

УДК 519.6

**В. А. Третьяк**, аспирант

Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев

## **УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ АДАПТИВНОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ**

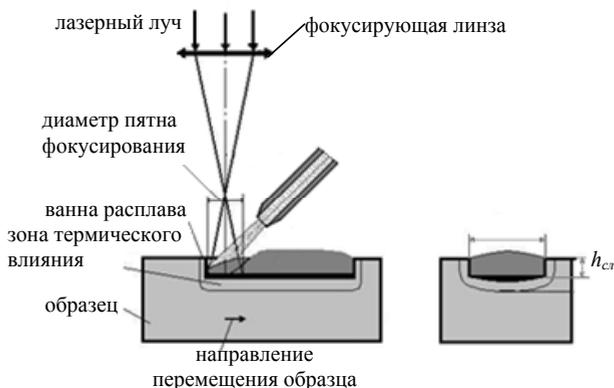
В статье исследуются проблемы моделирования изменения температурного поля в процессе нанесения твердой смазки в углубление детали. Рассматривается проблема построения адаптивной разностной сетки для трехмерной нестационарной нелинейной задачи теплопроводности, предлагается методика уменьшения расчетной области за счет зон постоянных температур. Приведены результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** *дифференциальные уравнения в частных производных, метод конечных разностей, структурированные сетки, адаптивная разностная сетка.*

**Вступление.** Детали оборудования, находящихся под действием больших механических нагрузок, агрессивных сред, нуждаются в особом виде смазки. Поскольку типичные смазки на основе органических масел не всегда могут удерживаться или быть действенными длительное время в зоне трения, возникает необходимость использования твердой смазки, которая представляет собой композитную смесь металлических порошков — матрицы и включений. Одним из методов нанесения твердой смазки является лазерная газопорошковая наплавка (рис. 1). Такой вид обработки особенно целесообразен для деталей бурового оборудования, компрессоров, систем турбонаддува двигателей, газовых турбин и т.д. [1, с. 267—273].

Согласно технологии процесса, лазерный луч фокусируется на поверхности углубления (канала) в обрабатываемом перемещающемся изделии и расплавляет его верхний слой. На расплавленный металл из специального дозирующего устройства потоком транспортирующего газа подается композитный порошковый материал, разогретый практически до температуры плавления. Это обеспечивает закрепление твердой смазки в канале детали.

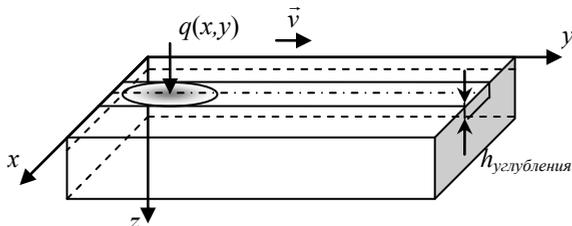
Изменяя параметры процесса, можно подобрать наилучший вариант нанесения смазки для отдельных случаев. Экспериментальное определение параметров такой поверхностной обработки является трудоемким и дорогостоящим, поэтому целесообразно использовать методы математического и компьютерного моделирования.



**Рис. 1.** Схема газопорошковой наплавки

Наиболее значимой характеристикой, влияющей на эффективность процесса наплавки, является распределение температурного поля. Его математической моделью является нелинейное нестационарное трехмерное дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП) [2], определенное на прямоугольной области с каналом (рис. 2). Для решения ДУЧП выбран метод конечных разностей. Но такие особенности технологического процесса, как высокие градиенты температур, локальность воздействия лазерного излучения и высокая скорость протекания, затрудняют моделирование и обуславливают необходимость исследования и совершенствования адаптивных методов решения ДУЧП.

**Постановка задачи моделирования.** Рассмотрим математическую модель распределения температурного поля, обусловленного действием подвижного лазерного луча и предварительно разогретой до температуры плавления с помощью плазмотрона твердой смазки, которая постепенно наносится в канал на поверхности детали (рис. 2).



