The worked out algorithm of forming of voltage allows to get the transient of starting on condition of support of permanent value of current of anchor of motor.

Key words: *motor of direct current, start, elektric voltage of excitation winding, controlled voltage start, voltage control, field current regulation.*

Отримано: 27.03.2013

УДК 519.6

О. О. Ситник*, канд. техн. наук,
С. Ю. Протасов*, канд. техн. наук,
В. А. Федорчук,** д-р техн. наук

* Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси,
** Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

ІНТЕГРАЛЬНІ МАКРОМОДЕЛІ ДИНАМІЧНИХ ОБ’ЄКТІВ

У статті розглядаються питання науково-технічної задачі розвитку методу моделювання динамічних об’єктів на основі інтегральних макромоделей.

Ключові слова: *інтегральна макромодель, диференціальне рівняння, динамічні характеристики.*

Вступ та постановка задачі. Дослідження багатьох явищ і об’єктів шляхом побудови і вивчення їх математичних моделей набуло все більшого розповсюдження, охоплюючи різноманітні напрямки в технічних науках таких, як електротехніка, зв'язок, будівельна механіка, акустика, гідравліка, пневматика, пневмоніка, автоматика, теплотехніка тощо. Характерною особливістю сучасних динамічних об'єктів у техніці є висока складність, внаслідок чого їх математичні моделі, як правило, мають високу розмірність, що в багатьох випадках розв’язування практичних задач призводить до труднощів отримання якісних і кількісних результатів [1]. Ці труднощі найбільш притаманні задачам моделювання об’єктів з розподіленими параметрами, для математичного опису яких застосовуються диференціальні рівняння з частинними похідними, які відносяться до найбільш складних видів математичних моделей [2]. Задача побудови та числової реалізації ефективних динамічних моделей об’єктів з розподіленими параметрами додатково ускладнюється в тих розповсюджених випадках, коли модель «вбудовується» в діючі системи керування, контролю або діагностування і повинна враховувати необхідність функціонування в реальному часі.

Ефективним підходом для подолання вказаних ускладнень є використання макромоделей об'єктів, що досліджуються. При цьому передбачається, що макромоделі задовольняють вимогам адекватності і, разом з тим, мають більш зручну форму чи структуру, або спрощують процес числової (комп'ютерної) реалізації з досягненням необхідної точності результатів [3]. Цей підхід є особливо важливим стосовно до розробки і функціонування автоматизованих та автоматичних систем управління технологічними процесами, об'єктами машинобудування, електронними системами, рухомими об'єктами тощо. Сучасні засоби керування, діагностики, спостереження та інші створюються на основі використання відповідних математичних моделей. Програмне забезпечення в сучасних розробках систем комп'ютерного керування несе в собі основну складову вартості — близько 80%, залишаючи лише 20% сумарного кошторису на інші витрати, що також підкреслює важливість отримання більш ефективних математичних моделей [4].

Ґрунтовною основою для побудови макромоделей об'єктів з розподіленими параметрами є аналітичні методи інтегральних представлень розв'язків низки класів диференціальних рівнянь з частинними похідними, які можуть бути доповнені використанням досягнень в галузі числових методів із застосуванням сучасних комп'ютерних засобів [5]. Разом з тим практика свідчить про те, що застосуванню комп'ютера передують трудомісткі етапи дослідження методів математичного опису конкретної задачі, пошуку вдалої математичної моделі, яка достатньо якісно відображає об'єкт моделювання і є доступною для дослідження та отримання кількісних результатів [1—5].

Інтегральні макромоделі є самостійним і своєрідним видом математичного опису задач динаміки [3]. На відміну від параметричних моделей, для формування яких в якості вихідних даних використовуються задані параметри (постійні або змінні) структурованого об'єкта, динамічні макромоделі формуються на основі заданих динамічних характеристик об'єкта, його ланок або елементів. Динамічні характеристики являють собою функціональні залежності (функції), які можуть бути отримані у вигляді експериментальних даних або в аналітичному вигляді, якщо існує розвинена теорія досліджуваного об'єкта.

Клас динамічних макромоделей складають різноманітні типи інтегральних рівнянь та їх систем, властивості яких визначаються структурою рівнянь ядер, що входять у рівняння інтегральних операторів. Ядра інтегральних операторів представляють собою функції двох (і більше) змінних, сформовані за заданими динамічними характеристиками об'єкта [6].

