УДК 517.519.7

Я. А. Шарифов, канд. физ.-мат. наук

Бакинский государственный университет,
Институт кибернетики НАН Азербайджана, г. Баку

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В работе исследуется задача оптимального управления, где состояние управляемой системы описывается дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях. С помощью принципа сжатых отображений доказано существование и единственность решения нелокальной краевой задачи при импульсных воздействиях и фиксированном допустимом управлении.

При некоторых условиях на исходные данные задачи, вычислен градиент функционала и выведены необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: *нелокальные краевые условия, импульсные системы, условия оптимальности, градиент функционала, существования и единственность решения.*

1. Введение. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием моделируют поведение эволюционирующих во времени процессов разнообразной природы, которые могут почти мгновенно изменять свое состояние. Такие уравнения имеют разрывные решения с разрывами первого рода в фиксированные или нефиксированные моменты времени [1]. В [2, с.10, 16] приведены конкретные примеры из теории электрических колебаний и часов, у которых математические модели описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями. Такие дифференциальные уравнения достаточно подробно изучены в монографиях [1—4]. Однако в последние годы интенсивно исследуются дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях (см. напр., [4—8]). В этих работах отмечается, что существуют многочисленные процессы физики, техники, экологии, механики и др., математические модели которых, описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях и доказаны теоремы существования и единственности решения краевой задачи. В отмеченных работах нелокальность краевых условий, в основном, имеет вид: $x(0)+g(x)=x_0$, где $g(x)$ линейный оператор, действующий из пространства кусочно-абсолютно непрерывных функций в пространство R^n . Такие краевые условия не охватывают даже простые случаи, например, когда одна часть граничных условий заданы в начальной точке, а другая часть заданы в конечной точке. Однако, в монографии [9] приведено достаточно много примеров из практики, в которых нелокальные граничные условия заданы в различных точках, т.е. имеют вид: $\sum_{k=0}^{m} A_k x(t_k) = C$. Очевидно, что такие нелокальные краевые условия более общие, чем выше отмеченные, так как они в себе их сохраняют как частный случай. Действительно, при $A_0 = E$ (E — единичная матрица) получается граничная задача вида $x(0) + g(x) = x_0$.

В настоящей работе исследуются задачи оптимального управления, состояние системы в которых описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях, которые, в свою очередь, в себе сохраняют как частный случай, начальную задачу с импульсными воздействиями. Исследованы вопросы существования и единственности решений краевой задачи, найдены достаточные условия для дифференцируемости критерия качества, получена формула его градиента и установлены необходимые условия оптимальности в форме вариационных неравенств.

Отметим, что другие работы, в которых исследована задача оптимального управления с нелокальными условиями при импульсных воздействиях автору неизвестны.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу при импульсных воздействиях:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)), \quad 0 \le t \le T, \ t \ne t_i , \tag{1}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = C , \tag{2}$$

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i), v_i), \ i = 1, 2, ..., p, \ 0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < T , \tag{3}$$

$$\begin{gathered}(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p = \\ = \left\{ u(t) \in L_2^r[0, T] : u(t) \in V, n.в.t \in [0, T], v_i \in \Pi, i = 1, 2, ..., p \right\},\end{gathered} \tag{4}$$

где $x(t) \in R^n$, $f(t, x, u)$ — n -мерная непрерывная функция, $A, B \in R^{n \times n}$, $C \in R^{n \times 1}$ — заданные постоянные матрицы, $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, $I_i(x, v)$ — некоторые заданные функции, $(u, [v])$ — управляющие параметры, $V \in R^r$ и $\Pi \in R^m$ — ограниченные выпуклые множества.

Требуется на решениях краевой задачи (1)—(4) минимизировать функционал

$$J\left(u,[v]\right)=\Phi\left(x(0),x(T)\right), \tag{5}$$

где $\Phi(x,y)$ заданная скалярная функция.

Под решением краевой задачи (1)—(3), соответствующей фиксированному управляющему параметру $\left(u(\cdot),[v]\right)\in U\times\Pi^p$, будем понимать функцию $x(t):[0,T]\to R^n$, абсолютно непрерывную на [0,T], $t\neq t_i$ и непрерывную слева при $t=t_i$, для которой существует конечный правый предел $x(t_i^+)$ при $i=1,2,...,p$. Пространство таких функций обозначим $PC([0,T],R^n)$. Очевидно, такое пространство является банаховым с нормой $\|x\|_{PC}=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$, где $|\cdot|$ — является нормой в R^n.

