УДК 364.3:61

В. П. Марценюк, д-р техн. наук,
І. Є. Андрущак, канд. техн. наук,
Н. Я. Климук, асистент

Тернопільський медичний університет
імені І. Я. Горбачевського, м. Тернопіль

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ СТРАХОВОГО МЕДИЧНОГО ПОЛІСУ В ОДНІЙ БАГАТОСТАДІЙНІЙ МОДЕЛІ

У роботі розглядається модель медичного страхування для захворювання з експоненціально розподіленим часом перебування на стадії. Визначено перехідні ймовірності, а також здійснено розрахунки ряду страхових функцій. Показано, що з кожною подальшою стадією очікувана тривалість життя зменшується, а вартість медичних послуг збільшується.

Ключові слова: *перехідні ймовірності, страхові функції, страховий поліс, премія.*

Вступ

У роботі [1] була запропонована багатостадійна модель захворювання як компартментний процес, для якого відомі закони розподілу часу перебування пацієнта на кожній із стадій. Так чотиристадійна модель захворювання має вигляд (рис. 1):

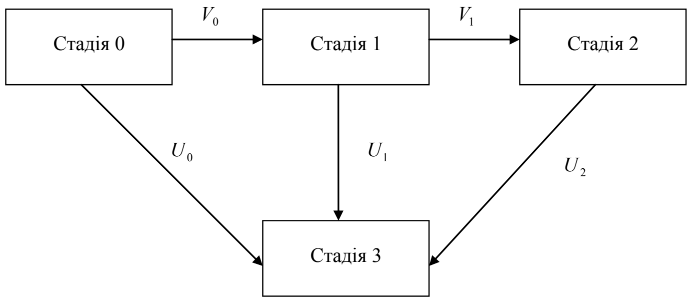

***Рис. 1.** Компартментна модель чотиристадійного захворювання*

Тут V_i, $i=\overline{0,2}$ — час перебування пацієнта на стадії i, $i=\overline{0,2}$ до моменту переходу на стадію $i+1$, $i=\overline{0,2}$; U_i — час перебування пацієнта на стадії i, $i=\overline{0,2}$ до настання смерті, тобто переходу на стадію 3. Тут з метою коректності вважаємо, що $V_2 = M$, де M — як завгодно велике значення.

З метою отримання перехідних ймовірностей та розрахунку ряду страхових функцій вводяться такі випадкові величини:

$$H_i = \min(U_i, V_i),\ i = \overline{0,2}\ ,\ W_i = U_i - V_i\ ,\ i = \overline{0,2}\ ,\ Y_{ij} = \sum_{k-1}^{j} H_k\ , i \le j = \overline{0,2}\ .$$

Звідси видно, що $W_2 < 0$, що свідчить про невідворотність настання стадії 3 після стадії 2.

Основний результат роботи [1] стверджує:

Теорема 1. Перехідні ймовірності $q_{ij}(t), i \le j = \overline{0,2}$ можуть бути розраховані у відповідності із співвідношенням:

$$q_{ij}(t) = P\{S(t) = j / S(0) = i\} = P\{W_k > 0, k = \overline{i, j-1}\} \times$$
$$\times (P\{Y_{ij} > t / W_k > 0, k = \overline{i, j-1}\} - P\{Y_{ij-1} > t / W_k > 0, k = \overline{i, j-1}\}). \quad (1)$$

В даній роботі припускаємо експоненціальний розподіл величин U_i та V_i, $i = \overline{0,2}$, а саме $U_i \sim\ Exp(\theta_i),\ i = \overline{0,2}$, $V_i \sim\ Exp(\lambda_i), i = 0,1.$

Постановка задачі

Метою роботи є визначення перехідних ймовірностей $q_{ij}(t)$ для експоненціально розподілених величин часу перебування на стадії, а також розрахунок ряду страхових функцій.

Основна частина

Розподіли $H_i, i = \overline{0,2}$. У випадку $i = 0,1$ маємо, враховуючи незалежність V_i та U_i:

$$P\{H_i > t\} = P\{U_i > t, V_i > t\} = e^{-\theta_i t}\, e^{-\lambda_i t} = e^{-(\theta_i + \lambda_i)t},$$

тобто $H_i \sim\ Exp(\theta_i + \lambda_i),\ i = 0,1.$

У випадку $i = 2$ $H_2 = U_2$ і $H_2 \sim\ Exp(\theta_2)$ відповідно.

Розподіли $W_i = \overline{0,2}.$ Для $i = 0,1$ маємо функцію щільності (при $t \ge 0$):

$$f_{W_i}(t) = f_{U_i - V_i}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_i}(s) f_{-V_i}(t-s)ds = \int_{t}^{\infty} f_{U_i}(s) f_{-V_i}(t-s)ds =$$

$$= \int_{t}^{\infty} f_{U_i}(s) f_{V_i}(s-t)ds = \int_{t}^{\infty} \theta_i e^{-\theta_i s} \lambda_i e^{-\lambda_i (s-t)} ds =$$

$$= \theta_i \lambda_i e^{\lambda_i t} \int_{t}^{\infty} e^{-(\theta_i + \lambda_i)s} ds = -\theta_i \lambda_i \frac{e^{\lambda_i t}}{\theta_i + \lambda_i} (-e^{-(\theta_i + \lambda)t}) = \frac{\theta_i \lambda_i}{\theta_i + \lambda_i} e^{-\theta_i t}.$$

Можна показати, що при $t > 0$ $f_{W_i}(t) = \dfrac{\theta_i \lambda_i}{\theta_i + \lambda_i} e^{-\lambda_i t}$.

У той же час розподіл W_2 співпадає з розподілом U_2 згідно означення.

Для застосування Теореми 1 слід обчислити ймовірності $P\{W_i > 0\}$. Маємо при $i = 0,1$

$$P\{W_i > 0\} = \int_0^\infty f_{W_i}(s)\,ds = \frac{\theta_i \lambda_i}{\theta_i + \lambda_i} \cdot \frac{1}{\theta_i} = \frac{\lambda_i}{\theta_i + \lambda_i}. \qquad (2)$$

У випадку $i = 2$ $P\{W_2 > 0\} = P\{U_2 > 0\} = 1$.

Застосовуючи формулу (1) слід обчислити $P\{W_0 > 0, W_1 > 0\}$. Використовуючи незалежність W_0 та W_1 маємо:

$$P\{W_0 > 0, W_1 > 0\} = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{(\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1)}.$$

При застосуванні (1) також будуть використовуватись наступні умовні ймовірності.

Умовні ймовірності $P\{H_i > t / W_i > 0\}$.

