12. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
13. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — Чернівці : Рута, 2006. — Вип. 314–315. — С. 105–113.

The method of generalized hybrid finite integral transformation of the Fourier — Legendre — Legendre spectral parameter obtained from the integral image exact analytical solution of diffusion problem on the segment $[R_0, R_3]$ with two points conjugation polar axis under the assumption that the interface soft against the wave reflection. Modeling diffusion process is performed in hybrid differential Fourier — Legendre — Legendre.

Key words: *modeling of diffusion processes, hybrid differential operator, own elements, finite hybrid integral transform primary identity key solutions.*

Отримано: 10.10.2012

УДК 004.942

Н. Л. Костьян*, старший преподаватель,
Б. С. Аскарходжаев,** старший преподаватель,
В. В. Понедилок*,** аспирант

* Киевский национальный университет технологий и дизайна, г. Киев,
** Ташкентский государственный технический университет,
г. Ташкент, Узбекистан
*** Каменец-Подольский национальный университет
имени Ивана Огиенко, г. Каменец-Подольский

ЧАСТОТНЫЙ СПОСОБ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА НА ВХОДЕ ЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

В работе исследуется процесс воспроизведения входных сигналов динамических объектов по заданным амплитудно-частотною характеристикой и массивом дискретизированных выходных сигналов. В рамках данной задачи решается подзадача нахождения фазо-частотных и полных передаточных характеристик объектов. Предполагается фильтрация выходных и оценка погрешности входных сигналов. Приводится способ определения комбинированной оценки входных сигналов.

Ключевые слова: *полная передаточная функция, фазо-частотная характеристика, амплитудно-частотная характеристика, аппроксимация, оценка.*

Постановка задачи. В состав развитого алгоритмического и программного обеспечения систем инверсной обработки результатов наблюдений, систем автоматизации научных исследований и т.п. должны входить блоки определения полных передаточных характеристик динамических объектов по исходным данным, неявно содержащим эти ха-

© Н. Л. Костьян, Б. С. Аскарходжаев, В. В. Понедилок, 2012

рактеристики. К данным такого рода относятся амплитудно-частотные характеристики системы (АЧХ). Поскольку, экспериментальное определение фазо-частотных характеристик элементов, как правило, осложнено аппаратно-технологическими трудностями, необходимо рассмотреть получение по данной АЧХ объекта его передаточной функции, которая проще определяется и предполагается известной.

На основе данной постановки обосновывается способ восстановления сигнала на входе динамического объекта с ориентацией на его компьютерную реализацию.

Восстановление передаточной функции элемента. Для рассматриваемого объекта предполагаются известными его амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ и значения $Y_q(t_i)$ квантованного сигнала на выходе элемента в дискретные моменты времени t_i. Принципиально поставленная задача решается использованием преобразования Гильберта, которое описывает связь между фазовой $\varphi(\omega)$ и амплитудно-частотными характеристиками объекта [1]:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(u)}{u-\omega} du. \tag{1}$$

Это соотношение может быть приведено к виду, в ряде случаев более удобному для практического использования:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\ln A}{d\lambda} cth\left|\frac{\lambda}{2}\right| d\lambda, \quad \lambda = \ln\frac{u}{\omega}. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, при

$$\frac{d\ln A(\lambda)}{d\lambda} = v = Const$$

легко определяется

$$\varphi(\omega) = -v\frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

В [2] получено приближение фазо-частотной характеристики при аппроксимации полубесконечной логарифмической характеристики $L(\omega)$ линейными зависимостями с постоянным наклоном (рис. 1):

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} v \cdot \frac{\omega}{\omega_0}, \ 0 < \frac{\omega}{\omega_0} < 0.414, \\ v\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{\omega}{\omega_0}\ln\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0+\omega} - \frac{2\omega_0-\omega}{\pi\omega_0+\omega}\right], \ 0.414 < \frac{\omega}{\omega_0} < 1, \\ -v\frac{2}{\pi}, \ 1 < \frac{\omega}{\omega_0} < 10, \end{cases} \tag{4}$$

где ω_0 — точка сопряжения прямолинейных отрезков аппроксимации $L(\omega)$.