Один і той же реальний динамічний об'єкт може бути описаний різними як еквівалентними так і нееквівалентними моделями. З однієї сторони модель повинна бути адекватною, тобто із заданою точністю відповідати даним спостерігача, апріорній інформації про систему, фізичним законам і поставленій прикладній меті [3]. З іншого боку, складність моделі мусить вирішувати питання про можливість її подальшого використання, лише відтворюючи ті властивості об'єкт чи системи, які мають сенс, виходячи з мети та задач конкретного дослідження, а не явища взагалі. Останнє положення може бути використане для суттєвого спрощення математичних моделей, тобто для побудови математичних та комп'ютерних макромоделей.

Інтегральні макромоделі. Під макромоделлю в даній роботі розуміється математичний опис процесів у динамічному об'єкті (системі), що представлений у загальному випадку в довільній математичній формі, має необхідний рівень адекватності, мінімальну складність серед можливих альтернативних варіантів та забезпечує завдяки цьому ефективну числову (комп'ютерну) реалізацію [3]. Виходячи з такого визначення, можна вважати, що макромодель динаміки деякого об'єкта може відображати його поведінку як реакцію певної просторової частини об'єкта чи певного місця в його структурі, не торкаючись в цьому відображенні (повністю або частково) поведінки іншого зовнішнього чи внутрішнього «змісту» об'єкта. Крім того, макромодель може відображати (безпосередньо аналізувати) лише частину властивостей чи характеристик об'єкта, тобто ту їх частину, яка відповідає реальній, обмеженій за своїм обсягом, меті дослідження.

Клас об'єктів, що розглядаються, володіють властивістю неперервної функціональної залежності вихідних сигналів від вхідних [3] (рис. 1), яку математично в загальному випадку можна представити у вигляді операторної моделі явного або неявного виду відповідно

$$\begin{gathered} Y(x,t) = A\left[Q(x,t); F(x,t)\right], \\ A\left[Y(x,t); F(x,t); Q(x,t)\right] = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

де A — довільний (в загальному випадку невідомий) оператор, F — вектор вхідних і Y — вихідних координат (сигналів) динамічного об'єкта, Q — вектор параметрів, x і t — просторова та часова незалежні змінні.

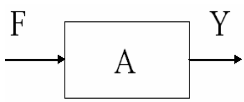

Рис. 1. *Об'єкт з одним входом і виходом*

При побудові макромоделей динамічних об'єктів за експериментальними даними враховується, що значення вхідного $f(t)$ і вихідного $y(t)$ сигналів вимірюються в моменти часу $0 \le t_1 \le t_2 \ldots \le t_N \le T$ з деякими похибками.

На відміну від традиційних методів класифікації об'єктів моделювання (за фізичною природою, призначенням, конструктивним виконанням тощо) динамічні об'єкти класифікуються за показниками, безпосередньо зв'язаними із задачами їх математичного моделювання [7].

Як стаціонарні, так і нестаціонарні об'єкти можна розподілити на дві підгрупи: об'єкти із зосередженими і розподіленими параметрами. Для стаціонарних об'єктів із зосередженими параметрами $Q(x,t) = const$ в (1), тобто не залежить від *x* та *t*. Для стаціонарних об'єктів із розподіленими параметрами $Q(x,t) = Q(x)$, тобто залежить від просторової координати *x*.

Відмітимо основні задачі побудови макромоделей динамічних об'єктів вигляду (1):

1) задача знаходження структури оператора *A* (для динамічних об'єктів з невизначеною і квазівизначеною структурою) такого, щоб в (1) виконувалися умови існування неявної функції $Y(x, t) = Y(x, t, F, 0)$ тоді модель визначається рівністю
$$Y\left(x,t\right) = \Phi\left[F(x,t), Q(x,t)\right]; \tag{2}$$
2) задача знаходження з рівняння (1) вектора $Q(x,t)$ при відомій структурі оператора *A*, що задовольняє достатнім умовам існування в (1) неявної функції $Q(x,t)$ у вигляді
$$Q(x,t) = \psi\left[Y(x,t); F(x,t)\right],$$

де $\psi[\bullet,\bullet]$ — довільний оператор з відповідними областями визначення і значень.

