Список використаних джерел:

1. Палагін В. В. Адаптація методу максимізації полінома для оцінки параметрів випадкових величин за статистично-залежною вибіркою / В. В. Палагін, О. В. Івченко // Системи обробки інформації. — Харків, 2009. — Вип. 2 (76).
2. Лега Ю. Г. Спосіб генерації корельованих випадкових величин Патент на корисну модель / Ю.Г. Лега, В. В. Палагін, А. В. Чепінога, О. В. Івченко. — № 64971.
3. Кунченко Ю. П. Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома / Ю. П. Кунченко, Ю. Г. Лега. — К. : Наукова думка, 1992. — 180 с.
4. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стюарт ; под ред. А.Н. Колмогорова ; пер. с англ. — М. : Наука, 1973. — 900 с.

In the article examined a résolution problème for the estimation of parameters of correlated quantity are no Gaussian assumed that variate description of cumulant and moment . In the article presentation the algorithm of the adapted method of maximization of polynomial is resulted for finding of estimations of parameters statistically dependent no Gaussian assumed that variate description of cumulant and moment.

Key words: *estimator of parameter, a sample, accumulant and moment formulation, non-Gaussian process, a correlation, method of maximization of polynomial, a statistic dependence.*

Отримано: 29.10.2012

УДК 681.513

С. А. Положаєнко, д-р техн. наук
Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ АНОМАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Выполнена постановка задачи параметрической идентификации пластовых систем для функций пористости и проницаемости грунтовой породы (среды). Предложен подход к решению задачи параметрической идентификации, основанный на методе проекции градиента при минимизации квадратичного критерия качества.

Ключевые слова: *диффузионный процесс, аномалия, идентификация, метод проекции градиента.*

Введение. В ряде важных отраслей промышленности, таких как строительство, добыча полезных ископаемых, геологоразведка приходится сталкиваться с моделированием фильтрационных движений жидкостей. Причем сложность используемой при этом математической мо-

© С. А. Положаєнко, 2012

дели (ММ) фильтрационного движения определяется, в частности, числом фильтрующихся жидкостей (фаз), их фракционным составом, геологической структурой грунта. Адекватной ММ взаимофильтрации вязкой (идеальной) и вязко-пластической (аномальной) жидкостей можно считать предложенную, например, в работах [1, 2] модель в виде вариационного неравенства с соответствующими граничными и начальными условиями. Необходимо заметить, что в качестве параметров этой ММ выступают пористость $m\left(\overline{z}\right)$ и проводимости $k_i\left(\overline{z}\right)$, $i=1,2$ среды (породы пласта). Здесь, и далее, индексы $i=1,2$ обозначают фильтрующиеся жидкости. Зачастую данные параметры не определены и их нахождение представляет собой самостоятельную сложную задачу исследования пластовой системы — задачу параметрической идентификации.

Постановка задачи и цель исследования. Целью предлагаемой работы является получение конструктивной вычислительной процедуры определения (идентификации) функций пористости и проводимости породы пласта.

Основная часть. Согласно [1], ММ (в приращениях) взаимофильтрации идеальной и аномальной жидкостей, можно представить в виде

$$-\frac{m\partial\left(\Delta S_2\right)}{\partial t}-\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left[k_1\frac{\partial^2\left(\Delta P\right)}{\partial z_i^2}\left|\Delta v\right|\right]dz+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left[k_1\frac{\partial^2\left(\Delta P\right)}{\partial z_i^2}\left|\Delta S_2\right|\right]dz\geq$$
$$\geq\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j\left(z\right)Q_{1_j},\ \forall v,\ S_2\in K, \tag{1}$$

$$-\frac{m\partial\left(\Delta S_2\right)}{\partial t}-\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(k_2\frac{\partial^2\left(\Delta P\right)}{\partial z_i^2}\right)dz=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j\left(z\right)Q_{2_j}, \tag{2}$$

$$\Delta P\left(0,z\right)=\Delta P_0\left(z\right);\ \Delta S_2\left(0,z\right)=\Delta S_{2_0}\left(z\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial\left[\Delta S_2\left(t,z\right)\right]}{\partial\eta}\geq 0;S_2\left(t,z\right)<S_{2_{\max}}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\left[\Delta S_2\left(t,z\right)\right]}{\partial\eta}=0;S_2\left(t,z\right)\geq S_{2_{\max}}, \tag{5}$$

где $P=P\left(t,z\right)$ — функция внутрипластового давления; $S_2=S_2\left(t,z\right)$ — функция насыщенности пласта вытесняющей жидкостью; $v=v\left(t,z\right)$ — пробная функция; h — мощность пласта; K — множество, на котором определены функции $S_2=S_2\left(t,z\right)$ и $P=P\left(t,z\right)$;

K_1, K_2 — соответственно число добывающих и нагнетальных скважин, которыми вскрыт пласт; Q_1, Q_2 — дебиты соответствующих скважин; $\zeta(z)$ — функция Дирака; η — направление к нормали.