Допустимый процесс $\left\{\left(u(t),[v]\right),x\left(t;u(t),[v]\right)\right\}$, являющийся решением задачи (1)—(5), т.е. доставляющий минимум функционалу (5) при ограничениях (1)—(4), будем называть оптимальным процессом, а $\left(u(t),[v]\right)$ — оптимальным управлением, где через $x\left(t;u(t),[v]\right)$ обозначено решение краевой задачи (1)—(3), соответствующее допустимому управлению $\left(u(t),[v]\right)$.

3. Существование решений краевой задачи (1)—(3). Введем следующие условия:

1. Пусть $\det(A+B)\neq 0$.
2. $f:[0,T]\times R^n\times R^r\to R^n$, $I_i:R^n\times R^m\to R^n$, $i=1,2,...,p$ — непрерывные функции и существуют постоянные $K>0$, $L_i>0$, $i=1,2,...,p$

$$\left|f(t,x,u)-f(t,y,u)\right|\leq K\left|x-y\right|,\ t\in[0,T],\ \ x,y\in R^n, \tag{5}$$

$$\left|I_i(x,v)-I_i(y,v)\right|\leq L_i\left|x-y\right|,\ x,y\in R^n. \tag{6}$$

3. $$L=S[KT+\sum_{i=1}^{p}L_i]<1, \tag{7}$$

где $S=\max\left\{\left\|(A+B)^{-1}A\right\|,\left\|(A+B)^{-1}B\right\|\right\}$.

Теорема 1. Пусть выполняется условие 1. Тогда функция $x(\cdot)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ является абсолютно непрерывным решением краевой задачи (1)—(3) тогда и только тогда, когда

$$x(t) = (A+B)^{-1}C + \int_0^T K(t,\tau) f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^{p} K(t,t_i) I_i(x(t_i), v_i), \quad (8)$$

где

$$K(t,\tau) = \begin{cases} (A+B)^{-1} A, & 0 \le \tau \le t \\ -(A+B)^{-1} B, & t \le \tau \le T \end{cases}.$$

Доказательство. Если $x = x(\cdot)$ является решением дифференциального уравнение (1), то для $t \in (t_j, t_{j+1})$

$$\int_0^t f(s, x(s), u(s)) ds = \int_0^t x'(s) ds =$$

$$= \left[x(t_1^-) - x(0^+) \right] + \left[x(t_2^-) - x(t_1^+) \right] + \ldots + \left[x(t^-) - x(t_j^+) \right] =$$

$$= -x(0) - \left[x(t_1^+) - x(t_1^-) \right] - \left[x(t_2^+) - x(t_2^-) \right] - \ldots - \left[x(t_j^+) - x(t_j^-) \right] + x(t).$$

Отсюда,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), u(s)) ds + \sum_{0<t_j<t} \Delta x(t_j), \quad (9)$$

где $x(0)$ — пока произвольная постоянная. Для определения $x(0)$ потребуем, чтобы функция, определяемая равенством (9), удовлетворяла условию (2):

$$(A+B)x(0) = C - B\int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt - B \sum_{0<t_j<T} \Delta x(t_j). \quad (10)$$

Так как $\det(A+B) \ne 0$, то

$$x(0) = (A+B)^{-1}C - (A+B)^{-1}B\int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt - (A+B)^{-1}B \sum_{0<t_j<T} \Delta x(t_j). \quad (11)$$

Теперь учитываем значение $x(0)$, определяемое равенством (11), в (9). Тогда

$$x(t) = (A+B)^{-1}C - (A+B)^{-1}B\int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt -$$

$$-(A+B)^{-1}B \sum_{0<t_i<T} \Delta x(t_i) + \int_0^t f(s, x(s), u(s)) ds + \sum_{0<t_i<t} \Delta x(t_i) = \quad (12)$$

$$= (A+B)^{-1}C + \int_0^T K(t,\tau) f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^{P} K(t,t_i) I_i(x(t_i), v_i).$$

Таким образом, показали, что краевую задачу (1)—(3) можно представить в виде интегрального уравнения (8). Непосредственной проверкой можно показать, что решение интегрального уравнения (8) также удовлетворяет краевой задаче (1)—(3). Теорема 1 доказана.