**Рис. 2.** Схематическое изображение области определения

Температурное поле описывается трехмерным ДУЧП (1) с заданным начальным условием (2) и краевыми условиями, моделирующими взаимодействие с окружающей средой (3) и нагрев лазером и электрической дугой (4):

$$\frac{\partial}{\partial t} C(U)U = \lambda \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$x \in [0, L_x], y \in [0, L_y], z \in [0, L_z], t \in [0, T_k]$$

$$U(x, y, z, 0) = U_c, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial n} + \alpha [U - U_c] = 0, \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial U(x, y, 0, t)}{\partial z} + q(x, y) = 0, \quad (4)$$

где  $C$  — коэффициент объемной теплоемкости ( $C = c\rho$ );  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $L_x, L_y, L_z$  — соответственно ширина, длина и высота детали;  $T_k$  — время моделирования;  $U_c$  — температура окружающей среды;  $\frac{\partial U}{\partial n}$  — производная температуры по направлению нормали к поверхности детали;  $\alpha$  — коэффициент взаимодействия со средой;  $q(x, y)$  — функция распределения мощности излучения.

В модели учитывается зависимость  $C$  композитной смазки от температуры (рис. 3) и скрытая теплота плавления матрицы и включений, что обуславливает нелинейность поставленной задачи. Коэффициент  $\lambda$  считается величиной, не зависящей от температуры, и для композитного материала вычисляется по формуле Максвелла. Величины  $C$  и  $\lambda$  зависят от пространственных координат.

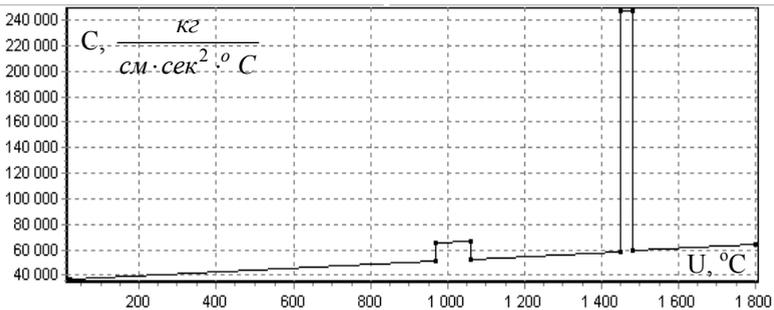


Рис. 3. Зависимость коэффициента объемной теплоемкости композитного материала от температуры

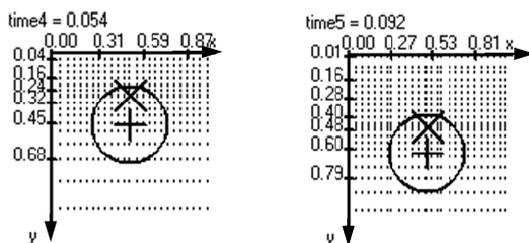
**Методы решения.** Численные методы решения задач для ДУЧП заключаются в выполнении следующих базовых шагов [3]: дискретизация непрерывной области определения (построение сетки), аппроксимация искомой функции на узлы сетки и генерация систем алгебраических уравнений, решение полученных систем и оценка погрешности, адаптивное усовершенствование сетки.

Поскольку область определения искомой функции для данной задачи имеет прямолинейные границы, для решения ДУЧП используется метод конечных разностей (МКР) [4; 5], а именно, шестиступенчатая схема расщепления по координатам [6, с. 121—131].

Одной из особенностей поставленной задачи является наличие зон с высокими градиентами функции решения, что требует использования адаптивной сетки (с численным сенсором) [6]. После построения сетки выполняется аппроксимация функции температуры в узлах сетки, формируется система нелинейных алгебраических уравнений относительно значений температуры на следующем временном слое, для решения которой используется метод Ньютона.

