

УДК 519.3

**А. Н. Хомченко**, д-р физ.-мат. наук, профессор,**Е. В. Рым**, магистр

Черноморский государственный университет

имени Петра Могилы, г. Николаев

### «ПАРАДОКС ЗЕНКЕВИЧА» НА ТРЕУГОЛЬНОМ КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Исключение внутреннего узла на треугольном элементе третьего порядка по схеме Сьярле-Равьяра нарушает физическую адекватность распределения локальных нагрузок. Предложено альтернативное правило исключения внутреннего узла.

**Ключевые слова:** *треугольный конечный элемент третьего порядка, парадокс Зенкевича, исключение внутреннего узла.*

**Постановка проблемы.** В методе конечных элементов (МКЭ) особое место занимают изопараметрические элементы. Их функции формы играют тройственную роль (обычно пишут лишь о двойственной роли). Во-первых, функции формы решают геометрическую задачу преобразования КЭ с кривыми границами в элемент с прямоугольными границами и наоборот. Во-вторых, с помощью функций формы описывают поведение полевой функции (строят интерполянт). Наконец, в-третьих, путем интегрирования функций формы решается задача поузловой локализации равномерной нагрузки. Большинство моделей КЭ с первыми двумя задачами справляются вполне удовлетворительно. В задачах поузловой локализации равномерной массовой силы возникают трудности в связи с появлением отрицательных узловых нагрузок на элементах высших порядков. Как правило, «негативизм» в угловых узлах возникает после исключения внутренних узлов. В качестве примера можно назвать КЭ серендипова семейства, где этот недостаток («парадокс Зенкевича») долгое время считался непреодолимым. Вероятно, что и сегодня еще не все знают о появлении альтернативных моделей серендиповых элементов, свободных от этого недостатка.

Внутренние узлы, как известно, нежелательны. Однако, их приходится вводить на КЭ высших порядков при построении функций формы матричным методом. Это касается не только прямоугольных, но и треугольных КЭ. Формально процедура исключения внутренних узлов проста и понятна, хотя далеко не всегда удается обеспечить физическое правдоподобие спектра узловых нагрузок модифицированного КЭ. На прямоугольных КЭ уже найдены рациональные правила исключения внутренних узлов, позволяющие получать физиче-

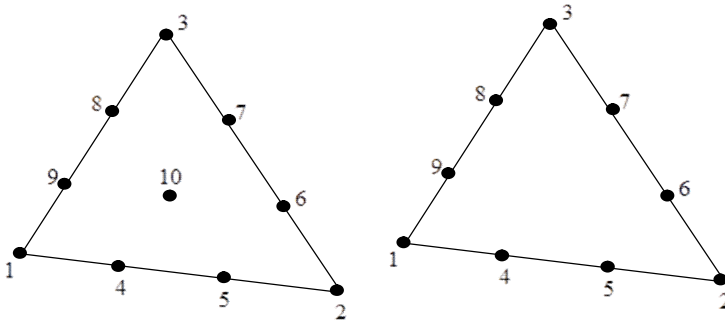
ски адекватные спектры узловых нагрузок. На треугольниках подобные спектры в доступных источниках не обнаружены. Ниже рассмотрено известное физически неадекватное распределение на треугольнике 3-го порядка (с одним внутренним узлом). Приведены различные варианты построения физически правдоподобных спектров.

**Анализ предшествующих публикаций.** Треугольники образуют наиболее распространенное семейство в конечно-элементном анализе. Основная причина популярности треугольников состоит в возможности гибкого их использования при работе с геометрическими областями сложной формы. Базисные функции треугольного КЭ любого порядка можно выразить через барицентрические координаты симплекса. О треугольных КЭ можно прочитать в книгах [1-3]. Парадоксальное поузловое распределение на КЭ серендипова семейства О. Зенкевич описал в [1]. Возможности построения физически адекватных распределений на серендиповых КЭ изучаются в [4].

В 1972 году французские математики Сьярле (Ciarlet) и Равьяр (Raviart) [3] предложили правило исключения внутреннего узла в треугольном КЭ 3-го порядка. Это поучительный пример того, как математически правильный «рецепт» приводит к физически абсурдному результату. Подобное произошло в 1968 году, когда Эргатудис, Айронс и Зенкевич [1] при подборе серендиповых полиномов упустили из виду изменения в спектре узловых нагрузок исходной (лагранжевой) модели.