Маємо при $i = 0,1$:

$$P\{H_i > t, W_i > 0\} = P\{U_i > t, V_i > t, W_i > 0\} = P\{V_i > t, U_i > V_i\} =$$

$$= \int_t^\infty \int_t^u \theta_i e^{-\theta_i u} \lambda_i e^{-\lambda_i v}\, dv du = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \theta_i} e^{-(\lambda_i + \theta_i)t}.$$

Звідси, використовуючи (2) маємо:

$$P\{H_i > t / W_i > 0\} = \frac{P\{H_i > t, W_i > 0\}}{P\{W_i > 0\}} = e^{-(\lambda_i + \theta_i)t},$$

тобто бачимо, що в даному випадку H_i та W_i — незалежні.

Загальний час перебування на стадіях Y_{ij}.

У випадках $i = j$ маємо $Y_{ij} = H_i$, $i = \overline{0,2}$ і розподіли вже було попередньо обчислено.

Обчислимо:

$$f_{Y_{01}}(t) = f_{H_0 + H_1}(t) = \int_0^t f_{H_0}(t - s) f_{H_1}(s) ds =$$

$$= \int_0^t (\theta_0 + \lambda_0) e^{-(\theta_0 + \lambda_0)(s - t)} (\theta_1 + \lambda_1) e^{-(\theta_1 + \lambda_1)s} ds =$$

$$= (\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1)e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}\int_0^t e^{-(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)s}ds.$$

Тоді: $f_{Y_{01}}(t) = \dfrac{(\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1)}{(\theta_1 + \lambda_1 - \theta_0 - \lambda_0)}(-e^{-(\theta_1+\lambda_1)t} + e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}).$

Відповідно

$$P\{Y_{01} > (t)\} = \int_t^\infty f_{Y_{01}}(s)ds = \frac{(\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1)}{(\theta_1 + \lambda_1 - \theta_0 - \lambda_0)}\left(\frac{e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}}{\theta_0 + \lambda_0} - \frac{e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}}{\theta_1 + \lambda_1}\right).$$

Оскільки $Y_{02} = Y_{01} + H_2 = Y_{01} + U_2$, то

$$f_{Y_{02}}(t) = \int_0^t f_{Y_{01}}(t-s)f_{U_2}(s)ds =$$

$$= \int_0^t \frac{(\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1)}{(\theta_1 + \lambda_1 - \theta_0 - \lambda_0)}\left[e^{-(\theta_0+\lambda_0)(t-s)} - e^{-(\theta_1+\lambda_1)(t-s)}\right] \times \theta_2 e^{-\theta_2 s}ds$$

$$= \frac{(\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1)\theta_2}{(\theta_1 + \lambda_1 - \theta_0 - \lambda_0)}\left[e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}\int_0^t e^{-(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)s}ds - e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}\int_0^t e^{-(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)s}ds\right] =$$

$$= \frac{(\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1)\theta_2}{(\theta_1 + \lambda_1 - \theta_0 - \lambda_0)}\left[\frac{e^{-(\theta_0+\lambda_0)t} - e^{-\theta_2 t}}{\theta_2 - \theta_0 - \lambda_0} - \frac{e^{-(\theta_1+\lambda_1)t} - e^{-\theta_2 t}}{\theta_2 - \theta_1 - \lambda_1}\right].$$

Відповідно

$$P\{Y_{02} > (t)\} = \int_t^\infty f_{Y_{02}}(s)ds =$$

$$= \frac{(\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1)\theta_2}{(\theta_1 + \lambda_1 - \theta_0 - \lambda_0)}\left[\frac{\dfrac{e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}}{\theta_0 + \lambda_0} - \dfrac{e^{-\theta_2 t}}{\theta_2}}{\theta_2 - \theta_0 - \lambda_0} - \frac{\dfrac{e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}}{\theta_1 + \lambda_1} - \dfrac{e^{-\theta_2 t}}{\theta_2}}{\theta_2 - \theta_0 - \lambda_0}\right].$$

Далі відшукаємо:

$$f_{Y_{12}}(t) = \int_0^t f_{H_1}(t-s)f_{H_2}(s)ds = \int_0^t (\theta_1 + \lambda_1)e^{-(\theta_1+\lambda_1)(s-t)}\theta_2 e^{-\theta_2 s}ds =$$

$$= (\theta_1 + \lambda_1)\theta_2 e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}\int_0^t e^{-(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)s}ds = \frac{(\theta_1 + \lambda_1)\theta_2}{\theta_2 - \theta_1 - \lambda_1}\left[e^{-(\theta_1+\lambda_1)t} - e^{-\theta_2 t}\right].$$

Звідси: $P\{Y_{12} > (t)\} = \displaystyle\int_t^\infty f_{Y_{12}}(s)ds = \frac{\theta_2 e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}}{\theta_2 - \theta_1 - \lambda_1} - \frac{(\theta_1 + \lambda_1)e^{-\theta_2 t}}{\theta_2 - \theta_1 - \lambda_1}.$

Умовні ймовірності $P\{Y_{ij} > t / W_k > 0\}$.

Як було показано вище, H_i та W_i - незалежні випадкові величини (у випадку експоненціального розподілу U_i та V_i). Користуючись цим фактом, маємо:

$$P\{Y_{ij} > t / W_k > 0\} = P\{\sum_{l=i}^{j} H_l > t / W_k > 0\} = P\{Y_{ij} > t\}. \qquad (3)$$

Перехідні ймовірності $q_{ij}(t)$.

Використовуючи попередньо отримані результати у формулі (1) маємо:

$$q_{00}(t) = e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}, \ t > 0.$$

$$q_{01}(t) = \frac{\lambda_0}{\theta_0+\lambda_0}\left(\frac{\theta_1+\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}e^{-(\theta_0+\lambda_0)t} - \right.$$

$$\left. -\frac{\theta_0+\lambda_0}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}e^{-(\theta_1+\lambda_1)t} - e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}\right), \ t > 0.$$

$$q_{02}(t) = \frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}\left(\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}e^{-(\theta_0+\lambda_0)t} - \frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2 t}}{\theta_2-\theta_0-\lambda_0} - \frac{\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}e^{-(\theta_1+\lambda_1)t} - \frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2 t}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}\right] -$$

$$\left. -\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}\left(\frac{e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}}{\theta_0+\lambda_0} - \frac{e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}}{\theta_1+\lambda_1}\right)\right), \ t > 0.$$

$$q_{03}(t) = 1 - q_{00}(t) - q_{01}(t) - q_{02}(t), \ t > 0,$$

$$q_{11}(t) = e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}, \ t > 0,$$

$$q_{12}(t) = \frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}\left(-\frac{\theta_1+\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}e^{-\theta_2 t} + \frac{\theta_2 e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1} - e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}\right), \ t > 0,$$

$$q_{13}(t) = 1 - q_{11}(t) - q_{12}(t), \ t > 0,$$

$$q_{22}(t) = e^{-\theta_2 t}, \ t > 0,$$

$$q_{23}(t) = 1 - e^{-\theta_2 t}, \ t > 0.$$

Страхові функції

Тут ми обмежимося страховими функціями, пов'язаними із рівнем премій, очікуваних виплат і тривалістю життя. Більш детально про страхові функції описано в [2].