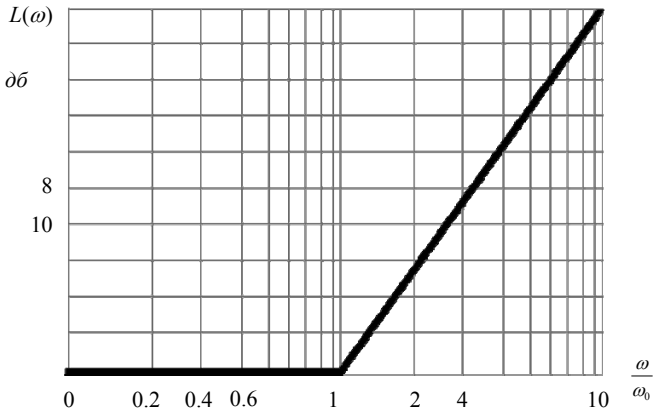

Рис. 1. *Полубесконечная логарифмическая амплитудно-частотная характеристика*

Погрешность аппроксимации (4) может быть достигнута в пределах 2%. На участках амплитудно-частотной характеристики, где величина $\ln A(u)$ отлична от нуля, представляется рациональной аппроксимация функции $L(u) = \ln A(u)$ параболой n_k порядка. Пусть на отрезках $\Delta\omega_k$ частот $\omega \in [\alpha_k, \beta_k]$ получены выражения:

$$\ln \tilde{A}(u)_k = \sum_{j=0}^{n_k} a_j^{[k]} u^{n_k - j}, \ (k = 1, k_m). \tag{5}$$

Из (2) и (5) получаем:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k_m} \varphi_k(\omega), \tag{6}$$

где

$$\varphi_k(\omega) = \sum_{j=0}^{n_{k-1}} G_k(\omega j) \cdot \frac{\beta_k^{n_k - j} - \alpha_k^{n_k - j}}{n_k - j} + G_k\left(\omega^{n_k}\right) \cdot \ln\left|\frac{\beta_k - \omega}{\alpha_k - \omega}\right|, \tag{7}$$

при этом

$$G_k(\omega j) = \sum_{i=0}^{j} a_i^{[k]} \omega^{j-i}, \tag{8}$$

т.е. данная функция является полиномом степени j с коэффициентами $a_i^{[k]}$.

В частности, при $n_k = 2$ для всех k_m интервалов частотной характеристики имеем:

$$\varphi_k(\omega) = \frac{\alpha_0^{[k]}}{2}\left(\beta_k^2 - \alpha_k^2\right) + \left(\alpha_0^{[k]}\omega + \alpha_1^{[k]}\right)\cdot\left(\beta_k - \alpha_k\right) + \\ + \left(\alpha_0^{[k]}\omega^2 + \alpha_1^{[k]}\omega + \alpha_2^{[k]}\right)\cdot \ln\left|\frac{\beta_k - \omega}{\alpha_k - \omega}\right|, (k = 1,\ k_m). \tag{9}$$

Так как при малых значениях $A(u)$ аппроксимация (5) невозможна, то в алгоритме определения фазо-частотной характеристики представляется целесообразным комбинированное использование аппроксимаций (4), (6)—(8).

Таким образом, можно считать известной и передаточную функцию рассматриваемого элемента системы

$$W(j\omega) = A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}, \tag{10}$$

если задана его амплитудно-частотная характеристика.

Используя связь

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot W(j\omega) \tag{11}$$

между Фурье-образами $Y(\omega)$ и $X(\omega)$ выходного и входного сигналов $Y(t)$ и $X(t)$ соответственно, можем записать известные соотношения [3]:

$$Y(j\omega) = \int_0^\infty Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \tag{12}$$

$$X(j\omega) = Y(j\omega)\cdot\frac{e^{-j\varphi(\omega)}}{A(\omega)}, \tag{13}$$

$$X(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re\left(X(j\omega)\right)\cdot\cos(\omega t)\ d\omega. \tag{14}$$

Соотношения (4), (10)—(14) принципиально решают поставленную задачу.