**Цель работы** — на примере Сьярле-Равьяра выяснить причины возникновения «негативизма» в спектре узловых нагрузок треугольного КЭ. Построить математически обоснованное и физически адекватное поузловое распределение нагрузки после исключения внутреннего узла.

**Основная часть.** На рис. 1 показаны: лагранжева модель треугольного КЭ (10 узлов) и его модификация (без узла в центре тяжести).



*Рис. 1. Треугольные КЭ 3-го порядка: лагранжева модель (10 узлов); модификация (9 узлов)*

Обозначим через  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) функции формы треугольника 3-го порядка лагранжева типа. Как известно [1—3], эти функции можно выразить через барицентрические координаты треугольника (симплекса) с узлами в вершинах:

$$N_1 = \frac{1}{2} L_1 (3L_1 - 1)(3L_1 - 2). \quad (1)$$

Из (1) легко получить  $N_2$  и  $N_3$ , где  $L_1, L_2, L_3$  — барицентрические координаты. Для функции формы в промежуточном узле, например,  $N_4$  имеем

$$N_4 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1). \quad (2)$$

Из (2) легко получаются остальные функции в промежуточных узлах на границе КЭ. Наконец,

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3. \quad (3)$$

Напомним свойства барицентрических координат

$$L_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & (i = k), \\ 0, & (i \neq k). \end{cases} \quad (1 \leq i, k \leq 3), \quad (4)$$

где  $i$  — номер функции;  $k$  — номер узла.

Свойства барицентрических координат (4) регламентируют свойства функций формы на треугольном КЭ любого порядка. В нашем случае

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & (i = k), \\ 0, & (i \neq k). \end{cases} \quad (1 \leq i, k \leq 10), \quad (5)$$

Обозначим через  $\gamma_i$  узловую нагрузку в узле  $i$ . Эта нагрузка, как известно, численно равна средней аппликате функции  $N_i$  на треугольнике  $\Delta$ :

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_{\Delta} N_i dS, \quad (6)$$

где,  $S$  — площадь элемента.

Вычисления по формуле (6) дают следующий спектр:

$$\gamma_i = \frac{1}{30}, \quad i = 1, 2, 3; \quad \gamma_i = \frac{3}{40}, \quad i = 4, \dots, 9; \quad \gamma_{10} = \frac{9}{20}.$$

Исключить внутренний узел можно путем распределения  $N_{10}$  по граничным узлам:

$$\bar{N}_i = N_i + \alpha_i \cdot N_{10}, \quad i = 1, \dots, 9. \quad (7)$$

Здесь  $\bar{N}_i$  — новая функция, отвечающая узлу  $i$  модифицированной (нецентрированной) модели;  $\alpha_i$  — доля нагрузки, которую пере-

даёт узел 10 граничному узлу  $i$ . Сьярле и Равьяр предложили следующую схему распределения нагрузки  $\gamma_{10}$  по граничным узлам [3]:

$$\alpha_i = \begin{cases} -\frac{1}{6}, & (i = 1, 2, 3) \\ \frac{1}{4}, & (i = 4, \dots, 9) \end{cases} \quad (8)$$

Попытаемся прокомментировать (хотя это трудно) схему конденсации (8). Напомним, что конденсация — это накопление (уплотнение). При естественной конденсации уплотняются граничные узлы за счет центрального. Новые нагрузки будем обозначать через  $p_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ).

По схеме (8) каждый угловой узел отдаёт (?) центральному узлу больше возможного:  $-\frac{1}{6} \cdot \frac{9}{20} = -\frac{3}{40}$ . При этом в вершинах треуголь-

ника появляются узлы-«дебиторы»:  $p_i = \frac{1}{30} - \frac{3}{40} = -\frac{1}{24}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). В

центре накапливается нагрузка  $\frac{9}{20} + \frac{9}{40} = \frac{27}{40}$ , которую теперь нужно

распределить между шестью промежуточными узлами на границе

( $i = 4, \dots, 9$ ):  $p_i = \frac{3}{40} + \frac{1}{6} \cdot \frac{27}{40} = \frac{3}{16}$ . Проверка:  $\frac{3}{16} \cdot 6 - \frac{1}{24} \cdot 3 = 1$ .