Определим оператор

$$P : PC\left([0,T], R^n\right) \to PC\left([0,T], R^n\right)$$

по правилу:

$$(Px)(t) = (A+B)^{-1}C + \int_0^T K(t,\tau) f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^{P} M(t,t_i) I_i(x(t_i), v_i). \quad (13)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1—3. Тогда для любого $C \in R^n$ и $\left(u(\cdot),[v]\right) \in U \times \Pi^p$ краевая задача (1)—(3) имеет единственное решение, которое удовлетворяет равенству

$$x(t) = (A+B)^{-1}C + \int_0^T K(t,\tau) f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^{P} K(t,t_i) I_i(x(t_i), v_i). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $C \in R^n$ и $\left(u(\cdot),[v]\right) \in U \times \Pi^p$ фиксированы. Рассмотрим отображение $P : PC\left([0,T], R^n\right) \to PC\left([0,T], R^n\right)$, определяемое равенством (13). Тогда для любых $\omega, w \in PC\left([0,T], R^n\right)$ имеем:

$$\begin{aligned} \left|(P\omega)(t) - (Pw)(t)\right| &\le \int_0^T \left|K(t,s)\right| \cdot \left|f(s, \omega(s), u(s)) - f(s, w(s), u(s))\right| ds + \\ &+ \sum_{i=1}^{p} \left|K(t,t_i)\right| \cdot \left|I_i(\omega(t_i), v_i) - I_i(w(t_i) v_i)\right| \le \\ &\le S[K \int_0^T \left|\omega(s) - w(s)\right| ds + + \sum_{i=1}^{p} L_i \cdot \left|\omega(t_i) - w(t_i)\right| \Bigg] \le \\ &\le S\left[KT + \sum_{i=1}^{p} L_i\right] \left\|\omega(\cdot) - w(\cdot)\right\|_{PC}, \ t \in [0,T], \end{aligned} \quad (15)$$

или

$$\left\|Pv - Pw\right\|_{PC} \le L \left\|\omega - w\right\|_{PC}. \quad (16)$$

Оценка (16) показывает, что оператор P является сжимающим на $PC\left([0,T], R^n\right)$. Поэтому, согласно принципу сжимающих операторов, оператор P, определяемый равенством (13), имеет единственную неподвижную точку в $PC\Big([0,T],R^n\Big)$. Значит интегральное уравнение (8) или краевая задача (1)—(3) имеет единственное решение. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Теорема 2 содержит в себе различные частные случаи. Например, если $I_i\left(x,v\right)=0, i=0,1,...,p$, то получается система дифференциальных уравнений без импульсных воздействий. Тогда условие 3) превращается в следующее условие:

$$KTS<1\,, \tag{17}$$

которое является достаточным условием существования и единственности решения следующей краевой задачи:

$$\dot{x}=f(t,x,u), \tag{18}$$

$$Ax(0)+Bx(T)=C. \tag{19}$$

4. Градиент в задаче оптимального управления (1)—(4). Нетрудно показать, что при сделанных предположениях 1)—3) всякое решение краевой задачи (1)—(3) ограничено. Действительно, в силу ограниченности множества допустимых управлений из (14) имеем:

$$x(t)=(A+B)^{-1}C+\int_0^T K(t,\tau)f(\tau,0,u\left(\tau\right))d\tau+\sum_{i=1}^{P}K(t,t_i)I_i(0,v_i)+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\Big[f(\tau,x(\tau),u\left(\tau\right))-f(\tau,0,u\left(\tau\right))\Big]d\tau+\sum_{i=1}^{P}K(t,t_i)\Big[I_i(x(t_i),v_i)-I_i(0,v_i)\Big]$$

Отсюда,

$$\left(1-L\right)\left|x\left(t\right)\right|\le S\left[lT+\sum_{i=1}^{p}l_i\right]+\left\|\left(A+B\right)^{-1}C\right\|, \tag{21}$$

где $l=\max\limits_{t\in\left[0,T\right],u\in V}\left|f\left(t,0,u\right)\right|$, $l_i=\max\limits_{v_i\in\Pi}\left|I_i\left(0,v_i\right)\right|$.

Таким образом, из последнего имеем:

$$\left|x\right|\le\left(1-L\right)^{-1}\left\{S\left[lT+\sum_{i=1}^{p}l_i\right]+\left\|\left(A+B\right)^{-1}C\right\|\right\}\equiv R. \tag{22}$$

Сформулируем теперь некоторые дополнительные условия, на функции $f\left(t,x,u\right),I_i\left(x,v\right),i=1,2,...,p;\Phi\left(x,y\right)$, которые предполагаются выполненными для всех $\left|x\right|\le R,u\in V,v_i\in\Pi,i=1,2,...,p;0\le t\le T$.