**Метод построения адаптивной разностной сетки.** Существующие методы построения адаптивных разностных сеток [3; 6], основываясь на данных расчета для предыдущего момента времени, определяют распределение узлов, которое будет использоваться для расчета значений функции в следующий момент времени. Таким образом, области уплотнения узлов располагаются в зоне локации лазера в предыдущий момент времени. Поскольку в данной задаче источник тепла является подвижным, зона излучения в следующий момент времени и зона уплотнения узлов не совпадают. В общем случае, при достаточно большой скорости лазера, эти зоны могут быть расположены достаточно далеко друг от друга (рис. 4). При этом адаптивный метод теряет свои преимущества.

Размер детали: 1Ч1Ч1 (см). Диаметр пятна луча лазера: 0,25 см. Скорость луча: 5 см/сек. Окружностью  $\oplus$  обозначено текущее положение пятна луча,  $\times$  обозначает центр луча в предыдущий момент времени.



*Рис. 4. Расположение луча лазера и узлов разностной сетки в два последовательных момента расчетного времени*

В данной работе предлагается усовершенствованный алгоритм построения адаптивных сеток, направленный на решение двух проблем:

- несоответствие построенной сетки положению луча лазера в следующий момент времени;
- избыточность узлов в зонах с малым изменением температуры.

**Метод предварительного расчета.** Для решения первой проблемы предлагается генерировать сетку на основе некоторого предварительного расчета. Считаем, что луч лазера уже переместился в положение, которое он должен занять в следующий момент расчетного времени. Осуществление такого расчета по всей области требует достаточно много вычислительных и временных ресурсов. Чтобы сократить количество вычислений предлагается проводить предварительный расчет не по всей области, а лишь в подобластях, где имеют место наибольшие изменения градиента температурного поля. Такое сокращение расчетной области не приведет к искажению результатов, поскольку для определения коэффициентов пространственных шагов используются их минимальные значения по соответствующему сечению.

Как показали исследования, для данной задачи минимальные значения пространственных шагов наблюдаются в следующих сечениях:

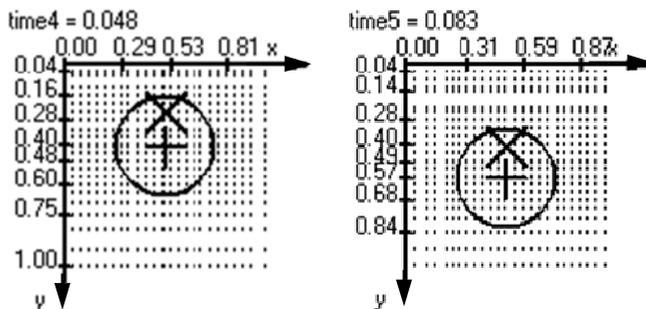
- $z = 0$  — поверхность детали;
- $z = h_{\text{углубления}}$  — уровень дна канала;
- сечения на уровне текущего расположения центра пятна луча и дуги.

Рассмотрим случай а)  $z = 0$ . Если производить расчет только в этом сечении, будет сделан проход только по оси  $Ox$  и  $Oy$ . Но в таком случае нагрев детали не будет учтен, т.к. он учитывается граничным условием (4) при проходе по  $Oz$ . И поскольку именно нагрев вызывает высокие градиенты функции температуры, он является причиной возникновения максимальных значений погрешности и минимальных значений коэффициентов пространственных шагов. Следовательно, нужно осуществлять проход также по оси  $Oz$ , для этого нужно учитывать несколько сечений, параллельных плоскости  $xOy$ . Для уменьшения вычислительных затрат количество этих сечений должно быть минимальным. В данной работе предлагается совершать предварительный расчет по трем сечениям, в таком случае первое сечение ( $z = 0$ ) будет учитывать нагрев и взаимодействие с окружающей средой, второе (следующий слой по оси  $Oz$ ) и третье — процесс теплопередачи. Таким образом, для выполнения прохода по оси  $Oz$ , генерируются и решаются  $N_x \times N_y$  ( $N_x, N_y$  — количество узлов по оси  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно) систем алгебраических уравнений размерностью 3. Последнее уравнение каждой из этих систем отображает граничные условия 1-го рода, для этого берутся значения температур с четвертого слоя по оси  $Oz$ .

