9. Філатова І. А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану багатошарового масиву при наявності рівня грунтових вод / І. А. Філатова // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — К., 2008. — Вип. 1. — С. 161–165.

Mathematical modelling of soil layer stress-strain state change under binding fluid injection inside it in the one-dimensional case was conducted. This can be used to assess hydropower buildings stability and reliability under their foundation fixing. The analytical and numerical solution of this problem was founded. All the data obtained via numerical experiments were analysed.

Key words: *mathematical model, stress strain state, free boundary, numerical solution, finite difference method, binding fluid, injecting.*

Отримано: 20.11.2013

УДК 517.947

А. П. Громик[*], канд. техн. наук,
І. М. Конет[**], д-р фіз.-мат. наук, професор

[*] Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський,
[**]Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У НАПІВОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливних процесів (гіперболічної крайової задачі) у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Ключові слова: *моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральне перетворення, функція впливу, функція Гріна.*

Вступ. Відомо, що коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме диференціальне рівняння коливань гіперболічного типу (хвильове рівняння)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = f\left(t, P\right),$$

де Δ_3 — тривимірний оператор Лапласа у відповідній системі координат тривимірного евклідового простору, P — точка в цьому просторі.

Зрозуміло, що для адекватного моделювання коливного процесу до складу математичної моделі крім хвильового рівняння потрібно долучити ще певні початкові та крайові умови. Таким чином, математичною моделлю процесу є гіперболічна крайова задача математичної фізики [1]. На цей час досить детально вивчено гіперболічні крайові задачі математичної фізики однорідних середовищ. Але у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів у будівництві, техніці, технологіях як математичні моделі виникають крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних сердовищах, коли коефіцієнти рівння є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими [2; 3].

Окрім методу відокремлення змінних [4] одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач математичної фізики є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх інтегральне зображення. У той же час, для досить широкого класу задач в кусково-однорідних середовищах ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [5–7].

У цій статті, яка є логічним продовженням [8], ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливного процесу в напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі, побудований методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна).

Постановка задачі. Розглянемо задачу про структуру обмеженого на множині $D = \left\{\left(t, r, \varphi, z\right); t > 0; r \in \left(R_0, R\right), R_0 > 0, R < +\infty;\right.$

$$\left.\varphi \in \left[0; \varphi_0\right); \varphi_0 < 2\pi; z \in \mathrm{I}_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathrm{I}_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} \left(l_{j-1}; l_j\right); l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}; l_{n+1} \equiv \infty\right\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + a_j^2 u_j = f_j\left(t, r, \varphi, z\right), \tag{1}$$

$$z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0} = g_j^1\left(r, \varphi, z\right); \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0} = g_j^2\ \left(r, \varphi, z\right); z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\begin{gathered} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + h_1\right) u_j\Big|_{r=R_0} = \theta_j^1\left(t, \varphi, z\right); \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + h_2\right) u_j\Big|_{r=R} = \theta_j^2\left(t, \varphi, z\right); z \in \mathrm{I}_j; j = \overline{1, n+1}; \end{gathered} \tag{3}$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) u_1\Bigg|_{z=l_0} = g_0\left(t, r, \varphi\right); \left.\frac{\partial^k u_{n+1}}{\partial z^k}\right|_{z=+\infty} = 0;\ k = 0, 1, \tag{4}$$

умовами спряження [7]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k} = 0;\ j = 1, 2;\ k = \overline{1, n} \tag{5}$$

та одними з крайових умов на гранях клина [5]

$$u_j\Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z), u_j\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z);\ z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}; \tag{6}$$

$$u_j\Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z), \left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z);\ z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}; \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z), u_j\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z);\ z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z), \left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z); z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}, \tag{9}$$

