

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

А. Я. Бомба, д-р, техн. наук, професор,**С. В. Ярошак**, канд. техн. наук

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

ПРО ОДИН ЧИСЛОВИЙ МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ БАГАТОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ

Адаптовано числовий метод квазіконформного відображення для розв'язання задач багатофазної фільтрації в нафтогазових пластах, що експлуатуються рядними системами розстановки свердловин, зокрема, встановлено особливості формування області комплексного квазіпотенціалу в залежності від послідовності введення умовних розрізів багатозв'язної області фільтрації флюїдів.

Ключові слова: *багатофазна фільтрація, квазіконформні відображення, числовий метод.*

Вступ. При моделюванні процесів витіснення у нафтогазових пластах, з використанням математичного апарату комплексного аналізу, зокрема, методу квазіконформного відображення [3,4] виникає необхідність систематизації та додаткового дослідження формування області комплексного квазіпотенціалу, в залежності від вигляду якої спрощується чи ускладнюється різницева модель відповідної оберненої задачі. Складність розв'язання задач на обернене квазіконформне відображення, в першу чергу полягає в тому, що область протікання процесу є багатозв'язною (пласт, обмежений еквіпотенціальними лініями та лініями течії), а відповідна їй область комплексного квазіпотенціалу («розрахункова») може змінювати свій вигляд (бути однолистою чи багатолистою [2; 5; 6]) в залежності від впливу різних факторів (введення комбінації умовних розрізів з метою зведення багатозв'язної області до однозв'язної, вибору потенціалів на свердловинах тощо), частина із яких описана в роботах [2; 3; 6], проте, що характерно, ці фактори не впливають на її загальну структуру, складові якої — склеєні між собою певним чином прямокутники.

У цій роботі адаптовано числовий метод квазіконформного відображення для розв'язання задач багатофазної фільтрації в нафтогазових пластах, що експлуатуються рядними системами розстановки свердловин, зокрема, встановлено особливості формування області комплексного квазіпотенціалу в залежності від послідовності введення умовних розрізів багатозв'язної області фільтрації флюїдів.

Загальна постановка задачі. Розглянемо процес двофазної ізотермічної фільтрації в пласті (див., рис. 1), обмеженому непроникним зов-

нішнім контуром L та відповідно контурами \tilde{L}_α , L_β ($\alpha = \overline{1, n^*}$, $\beta = \overline{1, n^*}$) нагнітальних (●) і експлуатаційних (○) свердловин.

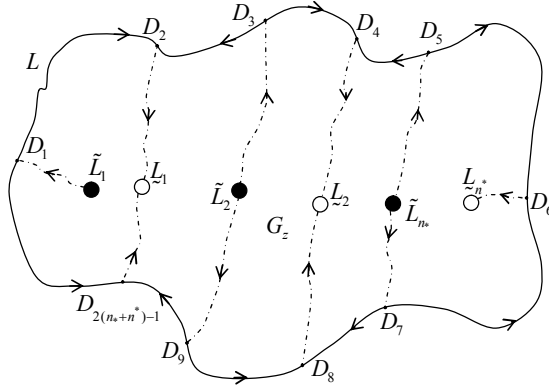


Рис. 1. Схематичне зображення пласта з $n^* + n^*$ свердловинами

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ ($p(x, y, t)$ — тиск в точці (x, y) в момент часу t , \tilde{p} — деяке характерне його значення), згідно з [1; 6; 7] представимо у вигляді:

$$\vec{v}_l = \frac{k\tilde{k}_l}{\mu_l} \text{grad} \varphi, \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div} \vec{v}_l = 0, l = \overline{1, 2}, s_1 + s_2 = 1,$$

де $s_1(x, y, t)$, $s_2(x, y, t)$ відповідно насиченості пористого середовища нафтою та водою в точці (x, y) у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини є безрозмірними); σ , k — коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту; $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s)$, $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s)$ — відносні фазові проникності ($s = s_2$); \vec{v}_l , μ_l — вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості l -тої фази. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\text{div} \vec{v} = 0, \vec{v} = \bar{k} \cdot \text{grad} \varphi, \\ \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} f(s) = 0,$$

$$\text{де } f(s) = \frac{\mu_1 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)}, \bar{k}(s) = \frac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2}.$$

Вважаємо, що на нагнітальних \tilde{L}_α та експлуатаційних L_β свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо через φ_* та φ^*), інші ділянки границі області G_z є лініями течії, вздовж яких, зокрема, має місце рівність $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0$, де

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\alpha &= \{z = x + iy : \tilde{f}_\alpha(x, y) = 0\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau) + \tilde{x}_\alpha, \\ y &= r^0 \sin(\tau) + \tilde{y}_\alpha, 0 \leq \tau < 2\pi\}, L_\beta = \{z = x + iy : f_\beta(x, y) = 0\} = \\ &= \{z : x = r^0 \cos(\tau) + x_\beta, y = r^0 \sin(\tau) + y_\beta, 0 \leq \tau < 2\pi\}, \\ L &= \bigcup_{l=1}^{2(n_* + n^* - 1)} D_l D_{l+1} \cup D_{2(n_* + n^* - 1)} D_1 = \{z : f(x, y) = 0\}. \end{aligned}$$

Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y)$ та $s = s_*$.