Традиційний підхід до побудови динамічної макромоделі базується, як правило, на застосуванні звичайних диференціальних рівнянь вигляду
$$\sum_{i=0}^{r} a_i y^{(i)}(t) = f(t), \quad t \in \left[0, T\right], \tag{3}$$

де a_i — коефіцієнти, що підлягають визначенню. Модель (3) є параметричною і її застосування може бути ускладненим, якщо вихідними даними для побудови моделі є динамічні характеристики, тобто функції, а не параметри.

Дослідження останніх років показують, що в багатьох випадках доцільно разом із моделями (3) розглядати більш загальні інтегральні динамічні моделі вигляду
$$A(t)y(t) + \int\limits_{G(t)} K(t,\tau)y(\tau)d\tau = F(t), \; t,\tau \in G, \tag{4}$$

де $A(t)$ і $K(t,\tau)$ — задані або експериментально отримані функції, $y(t)$ – вихідний сигнал, $F(t)$ — функція зовнішнього впливу вхідного сигналу f, G — деяка скінчена або нескінченна множина. Моделі (3) і (4) в загальному випадку можуть доповнювати одна одну і, при необхідності здійснювати взаємоконтроль в сенсі точності моделювання. Разом з тим, для достатньо широких класів динамічних об’єктів застосування інтегральних динамічних макромоделей дозволяє отримати основу для побудови високостійких числових алгоритмів розрахунку із забезпеченням високого рівня адекватності.

Розглянемо лінійні моделі об'єктів з одним входом і виходом. Рівняння динаміки (в явному вигляді) в разі довільної лінійної моделі об'єкта має вигляд:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t,\tau) x(\tau) d\tau, \tag{5}$$

де $k(t,\tau)$ — імпульсна перехідна функція (ІПФ), яка і являє собою динамічну характеристику [8]. З (5) випливає, що імпульсна перехідна функція є реакцією лінійної моделі об'єкта на збурення у вигляді δ-функції Дірака в момент $t=\tau$ (при нульових початкових умовах). З (5) випливає також, що на значення $y(t)$ в момент часу t впливають значення $x(t)$ в усі попередні моменти часу. ІПФ відіграє роль вагової функції і характеризує степінь впливу вхідного сигналу $x(t)$, поданого в момент τ, на формування $y(t)$ в даний момент t.

Об'єкт, для якого $k(t,\tau) \neq 0$ при деяких скільки завгодно великих t, є об'єктом з нескінченною пам'яттю. Для таких об'єктів справедливе співвідношення (5). Прикладом об'єктів, для яких вплив попередніх вхідних сигналів зменшується, але не зникає, є: $k(t,\tau) = e^{-\delta(t-\tau)}$, $k(t,\tau) = e^{-\delta(t-\tau)} \cos \omega\tau$ ($\delta \geq 0$) тощо.

Об'єктом з кінцевою пам'яттю є такий об'єкт, ІПФ якого перетворюється в нуль через кінцевий проміжок часу T після подачі сигналу у вигляді δ-функції в момент τ, тобто $k(t, \tau) = 0$ при $t - \tau > T$.

У цьому випадку

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} k(t,\tau) x(\tau) d\tau. \tag{6}$$

У загальному випадку тип реакції на сигнал у вигляді δ-функції залежить від моменту його подачі τ та від моменту його спостереження t, тобто $k(t,\tau)$ є функцією двох аргументів. Для об'єктів з постійними параметрами (стаціонарних) тип реакції залежить тільки від часу з моменту подачі сигналу збурення, а саме від різниці $t - \tau$. Тому для стаціонарних об'єктів $k(t,\tau) = k(t-\tau)$ і співвідношення (5) набуває вигляду

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)k(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}k(u)x(t-u)du\,,\; u=t-\tau. \qquad (7)$$

Для лінійних моделей об'єктів з *m* входами і *n* виходами рівняння динаміки має вигляд

$$y_i(t)=\sum_{s=1}^{m}\int_{-\infty}^{t}k_{js}(t,\tau)x_s(\tau)d\tau\,,\; j=\overline{1,n}, \qquad (8)$$

де $k_{js}(t,\tau)$ — ІПФ по *js*-му каналу, яка визначається як реакція на *j*-му виході на збурення $x_s(u)=\delta(u-\tau)$ при $x_p\equiv 0$ (для всіх $p\neq$ s). Якщо внутрішня структура об'єкта з часом не змінюється, то (8) набуде вигляду

$$y_j(t)=\sum_{s=1}^{m}\int_{-\infty}^{t}k_{js}(t-\tau)x_s(\tau)d\tau=\sum_{s=1}^{m}\int_{0}^{\infty}x_s(t-u)k_{js}(u)du,$$
$$u=t-\tau,\; j=\overline{1,n}. \qquad (9)$$

Таким чином, ІПФ багатовимірного об'єкта задається матрицею *K*, елементи якої k_{js} є ІПФ по *js*-му каналу.