Виплати і премії переважно описуються в термінах одиниць \$1. Майбутня виплата в \$1 для особи, яка пережила t одиниць часу зараз вартує $\$\,e^{-\delta t}$, де δ — сила зацікавленості. Цей \$1 буде виплачений лише якщо особа виживе і буде на стадії j в момент t. Позначимо $\overline{E}_i(t)$ — поточна очікувана вартість для особи, яка зараз знаходиться на стадії i. Тоді:

$$\overline{E}_i(t) = \sum_{j=i}^{2} \text{ (поточна вартість \$1) } q_{ij}(t).$$

Звідси загальна разова премія для t-річного чистого страхування для особи на стадії моменту видачі страхового полісу становить:

$$\overline{E}_i(t) = \sum_{j=i}^{2} e^{-\delta t} q_{ij}(t).$$

Отже, підставляючи вирази для $q_{ij}(t)$ отримуємо загальні разові премії для t-річного полісу при $i = 0,1,2$:

$$\overline{E}_0(t) = e^{-\delta t}[e^{-(\theta_0+\lambda_0)t} + \frac{\lambda_0}{\theta_0+\lambda_0}(\frac{\theta_1+\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}e^{-(\theta_0+\lambda_0)t} -$$

$$-\frac{\theta_0+\lambda_0}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}e^{-(\theta_1+\lambda_1)t} - e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}) + \frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}(\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}$$

$$\times[\frac{\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}e^{-(\theta_0+\lambda_0)t} - \frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2}}{\theta_2-\theta_0-\lambda_0} - \frac{\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}e^{-(\theta_1+\lambda_1)t} - \frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}] -$$

$$-\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}(\frac{e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}}{\theta_0+\lambda_0} - \frac{e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}}{\theta_1+\lambda_1}))],$$

$$\overline{E}_1(t) = e^{-\delta t}[q_{11}^{(t)} + q_{12}^{(t)}] = e^{-\delta t}[e^{-(\theta_1+\lambda_1)t} +$$

$$+\frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}(-\frac{\theta_1+\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}e^{-\theta t} + \frac{\theta_2 e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1} - e^{-(\theta_1+\lambda_1)t})].$$

$$\overline{E}_2(t) = e^{-\delta t}q_{22}(t) = e^{-\delta t}\cdot e^{-\theta_2 t} = e^{-(\delta+\theta_2)t}.$$

Поліс з неперервним ануітетом на t років життя.

Страховий поліс з неперервним ануітетом на t років для особи, яка знаходиться на стадії i, має вартість:

$$\overline{a}_i(t) = \sum_{j=i}^{2}\int_0^t e^{-\delta s} q_{ij}(s)ds.$$

Це можна переписати як:

$$\overline{a}_i(t)=\sum_{j=i}^{2}\int_0^t Q_{ij}^*(t),\ \text{де}\ Q_{ij}^*(t)=\int_0^t e^{-\delta s}q_{ij}(s)ds,\ \ i\le j\le 2.$$

Маємо наступні вирази для $Q_{ij}^*(t)$:

$$Q_{00}^*(t)=\int_0^t e^{-\delta s}e^{-(\theta_0+\lambda_0)s}ds=-\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1);$$

$$Q_{01}^*(t)=\int_0^t e^{-\delta s}q_{01}(s)ds=\int_0^t e^{-\delta s}\frac{\lambda_0}{\theta_0+\lambda_0}(\frac{\theta_1+\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}e^{-(\theta_0+\lambda_0)s}-$$

$$-\frac{\theta_0+\lambda_0}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}e^{-(\theta_1+\lambda_1)s}-e^{-(\theta_0+\lambda_0)s})ds=-\frac{\lambda_0(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}\times$$

$$\times\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+\frac{\lambda_0}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0}{\theta_0-\lambda_0}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}\cdot(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1).$$

$$Q_{02}^*(t)=\int_0^t e^{-\delta s}q_{02}(s)ds=\int_0^t e^{-\delta s}\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}(\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}\times$$

$$\times[\frac{\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}e^{-(\theta_0+\lambda_0)s}-\frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2 s}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_0}-\frac{\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}e^{-(\theta_1+\lambda_1)s}-\frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2 s}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}]-\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}\times$$

$$\times(\frac{e^{-(\theta_0+\lambda_0)s}}{\theta_0+\lambda_0}-\frac{e^{-(\theta_1+\lambda_1)s}}{\theta_1+\lambda_1}ds=-\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)}\times$$

$$\times\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)}\times$$

$$\times\frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)+\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\times$$

$$\times\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}\times(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_2)}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_0+\lambda_0)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_0+\lambda_0)}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_1+\lambda_1)}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1).$$

$$Q_{11}^*(t)=\int_0^t e^{-\delta s}q_{11}(s)ds=\int_0^t e^{-\delta s}e^{-(\theta_1+\lambda_1)s}=-\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1);$$

$$Q_{12}^*(t)=\int_0^t e^{-\delta s}q_{12}(s)ds=\int_0^t e^{-\delta s}\,\frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}(-\frac{\theta_1+\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}e^{-\theta_2 s}+$$

$$+\frac{\theta_2 e^{-(\theta_1+\lambda_1)s}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}-e^{-(\theta_1+\lambda_1)s})ds=\frac{\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_1\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1).$$

$$Q_{22}^*(t)=\int_0^t e^{-\delta s}q_{22}(s)ds=\int_0^t e^{-\delta s}e^{-\theta_2 s}ds=-\frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1);$$

Звідси маємо:

$$\overline{a_0}(t)=\overline{Q}_{00}(t)+\overline{Q}_{01}(t)+\overline{Q}_{02}(t)=-\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+$$

$$+-\frac{\lambda_0(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)+\frac{\lambda_0}{\theta_0-\lambda_0}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}\times$$

$$\times(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+-\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}\times(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_2)}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_0+\lambda_0)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_0+\lambda_0)}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_1+\lambda_1)}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1).$$

$$\overline{a_1}(t)=\overline{Q}_{11}(t)+\overline{Q}_{12}(t)=-\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_1\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1).$$

$$\overline{a_2}(t)=\overline{Q}_{22}(t)=-\frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)\ .$$