Этот метод позволяет получать актуальную сетку в каждый момент времени. На рис. 5 изображено расположение узлов разностной сетки, которая генерируется с использованием предварительного расчета, исходные параметры моделирования совпадают с парамет-

рами для рис. 4. Видно, что уплотнение узлов расположено в области будущего расположения луча.

Использование предложенного метода приводит к улучшению сходимости метода Ньютона, который применяется в данной задаче для решения систем нелинейных уравнений, это в свою очередь снижает количество отказов в среднем на 10% (поскольку основное количество отказов вызвано несходимостью итеративного процесса решения систем методом Ньютона).



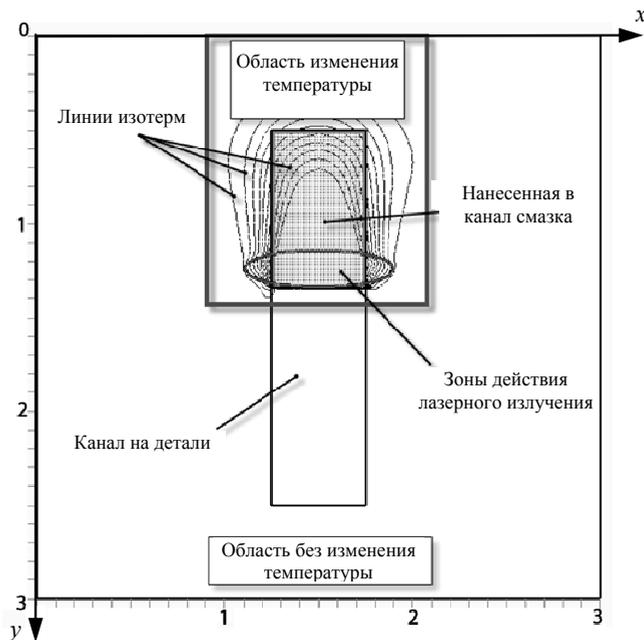
*Рис. 5. Расположение луча и узлов разностной сетки в два последовательных момента расчетного времени при использовании предварительного расчета*

Также в значительной степени сокращаются вычислительные затраты, поскольку расчет на уплотненных разностных сетках выполняется не для всей области, а лишь для небольшого количества подобластей. Сокращение вычислений зависит от геометрических параметров расчета.

**Метод усе́чения расчетной области.** Как видно из приведенных ранее рисунков (рис. 3, 4) значительное количество узлов расположено вне зоны действия излучения. Особенно велико их количество на уровне центра луча. Очевидно, что в зонах, куда лазерный луч еще не дошел, температура не меняется, но все равно для каждого узла формируется свое уравнение. Рассмотрим расположение изолиний температурного поля в некоторый момент расчета (рис. 6). Разобьем расчетную область на зоны, в которых происходят изменения температуры, и зоны без изменения температуры.

Общая расчетная область значительно больше области, где непосредственно происходит нагревание. Размеры этих областей и соотношение их площадей зависят от геометрических параметров расчета. Для моделирования процесса наплавки зоны без температурных изменений не представляют интереса. Однако, количество расположенных в этих зонах узлов может быть значительным и много про-

граммных ресурсов тратится на вычисление значений температуры в узлах, где не происходят изменения.



**Рис. 6.** Разделение расчетной области на зоны

Целесообразно проводить расчет только в частях расчетной области, где протекают активные процессы нагрева. В каждом из трех измерений система просматривает предварительно просчитанную расчетную область и создает массивы узлов, температурное поле которых не изменится после полного расчета.