У випадку, коли модель об'єкта складається із *l* послідовно з'єднаних лінійних моделей об'єктів з ІПФ $k_i(t,\tau)$, $i=\overline{1,l}$, ІПФ $k(t,\tau)$ об'єкта в цілому, згідно (7), буде мати вигляд

$$k(t,\tau)=\int_{-\infty}^{t}du_1k_l(t,u_1)\int_{-\infty}^{u_1}du_2k_{l-t}(u_1,u_2)\ldots$$
$$\ldots\int_{-\infty}^{u_{l-2}}du_{l-1}k_2(u_{l-2,}u_{l-1})k_1(u_{l-1},\tau). \qquad (10)$$

Для *l* паралельно з'єднаних лінійних моделей об'єктів з ІПФ $k_i(t,\tau)$, $i=\overline{1,l}$, ІПФ $k(t,\tau)$ має вигляд

$$k(t,\tau)=\sum_{i=1}^{t}k_i(t-\tau).$$

Зауважимо, що ІПФ, яка обумовлена співвідношенням (10), залежить від порядку з'єднання лінійних моделей об'єктів.

Тому для повного опису лінійної моделі об'єкта досить знати його реакцію на будь-який один із типів елементарних сигналів збурення. У залежності від вигляду обраного сигналу збурення можна отримувати різні характеристики моделі. Якщо подати на вхід моделі об'єкта одиничну ступінчасту функцію

$$x(t,\tau)=\begin{cases}0, t<\tau,\\ 1, t\geq\tau.\end{cases} \qquad (11)$$

Тоді на виході моделі об'єкта, відповідно до (5), отримаємо

$$y(t)=h(t,\tau)=\begin{cases}0,\ t<\tau,\\ \int\limits_{\tau}^{t}k(t,u)du,\ \ t\geq\tau.\end{cases} \qquad (12)$$

Функція $h(t, \tau)$ описує перехідний процес при нульових початкових умовах і сигналі збурення вигляду (11), є перехідною характеристикою лінійного динамічного об’єкта. Про якість моделі об’єкта судять з вигляду перехідного процесу, який описує перехідна характеристика.

Оскільки, кожна характеристика однозначно описує модель об’єкта, то такі характеристики повинні бути між собою зв’язані і виражатися одна через іншу. З (12) випливає, що

$$k(t,\tau)=\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial\tau}.$$

Перехідна характеристика стаціонарної лінійної моделі об'єкта $h(t,\tau)$ буде залежати від $t-\tau=\zeta$:

$$h(\zeta)=\begin{cases}0, & \zeta<0,\\ \int\limits_{0}^{\zeta}k(u)du, & \zeta\geq 0,\end{cases}$$

та зв'язок $h(\zeta)$ з ІПФ буде мати вигляд

$$h(\zeta)=\int\limits_{0}^{\zeta}k(u)du,\ k(\zeta)=\frac{\partial h}{\partial\zeta}.$$

Часто зручно в якості елементарних збурень брати гармонійні коливання всіх можливих частот. При досить загальних обмеженнях будь-яку функцію $f(x)$ можна представити інтегралом Фур’є. Тому, знаючи реакцію лінійної моделі об’єкта на гармонійні коливання всіх можливих частот і користуючись принципом суперпозиції, можна визначити реакцію на довільне збурення.

У випадку лінійної стаціонарної моделі об'єкта візьмемо перетворення Фур'є від обох частин співвідношення (7). У силу теореми про згортку двох функцій отримаємо $Y(i\omega) = \Phi(i\omega)*X(i\omega)$ де $X(i\omega)$, $Y(i\omega)$, $\Phi(i\omega)$ — відповідно перетворення Фур'є від $x(t)$, $y(t)$ і $k(t-\tau)$.