Реализация алгоритма восстановления входного сигнала. Необходимо учесть, что известные значения $Y_q(t_i)$ выходного сигнала элемента отягощены погрешностью квантования ΔY_q. Следовательно, перед использованием (12) имеющийся сигнал должен быть подвергнут фильтрации:

$$Y(t) = Y_q(t)\cdot\Phi(t), \tag{15}$$

где $\Phi(t)$ — оператор фильтра квантованного сигнала. Этот оператор может быть программно реализован с помощью сглаживающей

сплайн-аппроксимации сигнала $Y_q(t)$ [4]. Программа сплайн-аппроксимации используется также и для реализации соотношения (5).

Согласно изложенному, восстановление сигнала на входе динамического объекта может быть реализовано комплектом программ, блок-схема которого приведена на рис 2.

При известной передаточной функции элемента и заданном массиве значений выходного сигнала для решения задачи восстановления входного сигнала можно использовать и другие алгоритмы, например, основанные на решении соответствующих интегральных уравнений [5].

Блок-схема для иных возможных вариантов решения задачи восстановления будет отличаться от описанной заменой двух заключительных подпрограмм на подпрограммы, реализующие соответствующие алгоритмы восстановления.

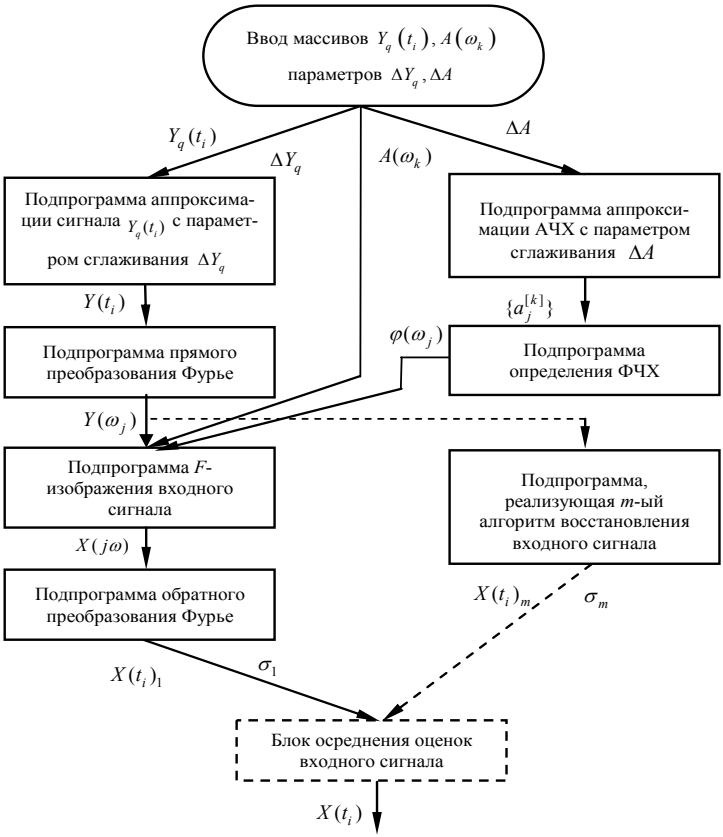

Рис. 2. *Блок-схема комплекта программ восстановления входного сигнала динамического объекта*