Згідно запропонованої в роботах [2—6] методології розв'язання нелінійних задач багатофазної фільтрації у нафтогазових пластах область протікання процесу витіснення для яких є багатозв'язною, необхідною умовою використання методу числового квазіконформного відображення та основних ідей методики поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, з метою переходу від прямої задачі до оберненої (від фізичної області до однозв'язної області комплексного квазіпотенціалу), є введення серії умовних розрізів вздовж ліній течії, що проходять через точки призупинки потоку [4—6] $D_l, l = 1, 2(n_* + n^*) - 1$.

Проблеми побудови області комплексного квазіпотенціалу. Як можна помітити, вже у випадку зображеному на рис. 2 виникає певна неоднозначність в структурі області комплексного квазіпотенціалу (рис. 2.а — багатоліста область, рис. 2.б — одноліста), що перш за все пов'язана з характером та послідовністю введення згаданих вище розрізів. Тому доцільним є проведення додаткового аналізу стосовно формування області комплексного квазіпотенціалу в залежності від кількості свердловин в ряді та послідовності введення умовних розрізів.

З метою зручності подальших викладок, розглянемо на початку простіший випадок, коли свердловини чергуються, а їх загальна кількість рівна $n_* + n^*$, причому вважається, що ряд розпочинається з нагнітальної свердловини і може закінчуватися як нагнітальною так і експлуатаційною в залежності від співвідношень між n_* та n^* .

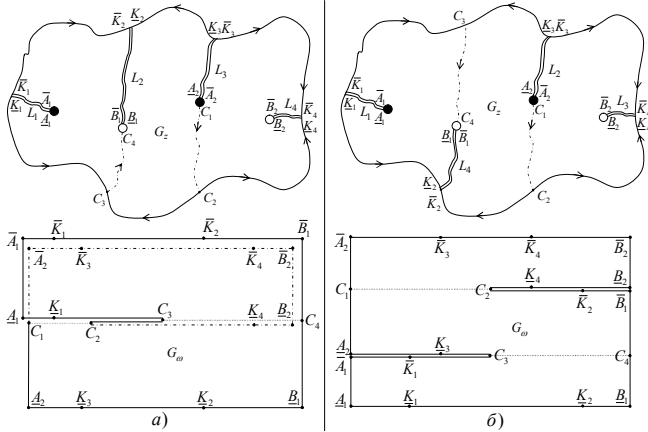


Рис. 2. Плат G_z та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_w при $n_* = n^* = 2$

На рисунках 2—4 зображено фізичні області фільтрації та відповідні області комплексного квазіпотенціалу в залежності від співвідношення значень n_* і n^* та послідовності введення умовних розрізів L_λ ($\lambda = 1, n_* + n^*$). Зокрема, на рис. 2а, 3а, 4а зображено випадки при введенні умовних розрізів фізичної області G_z (що характеризуються точками призупинки течії [4—6]), коли відповідні області комплексного квазіпотенціалу є багатолістими, а на рис. 2б, 3б, 4б — однолістими.

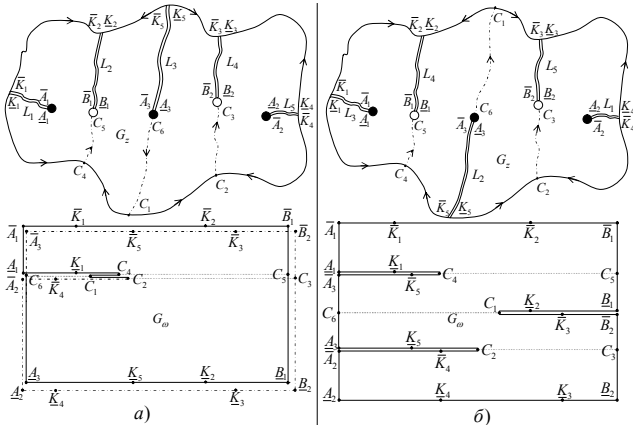


Рис. 3. Плат G_z та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_w при $n_* = 3, n^* = 2$

