r)-g_j(r).$$

Тоді $v_j(t,r)\big|_{t=0}=u_j(t,r)\big|_{t=0}-g_j(r)=g_j(r)-g_j(r)=0$. При цьому, звичайно, будуть змінені як крайові умови, так і неоднорідності системи.

Практика показує, що початкові умови наносять на краях $r=R_0$ й $r=R_3$ та на межах спряження $r=R_j$ $(j=1,2)$ за рахунок м'ягкості величини $\psi_0=\delta_{11}^{0}g_0'(R_0)+\gamma_{11}^{0}g_0(R_0)$, $\psi_3=\delta_{22}^{3}g_3'(R_3)+\gamma_{22}^{3}g_3(R_3)$, $\psi_{jk}=\delta_{j1}^{k}g_k'(R_k)+\gamma_{j1}^{k}g_k(R_k)-[\delta_{j2}^{k}g_{k+1}'(R_k)+\gamma_{j2}^{k}g_{k+1}(R_k)]$. Можна вважати, що $\psi_0=0$, $\psi_3=0$, $\psi_{jk}=0$ ($j,k=1,2$). У протилежному випадку покладемо

$$g_j(r)=\varphi_j(r)+a_j r+b_j,\quad j=1,2,3$$

та виберемо числа a_j,b_j із алгебраїчної системи рівнянь

$$(\delta_{11}^{0}+\gamma_{11}^{0}R_0)a_1+\gamma_{11}^{0}b_1=\psi_0,$$
$$(\delta_{j1}^{k}+\gamma_{j1}^{k}R_k)a_k+\gamma_{j1}^{k}b_k-[(\delta_{j2}^{k}+\gamma_{j2}^{k}R_k)a_{k+1}+\gamma_{j2}^{k}b_{k+1}]=\psi_{jk};\quad j,k=1,2;$$
$$(\delta_{22}^{3}+\gamma_{22}^{3}R_3)a_3+\gamma_{22}^{3}b_3=\psi_3. \tag{27}$$

При виконанні умов на коефіцієнти алгебраїчна система (27) має єдиний розв'язок (його можна одержати за правилами Крамера [10]).

Запишемо систему (2) й нульові початкові умови у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_1(t,r) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2\Lambda_{(\mu)_1}\right)u_2(t,r) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-a_3^2\Lambda_{(\mu)_2}\right)u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{bmatrix}, \quad \left.\begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (28)$$

Інтегральний оператор $H_{(\mu)}$ згідно правила (22) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{(\mu)}[\cdots] = \left[\int_{R_0}^{R_1}\cdots v_{(\mu);1}(r,\beta_n)\sigma_1 dr \int_{R_1}^{R_2}\cdots v_{(\mu);2}(r,\beta_n)\sigma_2 shrdr \right. \qquad (29)$$
$$\left. \int_{R_2}^{R_3}\cdots v_{(\mu);3}(r,\beta_n)\sigma_3 shrdr \right].$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (29) до задачі (28) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (26) маємо задачу Коші:

$$\frac{d\tilde{u}_n}{dt}+\omega_n^2\tilde{u}_n = F_n(t), \quad \tilde{u}_n\big|_{t=0}=0, \quad \omega_n^2=\beta_n^2+\gamma^2, \qquad (30)$$

де

$$F_n(t) = (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}v_{(\mu);1}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1 g_0(t)+(\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}v_{(\mu);3}(R_3,\beta_n)shR_3 g_R(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z_{(\mu);12}^k(\beta_n)\omega_{2k}(t)-Z_{(\mu);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}(t)].$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв’язком задачі Коші (30) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)}F_n(\tau)d\tau. \qquad (31)$$

Оператор $H_{(\mu)}^{-1}$ згідно правила (23) як обернений до (29) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{(\mu)}^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots v_{(\mu);1}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots v_{(\mu);2}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots v_{(\mu);3}(r,\beta_n) \end{bmatrix}. \qquad (32)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (32) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n$ визначена формулою (31). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку задачі дифузії (2)—(5) при умові, що початкові умови $g_j(r)=0$ ($j=\overline{1,3}$):

$$u_j(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n(t)v_{(\mu);j}(r,\beta_n)=\sum_{k=1}^{3}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}H_{(\mu);jk}(t-\tau,r,\rho)f_k(\tau,\rho)\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\Big[W_{(\mu);1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)+W_{(\mu);3j}(t-\tau,r)g_R(\tau)\Big]d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\int_0^t\Big[R^{j,k}_{(\mu);12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-R^{j,k}_{(\mu);22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)\Big]d\tau,\quad j=\overline{1,3};\quad(33)$$

$$(\varphi_1(\rho)=1,\ \ \varphi_2(\rho)=\varphi_3(\rho)=sh\rho).$$

У формулі (33) беруть участь головні розв'язки параболічної задачі (2)—(5):