4. Производные $f\left(t,x,u\right)$ по u ограничены, т.е. для любого $\overline{u}\in R^r$

$$\left|f_u\left(t,x,u\right)\overline{u}\right|\le K_1\left|\overline{u}\right|. \tag{23}$$

5. Производные $f\left(t,x,u\right)$ по x и u удовлетворяют условиям Липшица, то есть

$$\begin{gathered}\left|f\left(t,x+\bar{x},u+\bar{u}\right)-f\left(t,x,u\right)-\right.\\ \left.-f_x\left(t,x,u\right)\bar{x}-f_u\left(t,x,u\right)\bar{u}\right|\le K_2\left|\bar{x}\right|^2+K_3\left|\bar{u}\right|^2.\end{gathered}\tag{24}$$

6. Производные $I_i\left(x,v\right),i=0,1,...,p$ по v ограничены:

$$\left|I_{iv}\left(x,v\right)\bar{v}\right|\le L_i^{(1)}\left|\bar{v}\right|.\tag{25}$$

7. Производные $I_i\left(x,v\right),i=1,2,...,p$ по x и v удовлетворяют условиям Липшица, то есть

$$\left|I_i\left(x+\bar{x},v+\bar{v}\right)-I_i\left(x,v\right)-I_{ix}\left(x,v\right)\bar{x}-I_{iv}\left(x,v\right)\right|\le L_i^{(2)}\left|\bar{x}\right|^2+L_i^{(3)}\left|v\right|^2.\tag{26}$$

8. Функция $\Phi\left(x,y\right)$ имеет ограниченные первые производные, и эти производные удовлетворяют условиям Липшица, т.е.

$$\left|\Phi_x\left(x,y\right)\right|\le K_4;\left|\Phi_y\left(x,y\right)\right|\le K_5.\tag{27}$$

$$\begin{gathered}\left|\Phi\left(x+\bar{x},y+\bar{y}\right)-\Phi\left(x,y\right)-\left\langle\Phi_x\left(x,y\right),\bar{x}\right\rangle-\right.\\ \left.-\left\langle\Phi_y\left(x,y\right),\bar{y}\right\rangle\right|\le K_6\left|\bar{x}\right|^2+K_7\left|\bar{y}\right|^2.\end{gathered}\tag{28}$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1—4 и 6, а $\left(u\left(t\right),\left[v\right],x\left(t\right)\right)$ и $\left(u\left(t\right)+\bar{u}\left(t\right),\left[v+\bar{v}\right],x\left(t\right)+\bar{x}\left(t\right)\right)$ — два решения краевой задачи (1)—(4). Тогда

$$\left|\bar{x}\left(t\right)\right|\le c_1\left(\left\|\bar{u}\right\|+\left\|\left[v\right]\right\|\right),\tag{29}$$

где $c_1=\left(1-L\right)^{-1}S\max\left[K_1\sqrt{T},\max L_i^{(1)}\sqrt{p}\right]$.

Доказательство. Очевидно, что $\bar{x}\left(t\right)$ — является решением следующего интегрального уравнения:

$$\begin{gathered}\bar{x}(t)=\int_0^T K(t,\tau)\left[f(\tau,x(\tau)+\bar{x}\left(\tau\right),u\left(\tau\right)+\bar{u}\left(\tau\right)-f(\tau,x(\tau),u\left(\tau\right))\right]d\tau+\\ +\sum_{i=1}^{P}K(t,t_i)\left[I_i(x(t_i)+\bar{x}\left(t_i\right),v_i+\bar{v}_i)-I_i(x(t_i),v_i)\right].\end{gathered}\tag{30}$$

Здесь, учитывая условия 2, 4 и 6, получаем

$$\left|\bar{x}\left(t\right)\right|\le S\left[\int_0^T\left(K\left|\bar{x}\left(t\right)\right|+K_1\left|\bar{u}\left(t\right)\right|\right)dt\right]+S\left[\sum_{i=1}^{p}\left(L_i\left|\bar{x}\left(t_i\right)\right|+L_i^{(1)}\left|\bar{v}_i\right|\right)\right].\tag{31}$$

Отсюда легко можно получить оценку:

$$\left|\overline{x}\left(t\right)\right| \le \left(1-L\right)^{-1} S\left[K_1\sqrt{T}\left\|\overline{u}\right\| + \max L_i^{(1)}\sqrt{p}\left(\sum_{i=1}^{p}\left|\overline{v}_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (32)$$

Таким образом, из последнего имеем:

$$\left|\overline{x}\left(t\right)\right| \le \left(1-L\right)^{-1} S\max\left[K_1\sqrt{T}, \max L_i^{(1)}\sqrt{p}\right]\left(\left\|\overline{u}\right\| + \left\|\left[\overline{v}\right]\right\|\right). \qquad (33)$$

Лемма 1 доказана.