Выводы по поводу возможного изменения функции температуры производятся на основании проверки ее градиента. Для этого формируются 3 вектора соответствующие векторам шагов разностной сетки. В них заносятся максимальные значения численно рассчитанных частных производных функции температуры по соответствующим координатам, на основании данных предварительного расчета. Далее производится анализ полученных векторов, он заключается в выделении диапазонов элементов векторов, отличных от нуля. К полученным таким образом диапазонам добавляется еще по  $k$  узлов с обеих сторон, чтобы учесть возможные неточности расчетов. Исследования показали, что достаточно добавлять по три узла. На основании этого анализа формируется уменьшенная часть полной области и передается на полный просчет. Эта уменьшенная часть может, в

общем случае, состоять из нескольких несвязанных подобластей. Для узлов границ каждой подобласти формируются уравнения, моделирующие взаимодействие со средой (3), (4), где в качестве значения температуры окружающей среды берутся значения температуры в точках окружающей выделенную подобласть.

**Компьютерное моделирование.** Для автоматизации моделирования процесса нанесения твердой смазки в среде Microsoft Visual Studio 2005 было разработано программное приложение для операционных систем Windows. Для реализации использовался язык программирования C++ и технология .NET.

На входе пользователь указывает размеры детали и канала, их теплофизические параметры (коэффициенты теплоемкости и теплопроводности, плотность, коэффициент теплоотдачи), параметры лазерного излучения (форму и размеры лазерного пучка, общую мощность, распределение мощности в лазерном пучке, скорость движения) и параметры расчета (конечное время моделирования, допустимая погрешность, первоначальные размеры шагов разностной сетки и шага по времени). На выходе выдается полная картина распределения температуры по детали, в виде таблиц значений в узлах расчетной сетки в каждый момент моделируемого времени, трехмерных графиков изменения температуры по проекциям, изолиний температурного поля. Кроме того выдаются численные характеристики расчета: графики распределения узлов адаптивной сетки, изменения расчетной погрешности, временных шагов, таблицы значений численных сенсоров.

**Результаты расчетов.** Эксперименты проводились для детали с высотой 2 см, шириной 1 см, длиной 1 см, с каналом посередине глубиной 0,1 см, шириной 0,6 см, длиной 1 см. Область фокусировки лазерного луча имела форму прямоугольника (сканирующий луч) с длиной 0,2 см, шириной 0,6 см и была размещена таким образом, чтобы одной половиной накрывать нанесенную смазку, а другой разогревать дно канала. Теплофизические свойства (коэффициент теплоемкости, плотность, теплопроводность, коэффициент теплоотдачи) материала детали:

$$c = 0.68 \frac{Дж}{г \cdot ^\circ C}; \rho = 7,8 \frac{г}{см^3}; \lambda = 24 \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C}; \alpha = 50 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C};$$

материала покрытия:

$$C = c\rho \text{ — в соответствии с рис. 3, } \lambda = 38 \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C}; \alpha = 45 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}.$$

Был проведен расчет для проверки эффективности удаления частей расчетной области, где отсутствуют изменения температурного поля (таблица 1). Для первого эксперимента (эксп. 1) вычисления выполнялись по всей расчетной области, для второго (эксп. 2) только по области с активными изменениями температуры.

Таблица 1

*Сравнение первого и второго эксперимента  
для детали размером 2×1×1*

№ шага	Текущее время	Шаг по времени	Время расчета		Количество узлов		% уменьшения количества узлов
			Эксп. 1	Эксп. 2	Эксп. 1	Эксп. 2	
1	0,008	0,0078	00.296	00.265	9744	7776	20,20
2	0,02	0,0157	00.796	00.718	21420	19264	10,07
3	0,043	0,0313	01.281	01.218	31616	29792	5,77

В начальный момент, когда изменение температурного поля особенно локально, метод удаления неактивных частей расчетной области уменьшает количество узлов разностной сетки на 20%, а потраченное на расчет время — на 10%. На следующих временных шагах количество удаленных узлов уменьшается, так как в зоне действия лазера оказываются все большие области, а зоны, уже подверженные обработке, остывают, то есть температура в узлах этих зон меняется.