1) породжені неоднорідністю системи (2) функції впливу

$$H_{(\mu);jk}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2t}v_{(\mu);j}(r,\beta_n)v_{(\mu);k}(\rho,\beta_n);\quad j,k=\overline{1,3},\quad(34)$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{(\mu);1j}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2t}v_{(\mu);j}(r,\beta_n)(-\tilde{\alpha}^0_{11})^{-1}v_{(\mu);1}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1;\quad j=\overline{1,3},\ (35)$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{(\mu);3j}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2t}v_{(\mu);j}(r,\beta_n)(\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}v_{(\mu);3}(R_3,\beta_n)shR_3;\quad j=\overline{1,3},\quad(36)$$

4) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{j,k}_{(\mu);i2}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2t}Z^k_{(\mu);i2}(\beta_n)v_{(\mu);j}(r,\beta_n);\quad i,k=1,2;\quad j=\overline{1,3}.\qquad(37)$$

Зауваження 1. Якщо $\gamma^2=\gamma_1^2$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\ge0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\ge0$; якщо $\gamma^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\ge0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=$ $=\gamma_2^2-\gamma_3^2\ge0$; якщо $\gamma^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\ge0$, $k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\ge0$, $k_3^2=0$.

Зауваження 2. У випадку ненульових початкових умов ($g_j(r)\ne0$) ефектом того, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль дифузії, є поява у розв'язку (33) доданку

$$Q_{(\mu);j}(t,r) = W_{(\mu);1j}(t,r)\psi_0 + W_{(\mu);3j}(t,r)\psi_3 +$$
$$+\sum_{k=1}^{2} d_k \left[R^{j,k}_{(\mu);12}(t,r)\psi_{2k} - R^{j,k}_{(\mu);22}(t,r)\psi_{1k} \right].$$

Висновки. Одержані розв'язки поліпараметричні. Це дає можливість вибором параметрів виділяти безпосередньо із загальних структур будь-який практично важливий частковий випадок (у рамках даної моделі). Розв'язок (33) дифузійної задачі носить алгоритмічний характер, що дозволяє застосовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків.

Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
3. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра—Фур'є—Лежандра на полярної осі $r \geq R_0 > 0$ / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 119–136.
4. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Бесселя—Лежандра—Фур'є на сегменті полярної осі / І.М. Конет, М.П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 112–123.
5. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра—Фур'є—Бесселя на сегменті полярної осі / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2012. — Вип. 6. — С. 113–124.
6. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
7. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
9. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера—Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці: Прут, 2002. — 246 с.
10. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
11. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.

12. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
13. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — Чернівці : Рута, 2006. — Вип. 314–315. — С. 105–113.

The method of generalized hybrid finite integral transformation of the Fourier — Legendre — Legendre spectral parameter obtained from the integral image exact analytical solution of diffusion problem on the segment $[R_0, R_3]$ with two points conjugation polar axis under the assumption that the interface soft against the wave reflection. Modeling diffusion process is performed in hybrid differential Fourier — Legendre — Legendre.

Key words: *modeling of diffusion processes, hybrid differential operator, own elements, finite hybrid integral transform primary identity key solutions.*

Отримано: 10.10.2012

УДК 004.942

Н. Л. Костьян*, старший преподаватель,
Б. С. Аскарходжаев,** старший преподаватель,
В. В. Понедилок*,** аспирант

* Киевский национальный университет технологий и дизайна, г. Киев,
** Ташкентский государственный технический университет, г. Ташкент, Узбекистан
*** Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко, г. Каменец-Подольский

ЧАСТОТНЫЙ СПОСОБ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА НА ВХОДЕ ЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

В работе исследуется процесс воспроизведения входных сигналов динамических объектов по заданным амплитудно-частотною характеристикой и массивом дискретизированных выходных сигналов. В рамках данной задачи решается подзадача нахождения фазо-частотных и полных передаточных характеристик объектов. Предполагается фильтрация выходных и оценка погрешности входных сигналов. Приводится способ определения комбинированной оценки входных сигналов.

Ключевые слова: *полная передаточная функция, фазо-частотная характеристика, амплитудно-частотная характеристика, аппроксимация, оценка.*

Постановка задачи. В состав развитого алгоритмического и программного обеспечения систем инверсной обработки результатов наблюдений, систем автоматизации научных исследований и т.п. должны входить блоки определения полных передаточных характеристик динамических объектов по исходным данным, неявно содержащим эти ха-