Частотна характеристика і ІПФ зв'язані між собою за допомогою прямого і зворотного перетворень Фур'є

$$\Phi(i\omega)=\int\limits_{0}^{\infty}k(u)e^{-i\omega u}du,\ \ k(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(i\omega)e^{i\omega u}du\ .$$

Перетворення Фур'є можна застосовувати лише для абсолютно інтегрованих функцій [8]. Однак, слід відзначити, що умова абсолютного інтегрування не виконується для багатьох функцій, що використовуються при аналізі динамічних об'єктів. Наприклад, цій умові не задовольняє одинична функція, синусоїда $\sin \omega t$, функція, зростаюча як степінь t, показникова функція вигляду $e^{\delta t}$, $\delta > 0$ тощо. У разі нездійсненності умови абсолютного інтегрування використаємо перетворення Лапласа для функцій $f(t)$, що задовольняють умову

$$f\left(t\right)=0,\quad t<0 \tag{13}$$

не тільки, коли $f(t)$ абсолютно інтегровна, але і тоді, коли можна вибрати таке позитивне число c, що

$$\int_0^\infty \left|f\left(t\right)\right|e^{-ct}dt<\infty\ . \tag{14}$$

При виконанні (13), (14) перетворення Лапласа задається виразом [9]

$$F(p)=L[f(t)]=\int_0^\infty f\left(t\right)e^{-pt}dt,\ \operatorname{Re} p\geq c\ .$$

Нехай для $x(t)$, $y(t)$ існують зображення в просторі Лапласа. Тоді, застосувавши перетворення Лапласа до двох частин співвідношення (7), отримаємо

$$Y\left(p\right)=X\left(p\right)\cdot W\left(p\right),$$

де $X(p)$, $Y(p)$, $W(p)$ — зображення функцій $x(t)$, $y(t)$, $k(u)$ відповідно. Відношення зображення вихідної величини $Y(p)$ до зображення вхідної величини $X(p)$ (при нульових початкових умовах), як відомо, є передатною функцією лінійного об'єкта

Передатна функція і ІПФ зв'язані за допомогою прямого та зворотного перетворення Лапласа

$$W(p)=\int_0^\infty k\left(u\right)e^{-pu}du,$$

$$k\left(u\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W\left(p\right)e^{pu}dp,\ u\geq 0.$$

Частотна характеристика є окремим випадком передатної функції $W(p)$ при $p=i\omega$:

$$W\left(i\omega\right)=\lim W\left(c+i\omega\right),\ c\to 0,\ c>0.$$

Передатна функція для лінійних моделей об'єктів зі змінними параметрами залежить від двох змінних: частоти ω і моменту подачі збурення і зв'язана з ІПФ співвідношенням

$$W\left(p,t\right)=\int\limits_{-\infty}^{t}k\left(t,\tau\right)e^{-p\left(t-\tau\right)}dt.$$

Подамо на вхід лінійного стаціонарного об'єкта сигнал $x(t) = a \sin \omega t$.

Тоді на підставі співвідношення (7)

$$y\left(t\right)=a\left|W\left(i\omega\right)\right|\sin\left(\omega t+a\right), \qquad (15)$$

де $a = arctg\dfrac{B\left(\omega\right)}{A\left(\omega\right)}$, $A(\omega)$ і $B(\omega)$ — відповідно дійсна і уявна частини $W(i\omega)$. З (15) випливає, що вимушені коливання, викликані в лінійному об'єкті гармонійним впливом, є також гармонійною функцією часу, що має ту ж частоту ω, що і вплив, але відрізняється від останнього за амплітудою та фазою, причому $W(i\omega)$ вказує у скільки разів змінилася вихідна амплітуда щодо a (зсув по фазі для вихідного сигналу). Величини $W(i\omega)$ та a залежать від частоти ω. Існує певна частота $\omega = \omega_o$ така, що об'єкт не пропускає сигнали з частотою $\omega \geq \omega_o$. Частота ω_o є частотою зрізу.