Как критерий качества решения задачи идентификации примем функционал вида

$$J_1\left[m(\cdot),k_1(\cdot)\right]=\sum_{j=1}^{K_1+K_2}\left\{\int_{T_j}\left[P'\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^P(t)\right]^2 dt+\right.$$
$$\left.+\int_{T_j}\left[S_2'\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^S(t)\right]^2 dt\right\}, \tag{6}$$

где $P'(\cdot)$ и $S_2'(\cdot)$ — соответственно точные значения функций внутрипластового давления и насыщенности вытесняющей жидкости; F^P и F^S — соответственно измеряемые значения указанных функций; T — время измерений.

Покажем, что принятый критерий качества будет дифференцируемым в любой точке пространственной области $\overline{z}\in\Omega$ (включая и ее границу Γ), т.е. приращение (6) равное

$$\Delta J_1=J_1\left[\left(m+h^m\right),\left(k_1+h^k\right)\right]-J_1\left(m,k_1\right)$$

представимо в виде

$$\Delta J_1=\int_{\Omega}\left\{\left[J'\left(m,k_1\right)h^m\right]dz+\left[J'\left(m,k_1\right)h^k\right]dz\right\}+$$
$$+\left[O\left(\left\|h^m\right\|_{L^2}\right)+O\left(\left\|h^k\right\|_{L^2}\right)\right], \tag{7}$$

где $J'(m,k_1)$ — некоторая функция из $L^2(\Omega)$, $O\left(\left\|h^m\right\|_{L^2}\right)$ и $O\left(\left\|h^k\right\|_{L^2}\right)$ — остаточные члены такие, что $\lim\limits_{\alpha^m\to+0} O\left(\alpha^m\right)\left(\alpha^m\right)^{-1}=0$, $\lim\limits_{\alpha^m\to+0} O\left(\alpha^k\right)\left(\alpha^k\right)^{-1}=0$.

Запишем формальным образом приращение функционала ΔJ_1

$$\Delta J_1=\sum_{j=1}^{K_1+K_2}\left\{\int_{\Omega}\left\{\left[P\left(t,z_j,m,k_1\right)+\Delta P\left(t,z_j\right)-F_j^P(t)\right]^2-\right.\right.$$
$$\left.-\left[P\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^P(t)\right]^2\right\}dz+$$

$$+\left\{\left[S_2\left(t,z_j,m,k_1\right)+\Delta S_2\left(t,z_j\right)-F_j^S\left(t\right)\right]^2-\right.$$

$$+\left\{\left[S_2\left(t,z_j,m,k_1\right)+\Delta S_2\left(t,z_j\right)-F_j^S\left(t\right)\right]^2-\right.$$

$$\left.\left.-\left[S_2\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^S\left(t\right)\right]^2\right\}dz\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{K_1+K_2}\left\{\int_\Omega\left\{\left\{\left[P\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^P\left(t\right)\right]+\Delta P\left(t,z_j\right)\right\}^2-\right.\right.$$

$$\left.-\left[P\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^P\left(t\right)\right]\right\}dz+ \tag{8}$$

$$+\left\{\left\{\left[S_2\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^S\left(t\right)\right]+\Delta S_2\left(t,z_j\right)\right\}^2-\right.$$

$$\left.\left.-\left[S\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^S\left(t\right)\right]\right\}dz\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{K_1+K_2}\left\{\left\{\int_\Omega 2\left[P\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^P\left(t\right)\right]\Delta P\left(t,z\right)dz+\int_\Omega\Delta P^2\left(t,z_j\right)dz\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{\int_\Omega 2\left[S_2\left(t,z_j,m,k_1\right)-F_j^S\left(t\right)\right]\Delta S_2\left(t,z\right)dz+\int_\Omega\Delta S_2^2\left(t,z_j\right)dz\right\}\right\}.$$

