УДК 519.6

Л. В. Мосенцова, младший научный сотрудник

Физико-технологический институт
металлов и сплавов НАН Украины, г. Киев

ПРИМЕНЕНИЕ В-СПЛАЙНОВЫХ ВЕЙВЛЕТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА-ГАММЕРШТЕЙНА II РОДА В СРЕДЕ MATLAB

Работа посвящена решению нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Гаммерштейна II рода с применением В-сплайновых вейвлетов и метода Ньютона в среде Matlab.

Ключевые слова: *нелинейные интегральные уравнения, регуляризация, В-сплайновые вейвлеты, метод Ньютона, Matlab.*

Введение. Проблема решения нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма II рода является одной из старейших проблем в литературе прикладной математики. Для данного класса задач исследован ряд методов решения нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма II рода [1—3]. Особое место занимают аппроксимационные методы, среди которых наиболее популярным является метод квадратур, простой в реализации, однако данный метод не позволяет получить высокую точность решения нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма II рода.

Рассмотрим аппроксимационный метод, основанный на применении линейных полуортогональных В-сплайновых вейвлетов [4] с компактным носителем, построенных на ограниченном интервале для решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Гаммерштейна II рода

$$y(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t) g\left[t, y(t)\right] dt,\ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

где f, g и K задаются непрерывными функциями, с $g(t,y)$ нелинейной по y.

Произвольная функция $u(x)$, определенная на [0,1], может быть представлена с помощью В-сплайновых вейвлетов следующим образом:

$$u\left(x\right) = \sum_{k=-1}^{3} c_k \varphi_{2,k} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=-1}^{2^{(i-1)}} d_{i,j} \psi_{i,j}, \tag{2}$$

где $\varphi_{2,k}$ и $\psi_{i,j}$ — функции масштабирования и вейвлет — функции соответственно. Если бесконечную последовательность в (2) усечь, то (2) может быть записано так

$$u\left(x\right) = \sum_{k=-1}^{3} c_k \varphi_{2,k} + \sum_{i=2}^{M} \sum_{j=-1}^{2^{(i-1)}} d_{i,j} \psi_{i,j} = C^T \Psi, \tag{3}$$

где C и Ψ являются векторами размерности $2^{(M+1)}+1$, задаваемые следующим образом

$$C=\left[c_{-1},...,c_3,d_{2,-1},...,d_{2,2},...,d_{3,6,},...d_{M,-1},...,d_{M,2^{(M-1)}}\right]^T, \qquad (4)$$

$$\Psi=\left[\varphi_{2,-1},...,\varphi_{2,3},\psi_{2,-1},...,\psi_{3,-1},...,\psi_{3,6,},...\psi_{M,-1},...,\psi_{M,2^{(M-1)}}\right]^T, \qquad (5)$$

где

$$c_k=\int_0^1 f(x)\bar{\varphi}_{2,k}(x)dx,\ k=-1,0,...,3,$$

$$d_{i,j}=\int_0^1 f(x)\bar{\psi}_{i,j}(x)dx,\ i=2,3,...,M,\ \ j=-1,0,1,...,2^{(i-1)},$$

где $\bar{\varphi}_{2,k}(x)$ и $\bar{\psi}_{i,j}(x)$ являются двойственными функциями для $\varphi_{2,k}(x)$ и $\psi_{i,j}(x)$. Они получаются линейной комбинацией $\varphi_{2,k}(x)$, $k=-1,...,3$ и $\psi_{i,j}(x)$, $i=2,\ ...\ ,M,\ j=-1,\ ...,\ 2^{(M-1)}$.