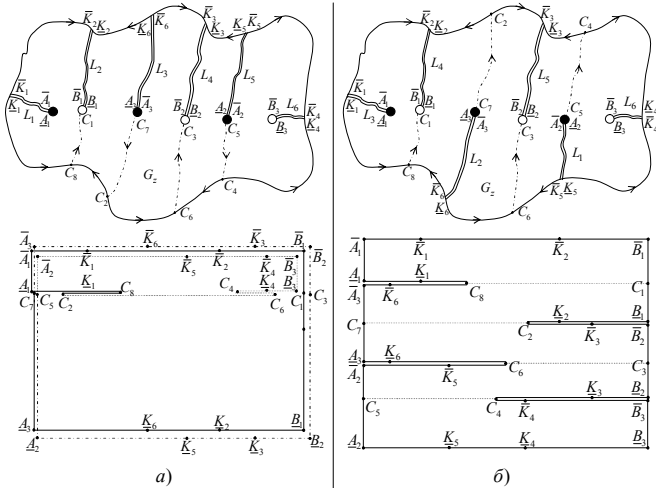


Рис. 4. Лист G_z та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω при $n_* = n^* = 3$

Безумовно, що доцільним є здійснення процедури умовного розрізування фізичної області лише таким чином, щоб відповідна область комплексного квазіпотенціалу була однолистою, це дозволить уникнути проблеми неоднозначності у виборі належності характеристичних точок течії тому чи іншому листу багатолистої поверхні, що тим самими спростить процедуру побудови різницевої задачі та алгоритму її розв'язання. Адже у випадку багатолистої області комплексного квазіпотенціалу, як було відзначено в роботах [5; 6], при побудові різницевого аналогу задачі необхідно вводити додатковий індекс для шуканих змінних, значення якого зв'яже їх з конкретним листом та обмежує область використання при розрахунках, а також призводять до додаткових затрат оперативної пам'яті при реалізації відповідних алгоритмів у вигляді прикладних програм для подальшого комп'ютерного моделювання відповідних процесів.

Таким чином для застосування методу квазіконформного відображення до розв'язування відповідних задач (в порівнянні, наприклад, з [4]) необхідно провести «підготовчий етап» щодо вибору характеристичних точок сходження та розходження течії та згідно запропонованого вище, здійснити розрізування багатозв'язної області спочатку через точки розходження течії, а потім через точки сходження в результаті чого отримана таким чином область комплексного квазіпотенціалу буде однолистою. Тоді аналогічно, як і в роботах [2—6], ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задачу на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтра-

ційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну однолисту область комплексного квазіпотенціалу.

Алгоритм розв'язку. Для переходу до оберненого квазіконформного відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області комплексного квазіпотенціалу на G_z використовуємо наступні формули [4—6]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

тоді рівняння для відшукування дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії та розподілу насиченості матимуть вигляд:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (3)$$

$$\text{де } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}.$$

Крайові умови, наприклад, для випадку, зображеного на рис. 2б мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1; \\ x(\varphi, 0) &= x_-(\varphi, Q_1), \quad y(\varphi, 0) = y_-(\varphi, Q_1), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{K_1}; \\ f(x_-(\varphi, Q_1), y_-(\varphi, Q_1)) &= 0, \quad \varphi_{K_1} \leq \varphi \leq \varphi_{C_3}; \\ f(x_+(\varphi, Q_1), y_+(\varphi, Q_1)) &= 0, \quad \varphi_{K_3} \leq \varphi \leq \varphi_{C_3}; \\ x(\varphi, Q_3) &= x_+(\varphi, Q_1), \quad y(\varphi, Q_3) = y_+(\varphi, Q_1), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{K_3}; \\ \tilde{f}_2(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_3; \\ f(x(\varphi, Q_3), y(\varphi, Q_3)) &= 0, \quad \varphi_{K_3} \leq \varphi \leq \varphi_{K_4}; \\ x(\varphi, Q_3) &= x_+(\varphi, Q_2), \quad y(\varphi, Q_3) = y_+(\varphi, Q_2), \quad \varphi_{K_4} \leq \varphi \leq \varphi^*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{f}_2(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad Q_2 \leq \psi \leq Q_3; \\
 & f(x_+(\varphi, Q_2), y_+(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_{C_2} \leq \varphi \leq \varphi_{K_4}; \\
 & f(x_-(\varphi, Q_2), y_-(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_{C_2} \leq \varphi \leq \varphi_{K_2}; \\
 & x(\varphi, 0) = x_-(\varphi, Q_2), \quad y(\varphi, 0) = y_-(\varphi, Q_2), \quad \varphi_{K_2} \leq \psi \leq \varphi^*; \\
 & \tilde{f}_1(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_2; \\
 & f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_{K_1} \leq \varphi \leq \varphi_{K_2}; \\
 & s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \\
 & \text{де } \varphi_{K_l} = \varphi(x_{K_l}, y_{K_l}), \quad x_{K_l} = x_{\bar{K}_l} = x_{\underline{K}_l}, \quad y_{K_l} = y_{\bar{K}_l} = y_{\underline{K}_l}, \quad l = \overline{1, 4}; \\
 & \varphi_{C_2} = \varphi(x_{C_2}, y_{C_2}), \quad \varphi_{C_3} = \varphi(x_{C_3}, y_{C_3}); \quad Q_1 = \oint_{\underline{A}, \bar{A}} -v_y dx + v_x dy, \\
 & Q_2 = Q_1 + \int_{\underline{A}, C_1} -v_y dx + v_x dy, \quad Q_3 = Q_2 + \int_{C_1, \bar{A}} -v_y dx + v_x dy.
 \end{aligned}$$