Если увеличить размеры детали до 2×3×3, а другие параметры оставить без изменений, и провести снова эксперименты 1 и 2 отличные количества узлов будет еще больше (таблица 2). В начальный момент из расчетной области было удалено 63% узлов, и расчет был осуществлен быстрее на 71%. В последний момент времени уменьшение скорости расчета превышает 15%, а общее время выполнения эксперимента уменьшилось на 33%.

Таблица 2

*Сравнение первого и второго эксперимента  
для детали размером 2×3×3*

№ шага	Текущее время	Шаг по времени	Время расчета		Количество узлов		% уменьшения количества узлов
			Эксп. 1	Эксп. 2	Эксп. 1	Эксп. 2	
1	0,008	0,0078	01.093	00.312	26448	9720	63,25
2	0,02	0,0157	02.218	01.109	53460	26144	51,10
3	0,043	0,0313	03.062	01.656	70702	39729	43,81
4	0,09	0,0621	03.562	02.703	81592	64032	21,52
5	0,184	0,1	04.906	04.140	115500	94752	17,96

Также для различных геометрических параметров детали были осуществлены расчеты для проверки эффективности предварительного расчета, при этом было выявлено увеличение сходимости итерационного метода Ньютона решения систем нелинейных уравнений, генерируемых по разностной схеме. Даже при осуществлении предварительного расчета по всей области определения (не только по выбранным проекциям) скорость сходимости увеличивается в среднем на 10—20%.

Все расчёты проводились на компьютере с конфигурацией системы: Intel Core 2 Quad CPU Q9550 2.83ГГц, 3 Гб ОЗУ, под управлением операционной системы Windows XP Pro SP3.

**Выводы.** Предложенные модификации метода построения адаптивных разностных сеток позволяют сократить вычислительные затраты на моделирование процесса нанесения твердой смазки, который описывается нестационарным нелинейным трехмерным уравнением теплопроводности. Результаты проведенных численных экспериментов согласуются с теоретическими рассуждениями и данными экспериментов.

### Список использованной литературы:

1. Лазерні технології та комп'ютерне моделювання / під. ред. Л. Ф. Головка, С. О. Лук'яненка. — К. : Вістка, 2009. — 296 с.
2. Исследование тепловых процессов и структуры поверхностного слоя при лазерной наплавке порошковых материалов / В. А. Перелома [и др.]. — К. : Институт электродинамики НАН Украины, 1998. — 47 с.
3. Miller G. L. Optimal Coarsening of Unstructured Meshes / G. L. Miller, D. Talmor, Shang-Hua Teng // Journal of Algorithms. — 1999. — Vol. 31, № 1. — P. 29–65.
4. Моделирование адаптивным сеточным методом температурного поля при лазерной наплавке порошковых материалов / Л. Ф. Головка [и др.] // Электронное моделирование. — 2009. — Т. 31, № 1. — С. 21–32.
5. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. — М. : Наука, 1978. — 512 с.
6. Лук'яненко С. О. Адаптивні обчислювальні методи моделювання об'єктів з розподіленими параметрами / С. О. Лук'яненко. — К. : ІВЦ "Видавництво "Політехніка", 2004.— 236 с.

The paper deals with mathematical simulation of the temperature field behavior in course of putting dry-film lubricant into the detail's hollow. The problem of timely adaptive difference mesh generation for non-stationary nonlinear thermal conductivity problem is considered. The adequacy of the function with high gradients approximation is analyzed. The method of domain reduction by the constant temperature zones is offered. The results of digital experiments are showed.

**Key words:** *partial differential equations, finite difference method, adaptive mesh refinement, structured mesh.*

Отримано: 23.10.2012