Загальна разова премія для такого страхового полісу з неперервним t-річним ануітетом може бути розрахована як:

$$\overline{A}_i(t)=\sum_{j=i}^{2}\int_0^t\theta_j'\int_0^t e^{-\delta s}q_{ij}(s)ds=\sum_{j=i}^{2}\theta_j'Q_{ij}'(t),$$

де θ_j' — параметр смертності для особи на стадії j, тобто $\theta_j'=\theta_j$. Отже, премія, яка необхідна для особи, яка знаходиться на стадії $i=0,1,2$, становить:

$$\overline{A_0}(t)=\theta_0Q_{00}^*(t)+\theta_1Q_{01}^*(t)+\theta_2Q_{02}^*(t)=\theta_0(-\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1))+$$

$$+\theta_1(-\frac{\lambda_0(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)+\frac{\lambda_0}{\theta_0-\lambda_0}\times$$

$$\times\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}\cdot(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1))+$$

$$+\theta_2(-\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\dfrac{1}{\theta_1+\lambda_1}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}\times(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_2)}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_0+\lambda_0)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_0+\lambda_0)}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_1+\lambda_1)}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)).$$

$$\overline{A_1}(t)=\theta_1 Q_{11}^*(t)+\theta_2 Q_{12}^*(t)=\theta_1(-\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1))+$$

$$+\theta_2(\frac{\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_1\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1).$$

$$\overline{A_2}(t)=\theta_2 Q_{22}^*(t)=\theta_2(-\frac{1}{\delta+\theta_2+\lambda_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1))=$$

$$=-\frac{\theta_2}{\delta+\theta_2+\lambda_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1).$$

Можна показати, що справедливе співвідношення:

$$\overline{A}_i(t)=1-\delta\overline{a}_i(t),\ t>0,\ i=\overline{0,2}.$$

І накінець отримуємо загальну неперервну сплачувану премію за одиницю часу для t-річного страхового полісу з неперервним ануїтетом для особи, що перебуває на стадії i в момент видачі полісу:

$$\overline{P}_i(t)=\frac{\overline{A}_i(t)}{\overline{a}_i(t)}.$$

Отже, на основі вартості виплаченого полісу $\overline{a}_i(t)$ та загального (разового) розміру премії $\overline{A}_i(t)$ маємо розрахунок по часу неперервно сплачуваної премії $\overline{P}_i(t)$ для особи, яка перебувала на стадії i в момент отримання полісу. Бачимо, що справедливе співвідношення:

$$\overline{P}_i(t)=\frac{1}{\overline{a}_i(t)}-\delta.$$

Страхові компанії особливо зацікавлені в довготривалому страхуванні, тобто інтерес викликають значення $\overline{a}_i(t)$, $\overline{A}_i(t)$, $\overline{P}_i(t)$ при $t \to \infty$. Отже, якщо ми покладемо

$$\overline{a}_i(\infty) = \lim_{t\to\infty} \overline{a}_i(t),\ \overline{A}_i(\infty) = \lim_{t\to\infty} \overline{A}_i(t),\ \overline{P}_i(\infty) = \lim_{t\to\infty} \overline{P}_i(t),$$

то маємо:

$$\overline{a}_0(\infty) = \frac{1}{\delta + \theta_0 + \lambda_0},\ \overline{a}_1(\infty) = \frac{1}{\delta + \theta_1 + \lambda_1},$$

$$\overline{a}_2(\infty) = \frac{1}{\delta + \theta_2},\ \overline{A}_0(\infty) = \frac{\theta_0}{\delta + \theta_0 + \lambda_0},$$

$$\overline{A}_1(\infty) = \frac{\theta_1}{\delta + \theta_1 + \lambda_1},\ \overline{A}_2(\infty) = \frac{\theta_2}{\delta + \theta_2},$$

$$\overline{P}_0(\infty) = \frac{1}{\overline{a}_0(\infty)} - \delta = \delta + \theta_0 + \lambda_0 - \delta = \theta_0 + \lambda_0,$$

$$\overline{P}_1(\infty) = \frac{1}{\overline{a}_1(\infty)} - \delta = \delta + \theta_1 + \lambda_1 - \delta = \theta_1 + \lambda_1,$$

$$\overline{P}_2(\infty) = \frac{1}{\overline{a}_2(\infty)} - \delta = \delta + \theta_2 + \lambda_2 - \delta = \theta_2 + \lambda_2.$$

Очікування тривалості життя

Очікування тривалості життя для особи на стадії i становить

$$e_i = \sum_{j=i}^{2} \theta_j' \int_0^\infty t q_{ij}(t)dt = \sum_{j=i}^{2} \theta_j \int_0^\infty t q_{ij}(t)dt = \sum_{j=i}^{2} \theta_j Q_{ij}\text{, де } Q_{ij} = \int_0^\infty t q_{ij}(t)dt.$$

Обчислимо для $i \le j \le 2$:

$$Q_{00} = \int_0^\infty t q_{00}(t)dt = \int_0^\infty t e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}dt = \int_0^\infty t \frac{1}{-(\theta_0+\lambda_0)} d(e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}) =$$

$$= -\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}\left(\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}(-1)\right) = \frac{1}{(\theta_0+\lambda_0)^2}.$$

$$Q_{01} = \int_0^\infty t q_{01}(t)dt = \int_0^\infty t \frac{\lambda_0}{\theta_0+\lambda_0}\Big(\frac{\theta_1+\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0} e^{-(\theta_0+\lambda_0)t} \times$$

$$\times \frac{\theta_0+\lambda_0}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0} - e^{-(\theta_1+\lambda_1)t} - e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}\Big)dt =$$

$$= \frac{\lambda_0(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_0+\lambda_0)^3(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)} - \frac{\lambda_0(\theta_0+\lambda_0)}{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)^2} -$$

$$-\frac{\lambda_0}{(\theta_0+\lambda_0)^3}=\frac{\lambda_0(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_0+\lambda_0)^3(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}-$$

$$-\frac{\lambda_0}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)^2}-\frac{\lambda_0}{(\theta_0+\lambda_0)^3}.$$

$$Q_{02}=\int_0^\infty tq_{02}(t)dt=\int_0^\infty t\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}(\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)\theta_2}{\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0}\times$$

$$\times[\frac{\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}e^{-(\theta_0+\lambda_0)s}-\frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2 s}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_0}-\frac{\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}e^{-(\theta_1+\lambda_1)s}-\frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2 s}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}]-$$

$$-\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}(\frac{e^{-(\theta_0+\lambda_0)t}}{\theta_0+\lambda_0}-\frac{e^{-(\theta_1+\lambda_1)t}}{\theta_1+\lambda_1}))dt=$$