Чтобы применить B-сплайновые вейвлеты для решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Гаммерштейна вида (1) введем замену

$$z(x)=g(x,y(x)),\ 0\le x\le 1. \qquad (6)$$

Представим $y(x)$ и $z(x)$ в виде (3)

$$y(x)=D^T\Psi(x),\ z(x)=E^T\Psi(x), \qquad (7)$$

где $\Psi(x)$ находится из (5) , а D и E — неизвестные векторы размерности ($2^{(M+1)}$ + 1) × 1, определяемые аналогично вектору C в (4). Также представляем $f(x)$, $K(x,t)$ в виде двойственных B-сплайновых вейвлетов $\tilde{\Psi}$

$$f(x)=\Lambda^T\tilde{\Psi}(x),\ K(x,t)=\tilde{\Psi}^T(t)\Theta\tilde{\Psi}(x), \qquad (8)$$

где

$$\Theta_{i,j}=\int_0^1\left[\int_0^1 K(x,t)\Psi_i(t)dt\right]\Psi_j(x)dx.$$

Из (6), (7) и (8) получаем

$$\begin{aligned}\int_0^1 K(x,t)g(t,y(t))dt &= \int_0^1 E^T\Psi(t)\tilde{\Psi}^T(t)\Theta\tilde{\Psi}(x)dt = \\ &= E^T\left[\int_0^1\Psi(t)\tilde{\Psi}^T(t)dt\right]\Theta\tilde{\Psi}(x)=E^T\Theta\tilde{\Psi}(x).\end{aligned} \qquad (9)$$

Подставляя (6)—(9) в (1), имеем

$$D^T\Psi(x)-\Lambda^T\tilde{\Psi}(x)-E^T\Theta\tilde{\Psi}(x)=0\,, \tag{10}$$

умножая (10) на $\Psi^T(x)$ и интегрируя от 0 до 1, имеем

$$D^TP-\Lambda^T-E^T\Theta=0\,, \tag{11}$$

в котором P — квадратная матрица ($2^{(M+1)}+1)\times(2^{(M+1)}+1)$, задаваемая так:

$$P=\int_0^1\Psi(x)\Psi^T(x)dx=\begin{bmatrix}P_1 & \\ & P_2\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Чтобы найти решение $y(x)$ из (7), вначале вычислим следующие уравнения в точках $x_i=i/2^{M+1}$, $i=0,1,...,2^{M+1}$:

$$g(x,D^T\Psi(x))=E^T\Psi(x). \tag{13}$$

Уравнение (11) сводится к системе $2(M+1)+1$ алгебраических уравнений. Общее число неизвестных для векторов D и E в (7) равно $2\,[2\,(M+1)+1]$. Они могут быть получены с помощью (11) и (13).

Для решения нелинейной системы в качестве базового применяется метод Ньютона

$$y_n^{k+1}=y_n^k-\left[F'\left[y_n^k\right]\right]^{-1}\left(F\left(y_n^k\right)\right)\equiv T\left(y_n^k\right), \tag{14}$$

где $F\left[y_n^k\right]=A_n(y_n)+\alpha(y_n)-f_n$.

На основе (14) рассматривается итерационная схема

$$y_n^{k+1}=\gamma_{k+1}U\left(y_n^k\right)+\left(1-\gamma_{k+1}\right)v_0,\ \ k=0,1,..., \tag{15}$$

где $U=0,5I+0,5T$, . $0<\gamma_k<1$, T — оператор шага в методе Ньютона (14). Переход от оператора T к U обусловлен лучшим свойством сжимаемости оператора U .

Программа nleFreU2B-spline. На основе предложенного метода была разработана программа в среде Matlab. Программа nleFreU2B-spline предназначена для решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Гаммерштейна II рода с ядрами общего вида. Входными данными программы являются: *a*, *b*, *K*, *f*, *y0, M, E, count_max*, где *a* — начало отрезка интегрирования, *b* — конец отрезка интегрирования, *K* — ядро интегрального уравнения, *f* — правая часть интегрального уравнения, *y0* — начальное значение *y*, *M* — параметр, указывающий, какой порядок B-сплайна используется, *E* — точность решения, *count_max* – максимальное количество итераций.

Возможные интерфейсы программы:

[y,x]= nleFredU2quad (a, b, K, f).
[y,x]= nleFredU2quad (a, b, K, f, y0).
[y,x]= nleFredU2quad (a, b, K, f, y0, count_max).
[y,x]= nleFredU2quad (a, b, h, K, f, y0, count_max, E).
[y,x]= nleFredU2quad (a, b, h, K ,f, y0, count_max, E, M).