Введем системы уравнений в вариациях:

$$\frac{dz}{dt} = f_x(t, x(t), u\left(t\right))z\left(t\right) + f_u\left(t, x\left(t\right), u\left(t\right)\right)\overline{u}\left(t\right), \quad 0 \le t \le T, \; t \ne t_i. \qquad (34)$$

$$Az(0) + Bz(T) = 0. \qquad (35)$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t_i) = I_{ix}(x(t_i), v_i)z\left(t_i\right) + I_{iv_i}\left(x(t_i), v_i\right)\overline{v}_i, \; i = 1, 2, ..., p,\\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = T.\end{gathered} \qquad (36)$$

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1—7; $\left(\overline{u}\left(t\right), \left[\overline{v}\right], \overline{x}\left(t\right)\right)$ — те же, что и в лемме 1, а $z\left(t\right)$ — решение уравнения в вариациях.

Тогда

$$\left|\overline{x}\left(t\right) - z\left(t\right)\right| \le c_2\left(\left\|\overline{u}\right\|^2 + \left\|\left[\overline{v}\right]\right\|^2\right), 0 \le t \le T, \qquad (37)$$

где

$$c_2 = \left(1-L\right)^{-1} S \times \max\left\{2c_1^2\left(K_2T + \sum_{i=1}^{p} L_i^{(2)}\right) + K_3, 2c_1^2\left(K_2T + \sum_{i=1}^{p} L_i^{(2)}\right) + \max_{1 \le i \le p} L_i^{(3)}\right\}.$$

Доказательство. Функция $\overline{x}\left(t\right) - z\left(t\right)$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) - z\left(t\right) = &\int_0^T K(t,\tau) f_x(\tau, x(\tau), u\left(\tau\right))\left(\overline{x}\left(\tau\right) - z\left(\tau\right)\right)d\tau + \\ &+\sum_{i=1}^{P} K(t, t_i) I_{ix}(x(t_i), v_i)\left(\overline{x}\left(t_i\right) - z\left(t_i\right)\right) + \\ &+\sum_{i=1}^{P} K(t, t_i)\left[I_i(x(t_i) + \overline{x}\left(t_i\right), v_i + \overline{v}_i) + \right. \\ &+\int_0^T K(t,\tau)\left\{f(\tau, x(\tau) + \overline{x}\left(\tau\right), u\left(\tau\right) + \overline{u}\left(\tau\right) - f(\tau, x(\tau), u\left(\tau\right) - \right.\end{aligned} \qquad (38)$$

$$-I_i(x(t_i),v_i)-I_{ix}(x(t_i),v_i)\overline{x}\left(t_i\right)-I_{iv_i}\left(x(t_i),v_i\right)\overline{v}_i\Big\}-$$
$$-f_x\left(\tau,x(\tau),u\left(\tau\right)\right)\overline{x}\left(\tau\right)-f_u\left(\tau,x(\tau),u\left(\tau\right)\right)\overline{u}\left(\tau\right)\Big]d\tau\ .$$

Здесь, учитывая условий 2, 5 и 7, получаем следующую оценку:

$$\left|\overline{x}(t)-z\left(t\right)\right|\le\left(1-L\right)^{-1}S\times$$
$$\times\left[\int_0^T\left(K_2\left|\overline{x}\right|^2+K_3\left|\overline{u}\right|^2\right)dt+\sum_{i=1}^p\left(L_i^{(2)}\left|\overline{x}\left(t_i\right)\right|^2+L_i^{(3)}\left|\overline{v}_i\right|^2\right)\right]. \tag{39}$$

Наконец, учитывая утверждение леммы 1, получаем

$$\left|\overline{x}(t)-z\left(t\right)\right|\le\left(1-L\right)^{-1}S\times$$
$$\times\left[c_1^2\left(K_2T+\sum_{i=1}^pL_i^{(2)}\right)\left(\left\|\overline{u}\right\|+\left\|\left[\overline{v}\right]\right\|\right)^2+K_3\left\|\overline{u}\right\|^2+\sum_{i=1}^pL_i^{(3)}\left|\overline{v}_i\right|^2\right]. \tag{40}$$