Аналогічно можна показати, що знаючи $W(p)$ можна визначити, яким чином перетвориться сигнал типу e^{pt}, який поданий на вхід об'єкта. Застосовуючи до $Y(i\omega)$ та $Y(p)$ відповідно зворотні перетворення Фур'є або Лапласа, отримаємо

$$y\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Y\left(i\omega\right)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}X\left(i\omega\right)W\left(i\omega\right)e^{i\omega t}d\omega\,, \qquad (16)$$

$$y\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}X\left(p\right)W\left(p\right)e^{itp}dp\,. \qquad (17)$$

Із співвідношень (16), (17) випливає, що якщо відома $W(i\omega)$ або $W(p)$, то є можливість обчислити не лише параметри вимушених коливань на виході об'єкта, але і перехідний процес, який виникає в ньому при будь-якому впливі $x(t)$ на його вході. Тому передатні функції можуть розглядатися як повноцінні моделі лінійного об'єкта. Структурний підхід дає можливість представляти реальні динамічні моделі об'єктів як кінцеву комбінацію простих моделей і, крім того, визначати динамічні характеристики реальних об'єктів [8].

Традиційними моделями об'єктів із розподіленими параметрами (ОРП) є диференціальні рівняння з частинними похідними, розв'язок яких є складною обчислювальною задачею, особливо в тих випадках, коли необхідно визначати реакцію об'єкта при зміні впливу зовнішнього середовища [3; 8]. Тому ефективною в даному випадку є макромодель у вигляді інтегрального оператора, який визначає однозначну залежність між вхідним сигналом $\omega(x_1, t)$, $x_1 \in D_1$, $t \geq t_0$ і вихідним сигналом $Q(x_2, t)$, $x_2 \in D_2$, $t \geq t_0$:

$$Q(x_2,t) = \int_{t_0}^{t} \int_{D_1} G(x_2,t,\xi,\tau)\omega(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ x_2 \in D_0, t \geq t_0. \qquad (18)$$

Дана інтегральна модель визначається ядром $G(x, t, \xi, \tau)$, яке є функцією чотирьох аргументів: двох просторових $x \in D_2$, $\xi \in D_1$ і двох часових $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$. Ядро $G(x, t, \xi, \tau)$ є імпульсною перехідною функцією ОРП і показує реакцію ланки в точці $x_2 \in D_2$ в момент $t \geq t_0$ за умови одиничного імпульсного збурення, на її вході прикладеного в просторовій точці $x_1 = \xi$ в момент часу $t = \tau$.

Слід зазначити, що вихідний сигнал $Q(x_2, t)$, $x_2 \in D_2$, $t \in \Omega$, лінійної розподіленої ланки практично є розв'язком деякої лінійної задачі: задачі Коші, крайової задачі, лінійного інтегрального рівняння тощо. Символічно зв'язок між вхідним сигналом $\omega(x_1, t)$, $x_1 \in D_1$, $t \in \Omega$, лінійного ОРП і вихідним сигналом $Q(x_2, t)$ задається рівнянням

$$l\left(x_2, t, Q(x_2, t)\right) = \omega(x_1, t),\ x_1 \in D_1,\ x_2 \in D_2,\ t \in \Omega, \qquad (19)$$

де l — деякий лінійний оператор. Тут вхідний сигнал $\omega(x_1, t)$ описує всі зовнішні вхідні сигнали (параметри), включаючи початкові і граничні функції. Задання функції $\omega(x_1, t)$ однозначно визначає розв'язок рівняння (19), тобто існує лінійний оператор, l^{-1} такий, що

$$Q(x_2, t) = l^{-1}\left(x_2, t, \omega(x_1, t)\right).$$

Якщо параметри ОРП не залежать від часу, то він є стаціонарним і характеризується тим, що його імпульсна перехідна функція залежить не від чотирьох, а вже тільки від трьох незалежних змінних (аргументів), і має вигляд

$$G(x, t, \xi, \tau) = G(x, \xi, t - \tau),$$

тобто функція G залежить вже не від часових аргументів t і τ, а тільки від їх різниці $t - \tau$. Поведінка такої ланки інваріантна щодо зсувів за часом. Тому за початок відліку часу без обмеження спільності можна прийняти нульовий момент часу, тобто вважати $t \geq 0$. Таким чином, інтегральний оператор, який описує ОРП в такому випадку матиме вигляд

$$Q(x_2, t) = \int_{t_0}^{t} \int_{D_1} G(x_2, \xi, t - \tau)\omega(\xi, \tau)d\xi d\tau. \qquad (20)$$

Принципово для отримання моделі у вигляді інтегрального оператора можуть застосовуватись два методи: операційний, тобто аналітичний, на основі перетворення Лапласа (або Карсона-Лапласа), або експериментальний — на основі обробки результатів натурного експерименту [8].