$$=\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)(\theta_0+\lambda_0)^3}-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)\theta_2^3}-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)(\theta_1+\lambda_1)^3}+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)\theta_2^3}-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_0+\lambda_0)^3}+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)^3}.$$

$$Q_{11}=\int_0^\infty tq_{11}(t)dt=\int_0^\infty te^{-(\theta_1+\lambda_1)t}dt=-\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}(\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}(-1))=\frac{1}{(\theta_1+\lambda_1)^2}.$$

$$Q_{12}=\int_0^\infty tq_{12}(t)dt=\int_0^\infty t\frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}(-\frac{\theta_1+\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}e^{-\theta_2 t}+\frac{\theta_2 e^{-(\theta_1+\lambda_1)}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}-e^{-(\theta_1+\lambda_1)}t)dt=$$

$$=-\frac{\lambda_1}{(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)(\theta_2)^2}+\frac{\lambda_1\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1)^3(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}+\frac{\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1)^3}.$$

$$Q_{22}=\int_0^\infty tq_{22}(t)dt=\int_0^\infty te^{-(\theta_2)t}dt=-\frac{1}{\theta_2}(\frac{1}{\theta_2}(-1))=\frac{1}{\theta_2{}^2}.$$

Звідси маємо:

$$e_0=\theta_0 Q_{00}+\theta_1 Q_{01}+\theta_2 Q_{02}=\frac{\theta_0}{(\theta_0+\lambda_0)^2}+\frac{\theta_1(\theta_0+\lambda_0+\theta_1+\lambda_1)\lambda_0}{(\theta_1+\lambda_1)^2(\theta_0+\lambda_0)^2}+$$

$$+\frac{\theta_2(\theta_0\theta_1+\theta_0\lambda_1+\theta_0\theta_2+\lambda_0\theta_1+\theta_2\theta_1+\lambda_0\lambda_1+\theta_2\lambda_1+\lambda_0\theta_2)\lambda_0\lambda_1}{(\theta_0+\lambda_0)^3(\theta_1+\lambda_1)\theta_2{}^2}.$$

$$e_1=\theta_1 Q_{11}+\theta_2 Q_{12}=\frac{\theta_1}{(\theta_1+\lambda_1)}+\frac{\lambda_1(\theta_1+\lambda_1+\theta_2)}{\theta_2(\theta_1+\lambda_1)^2}.\ \ e_2=\theta_2 Q_2=\frac{\theta_2}{\theta_2{}^2}.$$

Вартість медичних послуг

Очевидно, що параметри страхового полісу повинні випливати з вартості медичних послуг, які будуть надаватися. Так вартість t-річного полісу з неперервним ануїтетом $\bar{a}_i(t)$ повинна відповідати очікуваній вартості медичних послуг для особи, яка знаходиться в даний час на стадії i беручи до уваги вартість \$1 в майбутньому. Так, наприклад, вартість медичних послуг для особи, яка зараз знаходиться на стадії $i = 0,1,$ яка впродовж часу $(0,t)$ переходить на завершальну стадію 2 може бути обчислена як:

$$H(t,i) = \int_0^t (c_{1i} + c_{2i}e^{h_i s})e^{-\delta s} q_{i2}(s)ds,$$

де c_{1s}, c_{2s}, h_1 — додатні сталі, c_{1i} — деяка фіксована вартість медичних послуг для стадії i (наприклад, вартість основного лікування), $c_2 e^{h_i s}, (0 < s < t)$ — змінна вартість лікування, яка визначається початковою стадією i та часом s, $e^{-\delta s}$ — множник для дисконтної вартості \$1.

Отже, маємо:

$$\times[\frac{\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}e^{-(\theta_0+\lambda_0)s} - \frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2 s}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_0} - \frac{\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}e^{-(\theta_1+\lambda_1)s} - \frac{1}{\theta_2}e^{-\theta_2 s}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}] -$$

$$-\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)} \times (\frac{e^{-(\theta_0+\lambda_0)s}}{\theta_0+\lambda_0} - \frac{e^{-(\theta_1+\lambda_1)s}}{\theta_1+\lambda_1} ds =$$

$$= c_{10}(-\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)} \cdot \frac{1}{\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1) +$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)} \cdot \frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1) +$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)} \cdot \frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1} \times (e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1) -$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)} \cdot \frac{1}{(\delta+\theta_2)}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1) +$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_0+\lambda_0)} \cdot \frac{1}{(\delta+\theta_0+\lambda_0)}(e^{-(\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1) -$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}\cdot\frac{1}{(\delta+\theta_1+\lambda_1)}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1))+$$

$$H(t,0)=\int_0^t(c_{10}+c_{20}e^{h_0 s})e^{-\delta s}q_{02}(s)ds=$$

$$=\int_0^t(c_{10}+c_{20}e^{h_0 s})e^{-\delta s}\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}(\frac{(\theta_0+\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)}\times$$

$$+c_{20}(-\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\frac{1}{\theta_0+\lambda_0}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)}\cdot\frac{1}{h_0-\delta+\theta_0+\lambda_0}(e^{-(h_0-\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_0-\lambda_0)}\cdot\frac{1}{h_0-\delta+\theta_2}(e^{-(h_0-\delta+\theta_2)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1\theta_2\frac{1}{\theta_1+\lambda_1}}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{h_0-\delta+\theta_1+\lambda_1}\times(e^{-(h_0-\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{(h_0-\delta+\theta_2)}(e^{-(h_0-\delta+\theta_2)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_0+\lambda_0)}\cdot\frac{1}{(h_0-\delta+\theta_0+\lambda_0)}(e^{-(h_0-\delta+\theta_0+\lambda_0)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_0\lambda_1}{(\theta_1+\lambda_1-\theta_0-\lambda_0)(\theta_1+\lambda_1)}\cdot\frac{1}{(h_0-\delta+\theta_1+\lambda_1)}(e^{-(h_0-\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)).$$

$$H(t,1)=\int_0^t(c_{11}+c_{21}e^{h_1 s})e^{-\delta s}q_{12}(s)ds=\int_0^t(c_{11}+c_{21}e^{h_1 s})e^{-\delta s}\times$$

$$\times\frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}(-\frac{\theta_1+\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}e^{-\theta_2 s}+\frac{\theta_2 e^{-(\theta_1+\lambda_1)s}}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}-e^{-(\theta_1+\lambda_1)s})ds=$$

$$=c_{11}(\frac{\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_2}(e^{-(\delta+\theta_2)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_1\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}\cdot\frac{1}{\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1))+$$