Работа программы сводится к выполнению следующего алгоритма:

1. Проверяется число входных параметров. В зависимости от количества параметров выбирается соответствующий интерфейс функции, при условии, что параметры заданы корректно. В случае, если какой-либо из дополнительных параметров не задан, используется значение параметра по умолчанию.
2. Проверяется корректность заданных параметров: должна соответствовать размерность, тип данных. Если была допущена ошибка, то наступает прерывание программы, и выдается сообщение, идентифицирующее ошибку.
3. Задаются с помощью определенной функции Kern значения ядра.
4. Задаются с помощью определенной функции Right значения правой части.
5. Решается система нелинейных уравнений, причем если System=1, то вызывается функция solt_system, реализующая метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.
6. Программа завершает работу. Возвращаются вектор приближенного решения искомой функции, число итераций, при котором программа закончила свою работу, значение поправки.

В результате работы программы возвращаются вектор ординат x и вектор значений искомой функции y размерности $[n]$, где n — длина вектора x.

Модельный пример. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Фредгольма-Гаммерштейна II рода

$$u(x) = 1 - x + \int_0^1 \left[xe^{s(x-2s)} + e^{-2s^2} \right] u^2(s) ds \,, \qquad (16)$$

с точным решением $u(x) = e^{x^2}$.

Графики решения, абсолютной и относительной ошибки представлены на рис. 1—3.

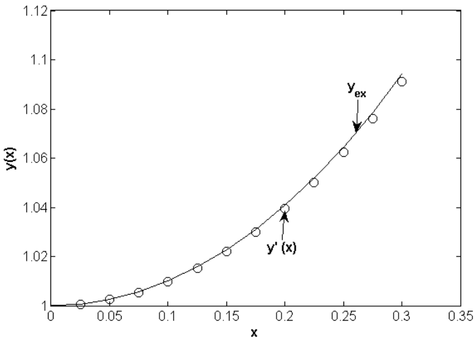

Рис. 1. *График решения уравнения (16) при M = 6*

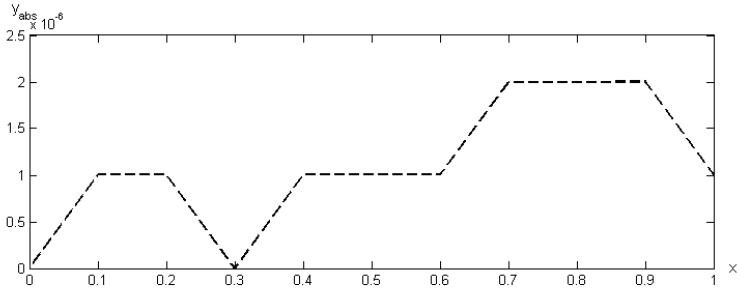

Рис. 2. *График абсолютной ошибки решения уравнения (16)*

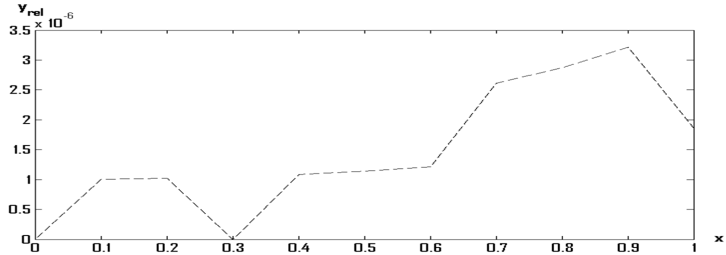

Рис. 3. *График относительной ошибки решения уравнения (16)*

Заключение. Численные результаты, полученные при решении ряда практических примеров, свидетельствуют о том, что метод В-сплайновых полуортагональных вейвлетов показал высокую эффективность при решении нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Гаммерштейна II рода.

Список использованной литературы:

1. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями : учебн. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — [3-е изд.]. — М. : УРСС, 2003. — 192 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 542 с.
3. Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям / А. Д. Полянин, А. В. Манжирова. — М. : Физматлит, 2003. — 608 с.
4. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев. — М. : ДМК Пресс, 2005. — 304 с.

The article is devoted to solving nonlinear integral equations of Fredgolm-Hammerstein II type using B-spline wavelets and Newton's method in the Matlab.

Key words: *non-linear integral equations, regularization, B-spline wavelets, the Newton, Matlab.*

Отримано: 20.09.2012