де a_{rj}, a_{zj}, a_j, α_{js}^1, β_{js}^1 — деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} \equiv \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0;\ \ c_{1k} c_{2k} > 0; \left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), ..., f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\},$$

$$g^1(r,\varphi,z)=\{g_1^1(r,\varphi,z);g_2^1(r,\varphi,z),...,g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\};$$
$$g^2(r,\varphi,z)=\{g_1^2(r,\varphi,z);g_2^2(r,\varphi,z),...,g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\};$$
$$\theta^1(t,\varphi,z)=\left\{\theta_1^1(t,\varphi,z),\theta_2^1(t,\varphi,z),...,\theta_{n+1}^1(t,\varphi,z)\right\};$$
$$\theta^2(t,\varphi,z)=\left\{\theta_1^2(t,\varphi,z),\theta_2^2(t,\varphi,z),...,\theta_{n+1}^2(t,\varphi,z)\right\};$$

$g_0(t,r,\varphi), g_{sj}(t,r,z),\ \omega_{sj}(t,r,z);\ s=\overline{1,4};\ j=\overline{1,n+1}$ — задані обмежені неперервні функції; $u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z);u_2(t,r,\varphi,z),...,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$ — шукана функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $a_j^2=0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
2) у випадку $\alpha_{11}^k=0,\ \beta_{11}^k=1;\ \alpha_{12}^k=0,\ \beta_{12}^k=1;\ \alpha_{21}^k=E_1^k,\ \beta_{21}^k=0;$ $\alpha_{22}^k\equiv E_2^k,\ \beta_{22}^k=0,$ де E_1^k,E_2^k — модулі Юнга, $k=\overline{1,n}$, умови спряження (5) є умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках, розглянута задача є математичною моделлю коливних процесів у напівобмеженому ортотропному кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Основна частина. Припустимо, що розв'язки гіперболічних крайових задач (1)–(5), (6); (1)–(5), (7); (1)–(5), (8); (1)–(5), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [5; 7]. Іншими словами, розв'язки розглянутих задач шукаємо у класах двічі неперервно диференційованих за змінними (t,r,φ,z) функцій, для яких існують відповідні прямі та обернені інтегральні перетворення за геометричними змінними (r,φ,z).

Побудовані за відомою логічною схемою [6] методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [5], інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду щодо радіальної змінної r [5], та гібридного інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі $(l_0;+\infty)$ з n точками спряження щодо змінної z [7], єдині розв'язки гіперболічних початково-крайових задач (1)–(5), (6); (1)–(5), (7); (1)–(5), (8); (1)–(5), (9) визначають функції

$$u_{j,ik}(t,r,\varphi,z)=$$
$$=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_0}^R\int_0^{\varphi_0}\int_{l_{p-1}}^{l_p}E_{jp,ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho\, d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_0}^{R}\int_{0}^{\varphi_0}\int_{l_{p-1}}^{l_p}E_{jp,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_0}^{R}\int_{0}^{\varphi_0}\int_{l_{p-1}}^{l_p}E_{jp,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+a_{rj}^2\sum_{p=1}^{n+1}\int_{0}^{t}\int_{R_0}^{R}\int_{l_{p-1}}^{l_p}Q_{jp,ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau+ \tag{10}$$

$$+\int_{0}^{t}\int_{R_0}^{R}\int_{0}^{\varphi_0}W_{j,ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_0(\tau,\rho,\alpha)\rho\, d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+a_{rj}^2\sum_{p=1}^{n+1}\int_{0}^{t}\int_{0}^{\varphi_0}\int_{l_{p-1}}^{l_p}\Big[W_{jp,ik}^1(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z,\xi)\theta_p^1\left(\tau,\alpha,\xi\right)+$$

$$+W_{jp,ik}^2(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z,\xi)\theta_p^2\left(\tau,\alpha,\xi\right)\Big]\sigma_p d\xi d\alpha d\tau;$$

$$j,p=\overline{1,n+1};i,k=1,2.$$

У формулах (10) беруть участь головні розв'язки: компоненти

$$E_{jp,ik}\left(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}E_{jp,m,ik}\left(t,r,\rho,z,\xi\right)U_{m,ik}\left(\varphi\right)U_{m,ik}\left(\alpha\right)$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти

$$Q_{jp,ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}E_{jp,m,ik}(t-\tau,r,\rho,z,\xi)U_{m,ik}(\varphi)\Phi_{m,ik}(u_j)$$