$$+c_{21}(\frac{\lambda_1}{\theta_2-\theta_1-\lambda_1}\cdot\frac{1}{h_1-\delta+\theta_2}(e^{-(h_1-\delta+\theta_2)t}-1)-$$

$$-\frac{\lambda_1\theta_2}{(\theta_1+\lambda_1)(\theta_2-\theta_1-\lambda_1)}\cdot\frac{1}{h_1-\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(h_1-\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\theta_1+\lambda_1}\cdot\frac{1}{h_1-\delta+\theta_1+\lambda_1}(e^{-(h_1-\delta+\theta_1+\lambda_1)t}-1)).$$

$$H(t,2)=\int_0^t(c_{12}+c_{22}e^{h_2 s})e^{-\delta s}q_{22}(s)ds=\int_0^t(c_{12}+c_{22}e^{h_2 s})e^{-\delta s}e^{-(\theta_2+\lambda_2)s})ds=$$

$$=\frac{c_{22}}{h_2-\delta-\theta_2-\lambda_2}(e^{(h_2-\delta-\theta_2-\lambda_2)t}-1)-\frac{c_{12}}{\delta+\theta_2+\lambda_2}(e^{-(\delta+\theta_2+\lambda_2)t}-1).$$

Чисельний приклад. В якості багатостадійного захворювання розглянемо рак легень. В цьому випадку вважатимемо, що стадія 0 відповідає раннім стадіям захворювання Т1 та Т2. Стадія 1 відповідає стадії Т3, стадія 2 відповідає стадії Т4. Статистичні дані Національного інституту раку (США) свідчать про такі значення параметрів $\theta_1=\frac{1}{15},\theta_2=\frac{1}{8}$. Інші значення параметрів визначатимемо експериментально, а саме:

$$\theta_0=\frac{1}{16},\lambda_0=\frac{1}{8},\lambda_1=\frac{1}{6},\ \delta=0.0098.$$

Отримано такі перехідні ймовірності:

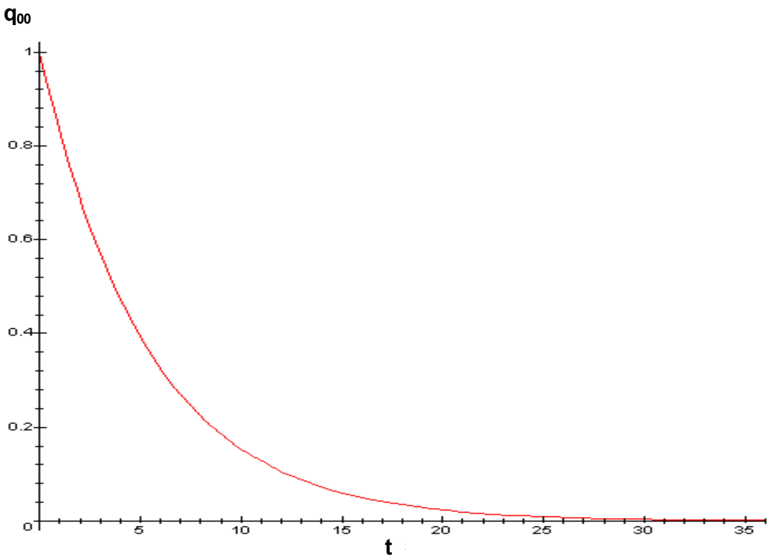

Рис. 2. $q_{00}(t)=e^{(-3/16t)}$

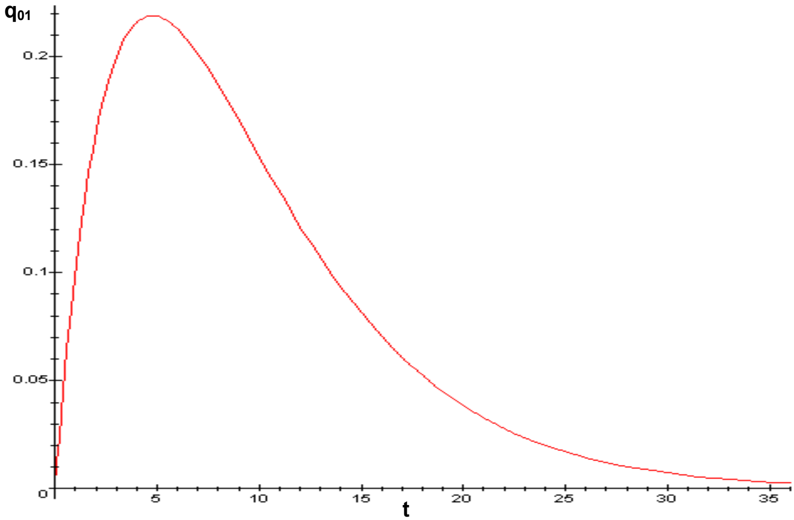

Рис. 3. $q_{01}(t) = \dfrac{30}{11} e^{(-3/16t)} - \dfrac{30}{11} e^{(-7/30t)}$

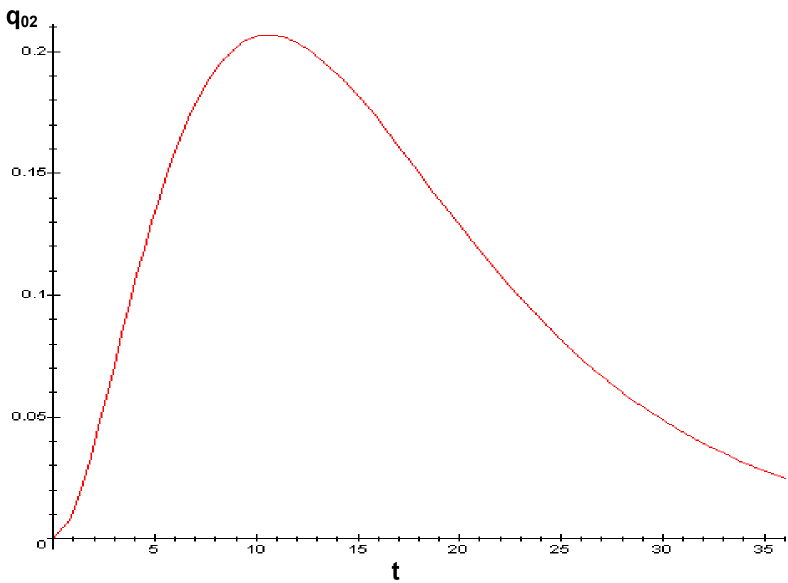

Рис. 4. $q_{02}(t) = \dfrac{896}{1199} e^{(-3/16t)} + \dfrac{448}{117} e^{(-1/8t)} + \dfrac{2240}{429} e^{(-7/30t)}$