Как видим, эта схема математически правильная, однако физически неправдоподобная. Трудно представить, что треугольная пластинка массой в 1 г. испытывает в некоторых точках гравитационное «отталкивание». Можно не сомневаться, что Сьярле и Равьяр нашли бы адекватное распределение, если бы с самого начала помнили о задаче локализации единичной нагрузки. С этой точки зрения правильно схематизировать распределение совсем нетрудно. Подходящих распределений множество. Например, при  $\alpha_i = \frac{1}{9}$  ( $i = 1, \dots, 9$ )

«центральный» вес распределяется равномерно:  $p_i = \frac{1}{12}$  ( $i = 1, 2, 3$ );

$p_i = \frac{1}{8}$  ( $i = 4, \dots, 9$ ).

$$\text{Если } \alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{12} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{1}{8} & (i = 4, \dots, 9), \end{cases} \text{ то } p_i = \begin{cases} \frac{17}{240} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{21}{160} & (i = 4, \dots, 9). \end{cases}$$

$$\text{Если } \alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{15} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{2}{15} & (i = 4, \dots, 9), \end{cases} \text{ то } p_i = \begin{cases} \frac{19}{300} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{27}{200} & (i = 4, \dots, 9). \end{cases}$$

$$\text{Если } \alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{18} & (i = 1, 2, 3) \\ \frac{5}{36} & (i = 4, \dots, 9) \end{cases}, \text{ то } p_i = \begin{cases} \frac{7}{120} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{11}{80} & (i = 4, \dots, 9). \end{cases}$$

Интерполяционный полином нецентрированной модели имеет вид:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^9 \bar{N}_i(x, y) \cdot \Phi_i,$$

где  $\Phi_i$  — значения интерполируемой функции в узлах на границе. Функции формы  $\bar{N}_i(x, y)$ , как обычно удовлетворяют интерполяционной гипотезе Лагранжа (5). Треугольник без центрального узла интересен тем, что на границе элемента мы имеем пример интерполяции, а внутри элемента — аппроксимации.

Среди физически адекватных распределений есть такое, которое можно подтвердить экспериментально. Для этого достаточно провести серию компьютерных экспериментов со случайными блужданиями и поглощениями частиц в узлах на границах элемента. Понятно, что распределение Сьярле-Равьяра невозможно подтвердить экспериментально, так как относительная частота поглощений не может быть отрицательной.

Физический смысл коэффициентов  $\alpha_i$  понятен из комментариев к схеме Сьярле-Равьяра. Остановимся на геометрической интерпретации  $\alpha_i$ . Из формулы (7) следует, что коэффициент  $\alpha_i$  численно равен значению аппликаты функции  $\bar{N}_i$  в центре тяжести треугольника. Изменяя  $\alpha_i$ , мы изменяем рельеф поверхности  $\bar{N}_i$ , что влияет на интегральное среднее функции формы, т.е.  $p_i$ .

Что касается базисных функций треугольника 3-го порядка, то их не обязательно находить методом обратной матрицы  $10 \times 10$ . Нами разработан нематричный метод конструирования базисов треугольных КЭ [5].

**Выводы.** Конструктивно доказано существование множества математически обоснованных и физически адекватных процедур исключения 10-го узла треугольного КЭ третьего порядка.

### Список использованной литературы:

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
2. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. — М. : Мир, 1981. — 304 с.
3. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. — М. : Мир, 1981. — 216 с.
4. Литвиненко Е. И. Внутренние моды конечных элементов: преобразование лагранжевых моделей в серендиповы / Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. — Херсон : ХНТУ, 2012. — Вып. 2 (45). — С. 205–210.
5. Хомченко А. Н. Геометричне моделювання на дискретних елементах / А. Н. Хомченко, Г. Я. Тулученко. — Херсон : ОЛДИ-плюс, 2007. — 270 с.

The exclusion of an internal node of a triangular element of the third order according to the scheme of Ciarlet-Raviart violates the physical adequacy of the distribution of the local loads. An alternative rule of the exclusion of an internal node is offered.

**Key words:** *the triangular finite element of the third order, Zienkiewicz's Paradox, the exclusion of an internal node.*

Отримано: 23.04.2013