тангенціальної матриці Гріна (тангенціальні функції), компоненти

$$W_{j,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=-\sigma_1a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1,ik}\left(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,l_0\right)$$

аплікатної матриці Гріна, компоненти

$$W_{jp,ik}^1(t,r,\varphi,\alpha,z,\xi)=R_0E_{jp,ik}\left(t,r,R_0,\varphi,\alpha,z,\xi\right)$$

лівої радіальної матриці Гріна (функції Гріна) та компоненти

$$W_{jp,ik}^2(t,r,\varphi,\alpha,z,\xi)=RE_{jp,ik}\left(t,r,R,\varphi,\alpha,z,\xi\right)$$

правої радіальної матриці Гріна (функції Гріна) відповідних гіперболічних крайових задач, де

$$E_{jp,m,ik}(t,r,\rho,z,\xi)=\frac{4}{\pi\varphi_0}\sum_{s=1}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin(\Delta(\beta_s,\beta)t)}{\Delta(\beta_s,\beta)}V_j(z,\beta)V_p(\xi,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\times$$

$$\times\frac{f_{\nu}\left(\beta_s r,\beta_s R\right)f_{\nu}\left(\beta_s\rho,\beta_s R\right)}{\left\|f_{\nu}\left(\beta_s r,\beta_s R\right)\right\|^2};\ \nu=\beta_{m,ik};\ j,p=\overline{1,n+1};i,k=1,2;$$

$$\Delta^2\left(\beta_s,\beta\right)=\beta^2+a_{r1}^2\beta_s^2+a_1^2.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jp,ik}(t,\tau,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)$, тангенціальних функцій $Q_{jp,ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_{j,ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$, $W_{jp,ik}^{s}(t,r,\varphi,\alpha,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_{j,ik}(t,r,\varphi,z)$ визначені формулами (10), задовольнюють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), умови спряження (5) та одну з крайових умов (6)–(9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22) в сенсі теорії узагальнених функцій [9].

Єдиність розв'язків (10) випливає із їх структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу, тангенціальних функцій та функцій Гріна).

Методом з [10] можна довести, що при відповідних обмеженнях на вихідні дані розглянутих гіперболічних крайових задач, узагальнені розв'язки (10) будуть також їх обмеженими класичними розв'язками.

Зауваження 1. У випадку $a_{rj}=a_{zj}\equiv h_j>0$ формули (10) визначають структури розв'язків гіперболічних крайових задач в напівобмеженому ізотропному кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Зауваження 2. Параметри $h_s\left(s=1,2\right)$ дають можливість виділяти із формул (10) розв'язки крайових задач у випадках задання на радіальних поверхнях $r=R_0, r=R$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій (1–1, 1–2, 2–1, 2–2).

Зауваження 3. Параметри α_{11}^0, β_{11}^0 дають можливість виділяти із формул (10) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $z=l_0$ крайової умови 1-го роду $\left(\alpha_{11}^0=0, \beta_{11}^0=1\right)$, 2-го роду $\left(\alpha_{11}^0=-1, \beta_{11}^0=0\right)$ та 3-го роду $\left(\alpha_{11}^0=-1, \beta_{11}^0=h>0\right)$.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливних процесів у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних еволюційних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
3. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
4. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
5. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
6. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
7. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
8. Громик А. П. Моделювання коливних процесів у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі / А. П. Громик, І. М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 8. — С. 44–50.
9. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
10. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 247 с.

The method of integral transforms in combination with the method of main solutions built an exact analytical solution of a mathematical model of oscillatory processes (hyperbolic boundary value problem) in semi-confined wedge-shaped piecewise homogeneous hollow cylinder.

Key words: *modelling, oscillating, hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transformation, the influence function, Green's function.*

Отримано: 21.10.2013