Преобразуем это выражение к виду (7). С этой целью введем в рассмотрение функции $p_P^*\left(t,z\right)\equiv p_P^*\left(t,z,m,k_1\right)$ и $p_S^*\left(t,z\right)\equiv p_S^*\left(t,z,m,k_1\right)$ как решение следующей краевой задачи

$$-\frac{m\partial p_S^*}{\partial t}\left(v-S_2\right)-\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[k_1\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_i^2}\left|v\right|\right]dz+\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[k_1\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_i^2}\left|S_2\right|\right]dz\geq$$

$$\geq\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j\left(z\right)Q_{1_j},\ \forall v,\ S_2\in K, \tag{9}$$

$$-\frac{m\partial p_S^*}{\partial t}-\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(k_2\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_i^2}\right)dz=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j\left(z\right)Q_{2_j}, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial p_S^*}{\partial\eta}\right|_{z=0}\geq 0;\ 0\leq t\leq t_k, \tag{11}$$

$$\left.p_P^*\right|_{t=t_k}=2\left[P\left(t_k,z_j,m,k_1\right)-F^P\left(t\right)\right],\ \left.p_S^*\right|_{t=t_k}=$$

$$=2\left[S_2\left(t_k,z_j,m,k_1\right)-F^S\left(t\right)\right],\ \forall z\in\Omega. \tag{12}$$

Первый интеграл в первом слагаемом в правой части равенства (8) с учетом (1)—(5), (9)—(12) преобразуется так

$$I_P = \int_\Omega 2\left[P\left(t, z_j, m, k_1\right) - F_j^P(t)\right]\Delta P\left(t, z_j\right)dz = \int_\Omega p_P^*\left(t_k, z_j\right)\Delta P\left(t, z_j\right)dz =$$

$$= \int_\Omega \left[\int_0^{t_k} \frac{\partial}{\partial t}\left(p_P^* \Delta P\right)dt\right]dz = \int_\Omega \int_0^{t_k} \left[\frac{\partial p_P^*}{\partial t}\Delta P + p_P^* \frac{\partial(\Delta P)}{\partial t}\right]dtdz =$$

$$= \int_\Omega \int_0^{t_k} \left\{\frac{1}{m(z)}\left\{\sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|v|\right] + \sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|S_2|\right]\right\}\Delta P + \right.$$

$$\left. + p_P^* \left\{\sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|\Delta v|\right] + \sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|\Delta S_2|\right]\right\}\right\} dtdz\ .$$

Интегрируя последнее выражение в пространственной области, получим следующий результат

$$I_P{}' = \int_0^{t_k} \left\{\frac{1}{m(z)}\left\{\sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|v|\right] + \sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|S_2|\right]\right\}\Delta P + \right.$$

$$\left. \left. + p_P^* \left\{\sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|v|\right] + \sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|S_2|\right]\right\}\right\}\right|_\Omega dt = \qquad (13)$$

$$= \int_0^{t_k} \frac{1}{m(z)}\left[\left(\sum_{i=1}^n k_1(z_i)\, p_P^*|v|\right) + \left(\sum_{i=1}^n k_1(z_i) p_P^*|S_2|\right)\right]\Delta P dt\ .$$

Аналогично, для выражений в (8), записанных относительно функции $S_2(t,z)$ (т.е. первый интеграл во втором слагаемом в правой части равенства (8)), можно записать

$$I_S = \int_\Omega 2\left[S_2\left(t, z_j, m, k_1\right) - F_j^S(t)\right]\Delta S_2\left(t, z_j\right)dz = \int_\Omega p_P^*\left(t_k, z_j\right)\Delta S_2\left(t, z_j\right)dz$$

или, опуская очевидные преобразования, при интегрировании в пространственной области, окончательно получим

$$I_S{}' = \int_0^{t_k} \frac{1}{m(z)}\left[\left(\sum_{i=1}^n k_1(z_i)\, p_P^*|v|\right) + \left(\sum_{i=1}^n k_1(z_i) p_P^*|S_2|\right)\right]\Delta S_2 dt\ . \qquad (14)$$

Вторые интегралы в слагаемых в правой части (8) определяют члены вида $\left[O\left(\left(h\binom{P}{L^2}\right) + O\left(\left(h\binom{S}{L^2}\right)\right)\right]$, представленные в (7) и записанные для пространственной постановки задачи. В этом случае будем иметь

$$\Delta J_1 = \int_{\Omega} \frac{1}{m(z)} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} k_1(z_i)\, p_P^* |v| \right) + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{n} k_1(z_i) p_P^* |S_2| \right) \right] hdz + O\left(\|h\|_{L^2} \right). \tag{15}$$