Так как $\left(a+b\right)^2\le2\left(a^2+b^2\right)$, то из последнего имеем

$$\left|\overline{x}(t)-z\left(t\right)\right|\le\left(1-L\right)^{-1}S\times$$
$$\times\max\left\{2c_1^2\left(K_2T+\sum_{i=1}^pL_i^{(2)}\right)+K_3,2c_1^2\left(K_2T+\sum_{i=1}^pL_i^{(2)}\right)+\max_{1\le i\le p}L_i^{(3)}\right\}\times$$
$$\times\left(\left\|\overline{u}\right\|^2+\left\|\left[\overline{v}\right]\right\|^2\right),$$

которое требовалось доказать. Лемма 2 доказана.

Теорема 3.Пусть выполняются условия 1—8, и кроме того, $\det\left(E+I_{ix}\left(x\left(t_i\right),v_i\right)\right)\ne0,\quad i=1,2,...,p.$ Тогда функционал (5) при ограничениях (1)-(4) дифференцируем, причем его градиент имеет вид

$$J'\left(u,\left[v\right]\right)=\left(f_u'\left(t,x,u\right)\psi\left(t\right),\sum_{i=1}^pI_{iv_i}'\left(x_i,v_i\right)\psi\left(t_i\right)\right)\in L_2^r\left[0,T\right]\times R^m \tag{42}$$

где $\psi\left(t\right)$ — решение дифференциально-разностной системы

$$\frac{d\psi\left(t\right)}{dt}=-f_x'\left(t,x,u\right)\psi\left(t\right),\ t\ne t_i, \tag{43}$$

$$\Delta\psi\left(t_i\right)=-I_{ix}'\left(x\left(t_i\right),v_i\right)\left(I_{ix}'\left(x\left(t_i\right),v_i\right)+E\right)^{-1}\psi\left(t_i\right).\ i=1,2,...,p \tag{44}$$

с граничными условиями

$$A'\left(A'+B'\right)^{-1}\psi\left(T\right)+B'\left(A'+B'\right)^{-1}\psi\left(0\right)=$$
$$=B'\left(A'+B'\right)^{-1}\Phi_{x(0)}\left(x\left(0\right),x\left(T\right)\right)-A'\left(A'+B'\right)^{-1}\Phi_{x(T)}\left(x\left(0\right),x\left(T\right)\right). \tag{45}$$

Доказательство. Пусть $(u,[v]),(u+\bar{u},[v+\bar{v}])\in U\times\Pi^p$ — два допустимых управления. Тогда для приращения функционала (5) справедлива формула:

$$J(u+\bar{u},[v+\bar{v}])-J(u,[v])= \\ =\left\langle \Phi_{x(0)}(x(0),x(T)),z(0)\right\rangle+\left\langle \Phi_{x(T)}(x(0),x(T)),z(T)\right\rangle+\eta, \tag{46}$$

где

$$\eta=\left\langle \Phi_{x(0)}(x(0),x(T)),\bar{x}(0)-z(0)\right\rangle+ \\ +\left\langle \Phi_{x(T)}(x(0),x(T)),\bar{x}(T)-z(T)\right\rangle+ \\ +\Phi(x(0)+\bar{x}(0),x(T)+\bar{x}(T))-\Phi(x(0),x(T))- \\ -\left\langle \Phi_{x(0)}(x(0),x(T)),\bar{x}(0)\right\rangle-\left\langle \Phi_{x(T)}(x(0),x(T)),\bar{x}(T)\right\rangle. \tag{47}$$

К формуле (46) добавим нулевые слагаемые

$$\int_0^T\left\langle \psi(t),-\frac{dz}{dt}+f_x(t,x(t),u(t))z(t)+f_u(t,x(t),u(t))\bar{u}(t)\right\rangle dt, \tag{48}$$

$$\left\langle \lambda, Az(0)+Bz(T)\right\rangle, \tag{49}$$

где $\psi(t)\in L_2^r[0,T]$ — пока произвольная функция, а $\lambda\in R^n$ — произвольный числовой вектор.

