19. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування грунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій : [монографія] / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористув., 2010. — 277 с.

In the article was formulated the statement and carried out the mathematical modelling of problem of stressed and deformed state (SDS) of a multi-layered soil masses taking into account the heat and mass transfer at presence of a level of subsoil waters. There is obtained the numerical solution of respective boundary value problem in one-dimensional statement by the method of finite differences. As an example, the SDS of a three-layered soil masses problem has been investigated. Using created software a series was conducted of numeral experiments and their analysis.

Key words: *stressed and deformed state, soil masses, level of subsoil waters, the heat and mass transfer, method of finite differences.*

Отримано: 26.04.2013

УДК 517.947

А. П. Громик[*], канд. техн. наук,
І. М. Конет[**], д-р фіз.-мат. наук, професор

[*] Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський,
[**] Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У НАПІВОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливних процесів (гіперболічної крайової задачі) у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Ключові слова: *моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральне перетворення, функція впливу, функція Гріна.*

Вступ. Коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме диференціальне рівняння коливань гіперболічного типу (хвильове рівняння)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = f\left(t, P\right),$$

де Δ_3 — тривимірний оператор Лапласа у відповідній системі координат тривимірного евклідового простору, P — точка в цьому просторі.

Зрозуміло, що для адекватного моделювання коливного процесу до складу математичної моделі крім хвильового рівняння потрібно долучити ще певні початкові та крайові умови. Таким чином, математичною моделлю процесу є гіперболічна крайова задача математичної фізики [1]. На цей час досить детально вивчено гіперболічні крайові задачі математичної фізики однорідних середовищ. Але у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів у будівництві, техніці, технологіях як математичні моделі виникають крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних сердовищах, коли коефіцієнти рівння є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими [2; 3].

Окрім методу відокремлення змінних [4] одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач математичної фізики є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх інтегральне зображення. У той же час, для досить широкого класу задач в кусково-однорідних середовищах ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [5—7].

У цій статті, яка є логічним продовженням [8], ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливного процесу в напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі, побудований методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна).

Постановка задачі. Розглянемо задачу про структуру обмеженого на множині

$$D = \left\{\left(t, r, \varphi, z\right); t > 0; r \in \left(0, R\right); R < +\infty; \varphi \in \left(0; \varphi_0\right); \varphi_0 < 2\pi; z \in \mathrm{I}_n^+ = \right.$$

$$\left. = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathrm{I}_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} \left(l_{j-1}; l_j\right); l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}; l_{n+1} \equiv \infty \right\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + a_j^2 u_j = \\ = f_j\left(t, r, \varphi, z\right), \;\; z \in \mathrm{I}_j;\; j = \overline{1, n+1} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0} = g_j^1\left(r, \varphi, z\right); \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_j^2\;\left(r, \varphi, z\right); z \in \mathrm{I}_j;\; j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial r^k}\Big|_{r=0} = 0; \left(\frac{\partial}{\partial r} + h\right) u_j\Big|_{r=R} = \theta_j\left(t, \varphi, z\right); z \in \mathrm{I}_j;\; j = \overline{1, n+1}; k = 0, 1; \tag{3}$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) u_1\Big|_{z=l_0} = g_0\left(t, r, \varphi\right); \frac{\partial^k u_{n+1}}{\partial z^k}\Big|_{z=+\infty} = 0;\; k = 0, 1, \tag{4}$$

умовами спряження [7]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0;\; j = 1, 2;\; k = \overline{1, n} \tag{5}$$

та одними з крайових умов на гранях клина [5]

$$u_j\Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z), u_j\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z);\; z \in I_j;\; j = \overline{1, n+1}; \tag{6}$$

$$u_j\Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z), \frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z);\; z \in I_j;\; j = \overline{1, n+1}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z), u_j\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z);\; z \in I_j;\; j = \overline{1, n+1}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z), \frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z); z \in I_j;\; j = \overline{1, n+1}; \tag{9}$$

де a_{rj}, a_{zj}, a_j, α_{js}^k, β_{js}^k — деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} \equiv \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0;\;\; c_{1k} c_{2k} > 0; \left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), ..., f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\},$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z); g_2^1(r, \varphi, z), ..., g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z); g_2^2(r, \varphi, z), ..., g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\};$$

$$\theta\left(t, \varphi, z\right) = \left\{\theta_1\left(t, \varphi, z\right), \theta_2\left(t, \varphi, z\right), ..., \theta_{n+1}\left(t, \varphi, z\right)\right\};$$

$$g_0(t,r,\varphi), g_{sj}(t,r,z),\ \ \omega_{sj}(t,r,z);\ \ s=\overline{1,4};\ j=\overline{1,n+1}$$ —

задані обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z);u_2(t,r,\varphi,z),...,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$$ —

шукана функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $a_j^2=0,$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
2) у випадку $\alpha_{11}^k=0,\ \ \beta_{11}^k=1;\alpha_{12}^k=0,\beta_{12}^k=1;\alpha_{21}^k=E_1^k,\beta_{21}^k=0;\ \ \alpha_{22}^k\equiv E_2^k,$ $\beta_{22}^k=0,$ де E_1^k,E_2^k — модулі Юнга, $k=\overline{1,n}$, умови спряження (5) є умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках, розглянута задача є математичною моделлю коливних процесів у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Основна частина. Припустимо, що розв'язки гіперболічних крайових задач (1)—(5), (6); (1)—(5), (7); (1)—(5), (8); (1)—(5), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [5; 7]. Іншими словами, розв'язки розглянутих задач шукаємо у класах двічі неперервно диференційованих за змінними (t,r,φ,z) функцій, для яких існують відповідні прямі та обернені інтегральні перетворення за геометричними змінними (r,φ,z).