Відзначимо, що використання ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі (представлення його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно). А саме, за фіксованим розподілом насиченості s розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення: будуюмо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри; за знайденими фільтраційними характеристиками знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційних свердловин.

Різницевий аналог задачі дослідження багатофазної фільтрації та алгоритм її розв'язання будуватиметься аналогічно як і в роботах [2—6], шляхом введення в області комплексного квазіпотенціалу рівномірної ортогональної сітки з вузлами в точках (φ_i, ψ_j) ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$), відносно якої здійснюється апроксимація рівнянь (1)—(3), наприклад, так [4—6]

$$\begin{aligned}
 & \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \\
 & \quad + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0, \\
 & \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \\
 & \quad + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} (f(s_{i,j}) - f(s_{i-1,j})),$$

де

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad \bar{k}_{i,j \pm 1/2} = \frac{\bar{k}_{i,j \pm 1} + \bar{k}_{i,j}}{2},$$

$$\bar{k}_{i \pm 1/2, j} = \frac{\bar{k}_{i \pm 1, j} + \bar{k}_{i, j}}{2}, \quad \gamma_l = \frac{\Delta \varphi_l}{\Delta \psi},$$

та відповідних їм граничних та початкових умов. З наступним вибором кроку по часу, параметрів розбиття області комплексного квазіпотенціалу (що визначають положення вузлів (φ_i, ψ_j) сітки) та точності роботи алгоритму, початкових наближень координат граничних вузлів гідродинамічної сітки і початкового наближення координат її внутрішніх вузлів. Після чого знаходимо значення квазіконформних інваріантів. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання відповідних (2) різницевих аналогів. Після цього підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин витрат (дебітів свердловин). Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі: є стабілізація витрат; стабілізація граничних вузлів [6] тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з різницевим аналогом рівняння (3) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

Висновок. Числовий метод квазіконформного відображення адаптовано для розв'язання задач багатофазної фільтрації в нафтогазових пластах, що експлуатуються рядними системами розстановки свердловин, зокрема, встановлено особливості формування області комплексного квазіпотенціалу в залежності від послідовності введення умовних розрізів багатозв'язної області фільтрації флюїдів.

Список використаних джерел:

1. Баренблатт Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик — М. : Недра, 1972. — 288 с.
2. Бомба А. Я. Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях / А. Я. Бомба, В. В. Скопецкий, С. В. Ярошак // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 4. — С. 64–72.

3. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечський. — К. : Наукова думка, 2007. — 308 с.
4. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Доповіді НАН України. — 2010. — № 10 — С. 34–40.
5. Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Обчислювальна та прикладна математика. — 2010. — № 2. — С. 3–13.
6. Bomba A. Ya. Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions / A. Ya. Bomba, S. V Yaroschak // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 184, №. 1. — P. 56–69.
7. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle // Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic. — 2006. — 531 p.

Adapted numerical method of quasiconformal mapping for solving problems multiphase filtration in oil and gas reservoirs exploited the in-line arrangement of wells systems, in particular, the specific features of the formation of the integrated quasipotentials depending on the sequence of administration of conditional transects multiply connected region of fluid filtration.

Key words: *multiphase filtration, quasiconformal mappings, numerical method.*

Отримано: 10.04.2013

УДК 681.3.057:518.12:621.314.6:537:312.62

А. А. Верлань, канд. техн. наук

Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ИСТОЧНИКОВ ЭЛЕКТРОПИТАНИЯ

Рассмотрены вопросы построения и анализа систем контроля (АСК), встроенных во вторичные источники электропитания (ВДЕЖ) постоянного напряжения, особенности АСК ВДЕЖ. Описаны алгоритм функционирования АСУ ВДЕЖ. Приведены временную диаграмму работы элементов стабилизированного преобразователя, защиты и АСК, постановка ку задачи построения алгоритма моделирования проверки функционально-логической работоспособности схемы АСУ ВДЕЖ.

Ключевые слова: *автоматизированные системы контроля, вторичные источники электропитания, техническая диагностика.*

Введение. Качество выдаваемой на радиоэлектронную аппаратуру энергии вторичными источниками электропитания (ВИЭП) в значительной мере определяется уровнем защитных устройств, контролирующих работу ВИЭП и предотвращающих распространение возникших в ВИЭП