В результате получим, что приращение функционала (6) представляется в виде выражения

$$\Delta J_1 = \int_{0}^{t_k} \frac{1}{m(z)} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} k_1(z_i)\, p_P^* |v| \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} k_1(z_i) p_P^* |S_2| \right) \right] hdz + O\left(\|h\|_{L^2} \right).$$

Таким образом, искомое представление (7) для функционала (6) получено, причем градиент этого функционала имеет вид

$$J_1'\left[m(z), k_1(z) \right] \equiv \frac{1}{m(z)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |v| \right] + \sum_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |S_2| \right] \right\},$$
$$\forall z \in \Omega,\ \forall t \in \left[0, t_k \right]. \tag{16}$$

Далее, имея градиент (16) и используя процедуру метода проекции градиента [3], определяемую соотношениями

$$U = \left\{ u(t) : u(t) \in L^2\left[0, t_k \right],\ a \le u(t) \le b,\ \forall t \in \left[0, t_k \right] \right\},$$

$$\Pr_u\left[u(t) \right] = \begin{cases} u(t),\ a \le u(t) \le b, \\ a, \qquad u(t) < a, \\ b, \qquad u(t) > b, \end{cases}$$

для идентифицируемых функций $m(z)$ и $k_1(z)$ получим окончательные расчетные соотношения

$$m_{q+1}(z) = \begin{cases} m_q(z) - \dfrac{\alpha_m}{m(z)} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |v| \right] + \sum\limits_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |S_2| \right] \right\}, \\ m_{\min} \le m_q(z) - \dfrac{\alpha_m}{m(z)} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |v| \right] + \sum\limits_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |S_2| \right] \right\} \le m_{\max}, \\ m_{\min}, \\ m_q(z) - \dfrac{\alpha_m}{m(z)} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |v| \right] + \sum\limits_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |S_2| \right] \right\} < m_{\min}, \\ m_{\max}, \\ m_q(z) - \dfrac{\alpha_m}{m(z)} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |v| \right] + \sum\limits_{i=1}^{n} \left[k_1(z_i)\, p_P^* |S_2| \right] \right\} > m_{\max}. \end{cases}$$

$$k_{1_{q+1}}(z)=\begin{cases} k_{1_q}(z)-\dfrac{\alpha_k}{m(z)}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)\,p_P^*|v|\right]+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)\,p_P^*|S_2|\right]\right\}, \\ k_{1_{\min}}\le k_{1_q}(z)-\dfrac{\alpha_k}{m(z)}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)\,p_P^*|v|\right]+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)\,p_P^*|S_2|\right]\right\}\le k_{1_{\max}}, \\ m_{\min}, \\ k_{1_q}(z)-\dfrac{\alpha_k}{m(z)}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)\,p_P^*|v|\right]+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)\,p_P^*|S_2|\right]\right\}<k_{1_{\min}}, \\ m_{\max}, \\ k_{1_q}(z)-\dfrac{\alpha_k}{m(z)}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)\,p_P^*|v|\right]+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)\,p_P^*|S_2|\right]\right\}>k_{1_{\max}} \end{cases}$$

Заключение. Проведенные численные исследования показали, что предложенная процедура итерационного поиска функций пористости $m(z)$ и проницаемости $k_i(z), i=1,2$ имеет высокую сходимость (так, например, для идентификации параметров пласта, определяемого сеткой дискретизации по пространству $z_1=12,\ z_2=16$ необходимо не более 8 итераций) при общем времени решения задачи не более 120 с.

Список использованной литературы:

1. Положаенко С. А. Математические модели процессов течения аномальных жидкостей / С. А. Положаенко // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. пр. — К. : ІПМЕ, 2001. — Вип. 9. — С. 14–21.
2. Положаенко С. А. Математическая модель фильтрации грунтовых вод для класса гидротехнических земляных сооружений / С. А. Положаенко // Вісник одеської державної академії будівництва та архітектури. — Одеса : ОДАБА, 2005. — С. 206–211.
3. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, 1981. — 400с.

Formulation of the problem is made parametric identification-cation Reservoir functions of porosity and permeability of ground rock (medium). An approach to the solution of the problem of parametric identification, based on the gradient projection method for minimizing the quadratic performance.

Key words: *diffusion process, anomaly identification, gradient projection method.*

Отримано: 22.10.2012