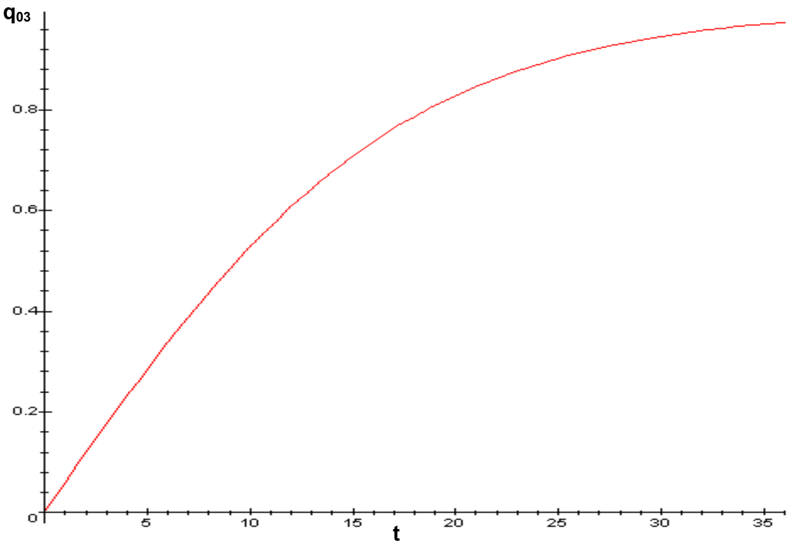

Рис. 5. $q_{03}(t) = 1 + \dfrac{1329}{55} e^{(-\frac{11}{48}t)} - \dfrac{3240}{143} e^{(-7/30t)} - \dfrac{1792}{715} e^{(-1/8t)}$

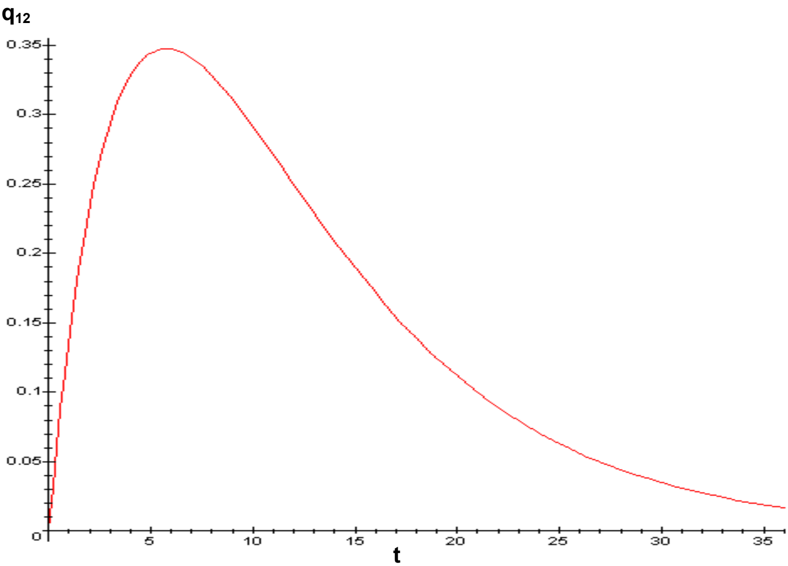

Рис. 6. $q_{12}(t) = -\dfrac{20}{13} e^{(-7/30t)} + \dfrac{20}{13} e^{(-1/8t)}$

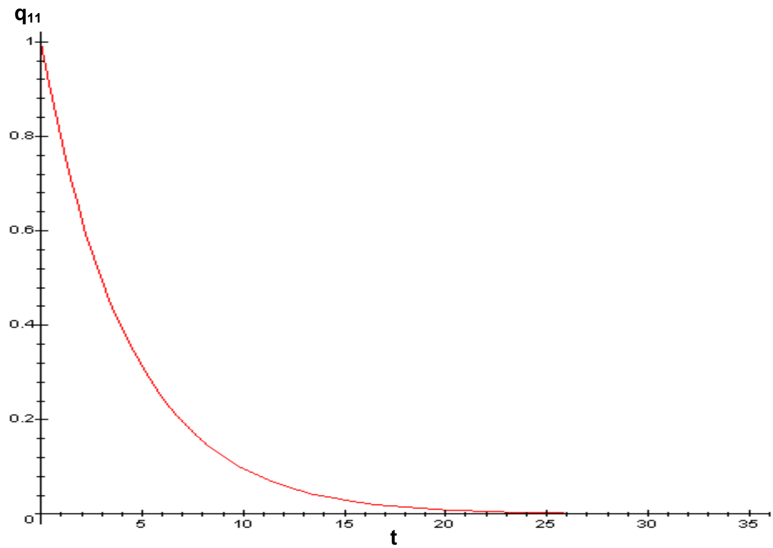

Рис. 7. $q_{11}(t) = e^{(-7/30t)}$

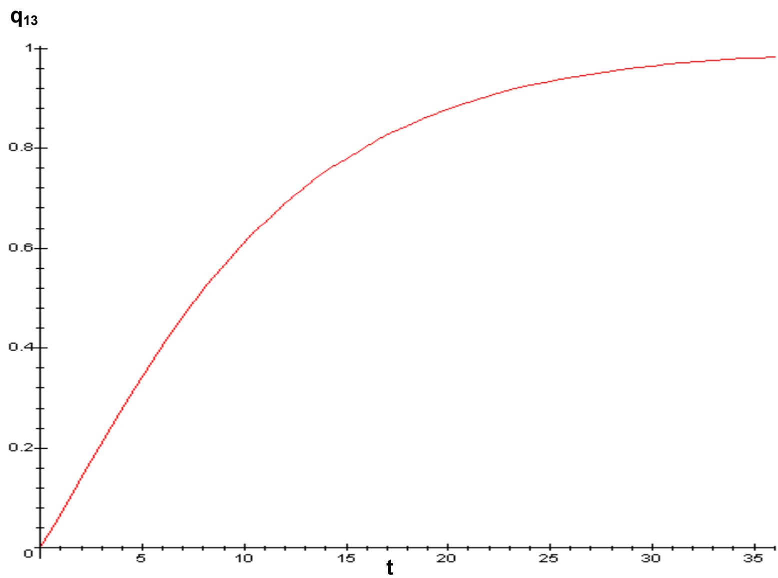

Рис. 8. $q_{13}(t) = 1 + \dfrac{7}{13}e^{(-7/30t)} - \dfrac{20}{13}e^{(-1/8t)}$

Отримано такі вирази для функцій страхових премій.