После несложных преобразований для приращения функционала получаем следующую формулу:

$$J(u+\bar{u},[v+\bar{v}])-J(u,[v])=\sum_{i=0}^{p}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\langle \dot{\psi}(t)+H_x(t,x(t),u(t),\psi(t)),z(t)\right\rangle dt+ \\ +\int_0^T\left\langle H_u(t,x(t),u(t),\psi(t)),\bar{u}(t)\right\rangle dt+\sum_{i=1}^{p}\left\langle h_{iv_i}(x_i,v_i),\bar{v}_i\right\rangle+ \\ +\left\langle \Phi_{x(0)}(x(0),x(T))+A'\lambda+\psi(0),z(0)\right\rangle+ \\ +\left\langle \Phi_{x(T)}(x(0),x(T))+B'\lambda-\psi(T),z(T)\right\rangle+ \\ +\left\langle \Delta\psi(t_i)+I'_{ix}(x(t_i),v_i)\left(I'_{ix}(x(t_i),v_i)+E\right)^{-1}\psi(t_i),z(t_i)\right\rangle+\eta, \tag{50}$$

где $H(t,x,u,\psi)=\left\langle \psi,f(t,x,u)\right\rangle$, $h_i(x_i,v_i)=\left\langle \psi(t_i),I_i(x_i,v_i)\right\rangle$. Теперь произвольную функцию $\psi(t)\in L_2^r[0,T]$ выбираем как решение дифференциально-разностного уравнения

$$\dot{\psi}(t) = -H_x\left(t, x(t), u(t), \psi(t)\right), t \neq t_i, \tag{51}$$

$$\Delta\psi(t_i) = -I'_x\left(x(t_i), v_i\right)\left(I'_x\left(x(t_i), v_i\right) + E\right)^{-1}\psi(t_i),\ \ i = 1,2,...,p, \tag{52}$$

которое совпадает с (42), (43), а числовой вектор $\lambda \in R^n$ определяем из соотношений

$$\Phi_{x(T)}\left(x(0), x(T)\right) + B'\lambda - \psi(T) = 0, \tag{53}$$

$$\Phi_{x(0)}\left(x(0), x(T)\right) + A'\lambda + \psi(0) = 0\ . \tag{54}$$

Замечание 2. Так как в краевых условиях (53), (54) присутствует векторный параметр $\lambda \in R^n$, то система уравнений (42)—(43), (53)—(54) называется сопряженной системой в параметрическом виде.

Здесь, учитывая условие 3), можно исключить неизвестный вектор $\lambda \in R^n$. Действительно, из (53), (54) имеем:

$$\lambda = \left(A' + B'\right)^{-1}\left[\psi(T) - \psi(0) - \Phi_{x(T)}\left(x(0), x(T)\right) - \Phi_{x(0)}\left(x(0), x(T)\right)\right]. \tag{55}$$

Найденное значение учтем в (53) или (54), и после несложных преобразований получаем (45). Из равенства (47) получаем оценку:

$$\begin{aligned} |\eta| \le &\left|\Phi_{x(0)}\left(x(0), x(T)\right)\right|\left|\overline{x}(0) - z(0)\right| + \\ &+\left|\Phi_{x(T)}\left(x(0), x(T)\right)\right|\left|\overline{x}(T) - z(T)\right| + \\ &+\Big|\Phi\left(x(0) + \overline{x}(0), x(T) + \overline{x}(T)\right) - \Phi\left(x(0), x(T)\right) - \\ &-\left\langle\Phi_{x(0)}\left(x(0), x(T)\right), \overline{x}(0)\right\rangle - \left\langle\Phi_{x(T)}\left(x(0), x(T)\right), \overline{x}(T)\right\rangle\Big|. \end{aligned} \tag{56}$$

Используя условия 8 и леммы 1 и 2, из последнего неравенства имеем:

$$|\eta| \le \left[\left(K_4 + K_5\right)c_2 + c_1^2\left(K_7 + K_6\right)\right]\left(\|\overline{u}\|^2 + \|[\overline{v}]\|^2\right). \tag{57}$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Если матрицы A и B коммутативны, т.е. $AB = BA$, то граничные условия (45) сопряженной системы упрощаются:

$$A'\psi(T) + B'\psi(0) = B'\Phi_{x(0)}\left(x(0), x(T)\right) - A'\Phi_{x(T)}\left(x(0), x(T)\right).$$

5. Необходимые условия оптимальности. Имея формулы градиента для функционала (5) при ограничениях (1)—(4), можно получить необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для оптимальности управления $\left(u_*, [v]_*\right) \in U \times \Pi^p$ в задаче (1)—(5) необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$\int_0^T \left\langle H_u\left(t, x_*(t), u_*(t), \psi_*(t)\right), u(t) - u_*(t)\right\rangle dt +$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\left\langle h_{iv_i}\left(x_{i*}, v_{i*}\right), v_i - v_{i*}\right\rangle \geq 0 \tag{5}$$

для любого, $\left(u,[v]\right) \in U \times \Pi^p$, где $x_*(t) = x\left(t; u_*, [v]_*\right)$, $\psi_*(t) = = \psi\left(t; u_*, [v]_*\right)$.