Оценка погрешности восстановления входного сигнала. Оценка погрешностей вычисляемых характеристик представляет собой задачу, решение которой на порядок сложнее самой задачи оценки требуемых характеристик, так как требует учета характеристик погрешностей исходных данных, оценки чувствительности алгоритмов к этим погрешностям, оценки методических погрешностей и полных вычислительных погрешностей реализации конкретных вычислительных алгоритмов. Предположим, что точность k-го алгоритма оценки входного сигнала характеризуется среднеквадратическим отклонением σ_k. Естественно при наличии нескольких (n_a) алгоритмов оценки осреднять получаемые характеристики с весами, зависящими от точности соответствующего алгоритма:

$$X = \sum_{k=1}^{n_a} w_k x_k . \tag{16}$$

В рамках линейной теории точности дисперсия комбинированной оценки (16) определяется выражением

$$D_x = \sum_{k=1}^{n_a} w_k^2 \sigma_k^2 . \tag{17}$$

Из (17) получим веса w_k, минимизирующие дисперсию D_x. Из необходимого условия

$$\frac{dD_x}{dw_k} = 2w_k \cdot \frac{dw_k}{d\sigma_k} \cdot \sigma_k^2 + w^2 \cdot 2\sigma_k = 0 \tag{18}$$

получаем

$$\frac{dw_k}{w_k} = -\frac{d\sigma_k}{\sigma_k} ,$$

откуда

$$w_k = \frac{c}{\sigma_k}. \tag{19}$$

Константа c определяется условием

$$\sum_{k=1}^{n_a} w_k = 1, \tag{20}$$

откуда

$$c = 1 \Big/ \sum_{k=1}^{n_a} \frac{1}{\sigma_k}. \tag{21}$$

Можно убедиться, что выбор весов согласно соотношению

$$w_k = 1 \Big/ \sigma_k \sum_{j=1}^{n_a} \sigma_j^{-1} \tag{22}$$

действительно минимизирует дисперсию оценки (16).

Выводы. В данной работе изложен метод, основанный на взаимосвязи фазовой и амплитудной частотных характеристик динамического объекта. Данная зависимость описывается преобразованием Гильберта и производными от него соотношениями. В процессе определения фазо-частотной характеристики использовано ее смешанное приближение функциями с постоянным наклоном и параболическими отрезками для разных диапазонов логарифмической амплитудной частотной характеристики. Сигналы на входах элементов определяются по значениям полной передаточной функции и выходных сигналов, прошедших процесс фильтрации. Структура программ восстановления входного сигнала состоит из восьми подпрограмм, в том числе подпрограммы (на рис. 2 отмечена пунктиром), реализующей осреднение оценок входного сигнала описанным способом. Способ осреднения можно применять для улучшения оценок любых характеристик, вычисляемых несколькими методами (при независимых погрешностях оценок X_j).

Список использованной литературы:

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр ; пер. с англ. — М. : Издательский дом "Вильямс", 2003. — 1104 с.
2. Гусев В. Г. Электроника / В. Г. Гусев, Ю. М. Гусев. — М. : Высшая школа, 1991. — 622 с.
3. Гольдштейн Е. И. Дискретное преобразование Фурье по коротким выборкам при наличии шумов / Е. И. Гольдштейн, Д. В. Ли // Измерительная техника. — 2004. — №4. — С. 11–14.
4. Денисенко А. Н. Компьютерная обработка информации : монография / А. Н. Денисенко. — М.: Изд-во МЕДПРАКТИКА-М, 2010. — 252 с.
5. Методы и алгоритмы восстановления сигналов и изображений / А. Ф. Верлань, И. О. Горошко, Е. Ю. Карпенко, В. Ю. Королев, Л. В. Мосенцова. — К. : ИПМЭ, 2011. — 368 с.

The article analyzes the process of reproduction of the incoming signals of the dynamical objects for a given amplitude-frequency characteristic and an array of discrete output signals. Within this task the subproblem of finding phase-frequency and complete transfer characteristics of the objects is solved. Filtering of the output signals and evaluation of the error of the input signals are provided. The way to determine the combined evaluation of the input signals is described.

Key words: *complete transfer function, phase-frequency characteristic, amplitude-frequency characteristic, approximation, evaluation.*

Отримано: 29.10.2012