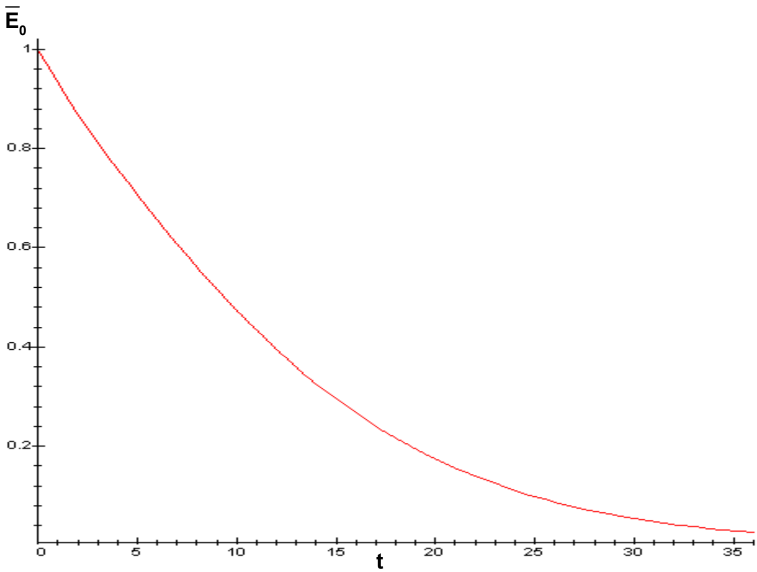

Рис. 9. $\overline{E}_0(t) = e^{(-.0098t)}\left(-\frac{527}{99}e^{(-3/16t)} + \frac{1070}{429}e^{(-7/30t)} + \frac{448}{117}e^{(-1/8t)}\right)$

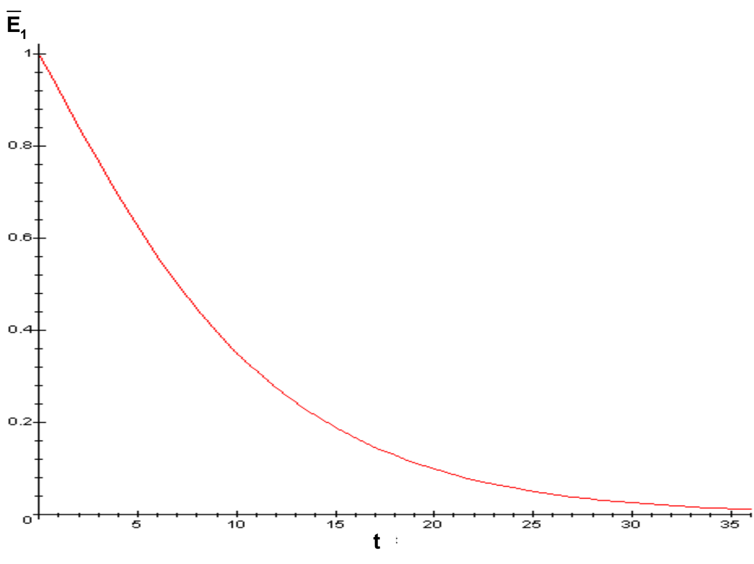

Рис. 10. $\overline{E}_1(t) = e^{(-.0098t)}\left(-\frac{7}{13}e^{(-7/30t)} + \frac{20}{13}e^{(-1/8t)}\right)$

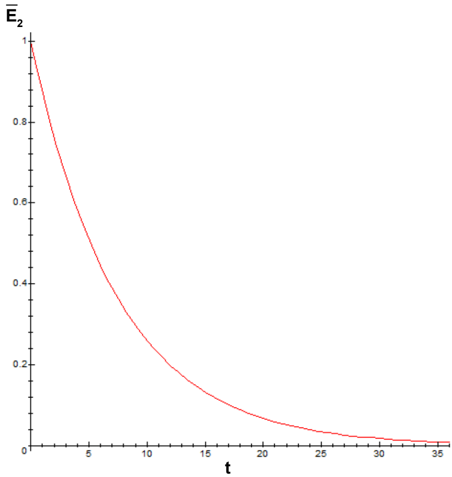

Рис. 11. $\overline{E}_2(t) = e^{-0.1348t}$

В такому випадку отримано такі значення для очікуваної тривалості життя: $e_0 = 14$ місяців, $e_1 = 10$ місяців, $e_2 = 8$ місяців. Видно, що очікувана тривалість життя зменшується з кожною подальшою стадією.

Проведено розрахунки вартості лікування для таких значень параметрів:

- фіксована вартість медичних послуг на стадіях: для стадії 0 $c_{10} = \$500$, для стадії 1 $c_{11} = \$600$, для стадії 2 $c_{12} = \$800$.
- змінна вартість лікування: для стадії 0 $c_{20} = \$50$, для стадії 1 $c_{21} = \$70$, для стадії 2 $c_{22} = \$90$. На рисунку 12 представлено зміни вартості лікування по стадіях з часом.

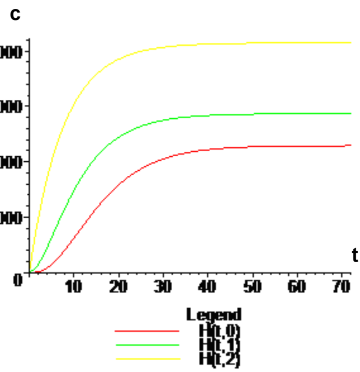

Рис. 12.

Видно, що з часом вартість лікування прагне до деякого сталого значення, при цьому на кожній подальшій стадії вартість лікування зростає.

Висновки

Отже, в роботі запропоновано визначення перехідних ймовірностей для експоненціально розподілених величин часу перебування на стадії, а також розрахунки страхових функцій пов'язаних із рівнем премії, очікуваних виплат і тривалістю життя.

Перспективами даного дослідження бачиться розгляд розподілу Гомперца для часу перебування на стадії захворювання, що більш притаманно саме онкологічним захворюванням.

Список використаних джерел:

1. Марценюк В. П. Модель багатостадійного захворювання для задач медичного страхування / В. П. Марценюк, Н. Я. Климук // Журнал "Штучний інтелект". — 2012. — №1.
2. Actuarial Mathematics / N. L. Bowers, H. U. G. H. Yerber, J. C. Hickman, D. A. Y. Jones, C. J. Nesbitt. — 2-rd ed. — Schaumbury Illionis : The Society of Actuaries, 1997.

In this paper the model of health insurance for illness with exponentially distributed time stay of the stage. Determined the transition probabilities and calculations by a number of insurance functions. It is shown that with each subsequent stage of life expectancy zmenshuyetsya and the cost of health care increases.

Key words: *transition probabilities, insurance functions, insurance policy premium.*

Отримано: 22.10.2012