Застосування операційного методу припускає отримання зображення функції G інтегрального оператора (20) та наступне визначення відповідного оригінала будь-яким із доступних способів. Такий підхід означає використання відомого апарату передатних функцій як проміжного кроку для отримання моделі вигляду (20) у дійсній (часовій) області.

Зворотне перетворення Лапласа [9]

$$k(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(p) e^{pt} dp,$$

для передатної функції $W(p)$ дозволяє отримати оригінал-функцію $k(t)$, яка не залежить від вхідних дій і називається імпульсною перехідною характеристикою або імпульсною перехідною функцією об'єкта з передатною функцією $W(p)$. Якщо зображення вхідного сигналу $X(p)$, а вихідного — $Y(p)$, то $Y(p) = W(p)X(p)$ і при вхідному сигналі $X(p) = 1$ маємо $Y(p) = W(p)$. Звідси видно, що імпульсна перехідна характеристика системи $k(t)$ є реакцією об'єкта на вхідний сигнал, перетворення за Лапласом якого дорівнює одиниці, тобто дельта-функції $\delta(t)$, яка дорівнює нулю при всіх значеннях, окрім $t = 0$, де вона перетворюється в нескінченність.

Імпульсна перехідна характеристика $k(t)$ будь-якого стаціонарного динамічного об'єкта задовольняє двом умовам:

$$\int_0^\infty \left| k(t) \right| dt < \infty; \; k(t) = 0 \;\text{ при }\; t < 0.$$

Перша з них є умовою стійкості системи, а друга характеризує неможливість появи реакції системи, що фізично реалізовується, до початку дії вхідного сигналу.

Якщо застосувати до $W(p)$ зворотне перетворення Карсона-Лапласа, отримаємо функцію $f(t) = \dfrac{1}{2\pi j} \displaystyle\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} \frac{W(p)}{p} dp,$ яка також не залежить від вхідної дії і називається перехідною характеристикою системи з передатною функцією $W(p)$.

При $X(p)=1$ маємо $Y(p)=W(p)$, тобто перехідна характеристика є реакцією системи на вхідну дію, перетворення якої по Карсону-Лапласу дорівнює одиниці. Такою дією є одинична ступінчаста функція. Отже, перехідна характеристика може бути отримана експериментально, як реакція системи на одиничну ступінчасту дію.

Висновки. Таким чином, складність задач математичного моделювання динамічних об'єктів призводить до необхідності застосування розвитку методу макромоделювання. Разом з цим запропоновано застосування інтегральних динамічних макромоделей, що дозволяють отримати основу для побудови високостійких числових алгоритмів розрахунку із забезпеченням високого рівня адекватності.

Список використаних джерел:

1. Васильєв В. В. Моделирование динамических систем: Аспекты мониторинга и обработки сигналов / В. В. Васильев, Г. И. Грездов, Л. А. Симак и др. — К. : НАН Украины, 2002. — 344 с.
2. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1975. — 568 с.
3. Протасов С. Ю. Методи та засоби формування і комп'ютерної реалізації інтегральних макромоделей стаціонарних динамічних об'єктів з розподіленими параметрами : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 01.05.02 / С. Ю. Протасов. — Черкаси, 2012. — 20 с.
4. Матвійчук, Я.М. Математичне макромоделювання динамічних систем: теорія і практика / Я.М. Матвійчук. — Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2000. — 215 с.
5. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ : справочное пособие / В. В. Иванов. — К. : Наук. думка, 1986. — 584 с.
6. Верлань А. Ф. Интегральное уравнение: Методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 542 с.
7. Сытник А. А. О реализации интегральных моделей в задаче динамической коррекции измерительного преобразователя / А. А. Сытник, К. Н. Ключка, С. Ю. Протасов // Интегральные уравнения — 2009 : сб. тезисов конф., 26–29 января 2009. — К. : ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины, 2009. — С. 131-133.
8. Протасов С. Ю. Динамические характеристики линейных объектов с переменными параметрами / С. Ю. Протасов // Зб. наук. пр. ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України «Моделювання та інформаційні технології». — К., 2010. — №56. — С. 64–71.
9. Мартыненко В.С. Операционное исчесление / В. С. Мартыненко. — К. : Выща школа, 1990. — 359 с.

The article the questions an scientific and technical problem of the modeling method dynamic objects on the basis of integral macromodels.

Key words: *integral macromodel, differential equation, dynamical characteristics.*

Отримано: 18.04.2013