Доказательство. Множество $U \times \Pi^p$, определяемое равенством (4), выпукло в $L_2[0,T] \times \Pi^p$. Кроме того, согласно теореме 3, функционал $J\left(u,[v]\right)$ дифференцируем по Фреше на $U \times \Pi^p$. Тогда в силу теоремы 3 из [10, с. 524] на элементе $\left(u_*, [v]_*\right) \in U \times \Pi^p$ необходимо выполнение неравенства $\left\langle J'\left(u_*, [v]_*\right), \left(u,[v]\right) - \left(u_*, [v]_*\right)\right\rangle \geq 0$ при всех $\left(u,[v]\right) \in U \times \Pi^p$. Отсюда и из (42) следует справедливость неравенства (58). Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует следующее очевидное следствие

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 3.Тогда для оптимальности управления $\left(u_*, [v]_*\right) \in U \times \Pi^p$ в задаче (1)—(5) необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$\int_0^T \left\langle H_u\left(t, x_*(t), u_*(t), \psi_*(t)\right), u(t) - u_*(t)\right\rangle dt \geq 0 \tag{59}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\left\langle h_{iv_i}\left(x_{i*}, v_{i*}\right), v_i - v_{i*}\right\rangle \geq 0 \tag{60}$$

для любого, $\left(u,[v]\right) \in U \times \Pi^p$, где $x_*(t) = x\left(t; u_*, [v]_*\right)$, $\psi_*(t) = = \psi\left(t; u_*, [v]_*\right)$.

6. Заключение. Теорема 1 носит вспомогательный характер и позволяет нелокальную краевую задачу представить в виде интегрального уравнения, которое, в свою очередь, упрощает исследование существования и единственности решения исходной краевой задачи. Теорема 2 дает достаточное условие существования и единственности решения краевой задачи (1)—(3) при каждом фиксированном допустимом управлении. Отметим, что из схемы доказательств теорем видно, что данную схему можно успешно применять для более сложных задач оптимального управления с нелокальными условиями при импульсных воздействиях.

Список использованной литературы:

1. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К. : Вища школа, 1987. — 287 с.
2. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. — М. : Мир, 1971. — 309 с.
3. Lakshmikantham V. Theory of Impulsive Differential Equations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov. — Singapore : World Scientific, 1989. — 434 p.
4. Benchohra M. Impulsive differential equations and inclusions / M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas. — New York : Contemporary mathematics and its application. Hindawi Publishing Corporation, 2006. — Vol. 2.
5. Selvara B. Existence of solutions for impulsive nonlinear differential equations with nonlocal conditions / B. Selvaraj, M. Mallika Arjunan, V. Kavitha // J. KSIAM. — 2009. — Vol. 13, № 3. — P. 203—215.
6. Angura A. Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations / A. Anguraj, M. Mallika Arjunan // Elect. J. Differential Equations. — Vol. 2005, № 111. — P. 1-8.
7. Ji Sh. Nonlocal Cauchy Problem for Impulsive Differential Equations in Banach Spaces / Sh. Ji, Sh. Wen // International Journal of nonlinear Science. — 2010. — Vol. 10, № 1. — P. 88–95.
8. Li M. Existence for neutral impulsive functional differential equations with nonlocal conditions / M. Li, M. Han // Indagationes Mathematicae. — 2009. — Vol. 20, № 3. — P. 435–451.
9. Самойленко А. М. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К. : Наук. думка, 1986. — 219 с.
10. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 823 с.

In the work the optimal control problem is investigated, where the state of the controlled system is described by the impulsive differential equations with non-local boundary conditions. The exictense and uniquness of the non-local impulsive bondary problem by fixed admissible controls is proved using the contraction prinsiple. The gradient of the funtional is calculated under certain conditions on the initial data. Necessary conditions for optimality of first order are obtained.

Key words: *nonlocal boundary conditions, impulsive systems, necessary conditions of optimality, the gradient of functional, the existence and uniqueness of the solutions.*

Отримано: 08.10.2012