Побудовані за відомою логічною схемою [6] методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [5], інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду щодо радіальної змінної r [5], та гібридного інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі $(l_0;+\infty)$ з n точками спряження щодо змінної z [7], єдині розв'язки гіперболічних початково-крайових задач (1)—(5), (6); (1)—(5), (7); (1)—(5), (8); (1)—(5), (9) визначають функції

$$u_{j,ik}(t,r,\varphi,z)=$$

$$=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^R\int_0^{\varphi_0}\int_{l_{p-1}}^{l_p}E_{jp,ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)f_1(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho\ d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^R\int_0^{\varphi_0}\int_{l_{p-1}}^{l_p}E_{jp,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\ d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^R\int_0^{\varphi_0}\int_{l_{p-1}}^{l_p}E_{jp,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\ d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+a_{rj}^2\sum_{p=1}^{n=1}\int_0^t\int_0^R\int_{l_{p-1}}^{l_p}Q_{jp,ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau+ \qquad (10)$$

$$+\int_0^t\int_0^R\int_0^{\varphi_0}W_{j,ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_0(\tau,\rho,\alpha)\rho\, d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+a_{rj}^2\sum_{p=1}^{n=1}\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_{l_{p-1}}^{l_p}W_{jp,ik}(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z,\xi)\theta_k\left(\tau,\alpha,\xi\right)\sigma_p d\xi d\alpha d\tau;$$

$$j=\overline{1,n+1}; i,k=1,2.$$

У формулах (10) беруть участь головні розв’язки:

компоненти

$$E_{jp,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}E_{jp,m,ik}(t,r,\rho,z,\xi)U_{m,ik}(\varphi)U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти

$$Q_{jp,ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}E_{jp,m,ik}(t-\tau,r,\rho,z,\xi)U_{m,ik}(\varphi)\Phi_{m,ik}(u_j)$$

тангенціальної матриці Гріна (тангенціальні функції), компоненти

$$W_{j,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1,ik}\left(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,l_0\right)$$

аплікатної матриці Гріна та компоненти

$$W_{jp,ik}(t,r,\varphi,\alpha,z,\xi)=RE_{jp,ik}\left(t,r,R,\varphi,\alpha,z,\xi\right)$$

радіальної матриці Гріна (функції Гріна) відповідних гіперболічних крайових задач, де

$$E_{jp,m,ik}(t,r,\rho,z,\xi)=\frac{4}{\pi\varphi_0}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{sin(\Delta(\beta_s,\beta)t)}{\Delta(\beta_s,\beta)}V_j(z,\beta)V_k(\xi,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\times$$

$$\times\frac{J_\nu\left(\beta_s r\right)J_\nu\left(\beta_s\rho\right)}{\left\|J_\nu\left(\beta_s r\right)\right\|^2};\ \nu=\beta_{m,ik};\ j,p=\overline{1,n+1}; i,k=1,2;$$

$$\Delta^2\left(\beta_s,\beta\right)=\beta^2+a_{r1}^2\beta_s^2+a_1^2.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jp,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)$, тангенціальних функцій $Q_{jp,ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_{j,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$, $W_{jp,ik}(t,r,\varphi,\alpha,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_{j,ik}\left(t,r,\varphi,z\right)$ визначені формулами (10), задовольнють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), умови спряження (5) та одну з крайових умов (6)—(9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22) в сенсі теорії узагальнених функцій [9].

Єдиність розв'язків (10) випливає із їх структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу, тангенціальних функцій та функцій Гріна).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{zj} \equiv h_j > 0$ формули (10) визначають структури розв'язків гіперболічних крайових задач в напівобмеженому ізотропному кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Зауваження 2. Параметр h дає можливість виділяти із формул (10) розв'язки крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r = R$ крайових умов 1-го роду $(h \to \infty)$, та 2-го роду $(h \to 0)$.

Зауваження 3. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0$ крайової умови 1-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1\right)$, 2-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 0\right)$ та 3-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = H > 0\right)$.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень Фур'є у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливних процесів у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних еволюційних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
3. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
4. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
5. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.

6. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
7. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
8. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених кусково-однорідних циліндрах / І. М. Конет // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — 2012. — Вип. 9(18). — С. 117–134.
9. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
10. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 247 с.

The method of integral transforms in combination with the method of main solutions built an exact analytical solution of a mathematical model of oscillatory processes (hyperbolic boundary value problem) in semi-confined wedge-shaped piecewise homogeneous solid cylinder.

Key words: *modelling, oscillating, hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transformation, the influence function, Green's function.*

Отримано: 19.03.2013

УДК 519.2,536.532

В. О. Єрьоменко, канд. фіз.-мат. наук,
О. В. Кочан, канд. техн. наук

Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

ЗАСТОСУВАННЯ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ДРЕЙФУ ФУНКЦІЇ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТЕРМОПАР

Розглянуто проблеми, що виникають при моделюванні наслідків процесу деградації електродів термопар — похибки часового дрейфу функції перетворення та похибки від набутої в процесі тривалої експлуатації термоелектричної неоднорідності термоелектродів. Показано, що, при використанні класичного методу найменших квадратів (МНК), отримані при умові рівності нулю вільного члена оцінки моделей є зміщеними. Оцінки параметрів моделей, в яких вільний член не рівний нулю володіють всіма властивостями МНК-оцінок, але вони не мають фізичного змісту.

Ключові слова: *метод найменших квадратів, МНК-оцінки параметрів моделі, термопари, похибка від часового дрейфу, похибка від набуто термоелектричної неоднорідності.*

Вступ. Для вимірювання температури, особливо у діапазоні 500-1500 °С, у промисловості та наукових дослідженнях найбільш вживаними давачами є термоелектричні термометри (ТТ), чутливим елеме-

