УДК 519.6
DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.97-106

С. Ю. Протасов*, канд. техн. наук,
В. А. Федорчук**, д-р техн. наук

*Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси,
**Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

СПОСІБ РАЦІОНАЛЬНОЇ МОДИФІКАЦІЇ ІТЕРАЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Ітераційні методи розв'язування інтегральних рівнянь є потужним інструментом для теоретичних досліджень і практичних розрахунків. Особливість ітераційних методів полягає в простоті обчислювальних алгоритмів, що має істотне значення у процесі комп'ютерної реалізації. Недоліки цього класу методів полягають у проблемі збіжності, а саме ітераційний процес повинен бути збіжним, а швидкість збіжності — високою, що притаманно при чисельному розв'язуванню нелінійних інтегральних рівнянь.

У статті розглянуто спосіб використання комбінації методу Ньютона-Канторовича і квадратурних формул, що дає змогу отримати високоточний чисельний алгоритм для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду. Наведено результати розв'язування тестового прикладу, які свідчать про ефективність та високу точність методу. Розглянуто можливість використання алгоритму розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь на основі методу послідовних наближень при інтерполяції ядра кубічним сплайном. Недоліком наведених методів при комп'ютерній реалізації є проблема вибору «кращого» початкового наближення, що, у свою чергу, прискорює збіжність методу і тим самим зменшує накопичення похибки.

Розглянутий у статті спосіб модернізації ітераційних алгоритмів чисельного розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь дозволяє визначити «краще» початкове наближення, що дає змогу збільшити швидкість збіжності ітераційного процесу вихідного методу. Результати обчислювальних експериментів при розв'язуванні інтегрального рівняння Фредгольма II роду підтверджують ефективність застосування модернізованого алгоритму на основі методу простих ітерацій із попередньою оптимізацією початкового наближення.

Ключові слова: *нелінійне інтегральне рівняння, ітераційний метод, сплайни, квадратурні формули.*

Вступ. При розв'язуванні нелінійних інтегральних рівнянь для теоретичних досліджень і практичних розрахунків широко використовуються ітераційні методи, такі як метод простих ітерацій та метод Ньютона-Канторовича [1, 6]. Особливістю ітераційних методів є простота обчислювальних алгоритмів, що має істотне значення у процесі їх комп’ютерної реалізації. Використання методу простих ітерацій для розв'язування лінійних інтегральних рівнянь дозволяє отримувати завжди збіжний ітераційний процес при слабких обмеженнях на ядро і праву частину. У випадку з нелінійними рівняннями, область збіжності даного методу звужується, а якщо процес і збігається, то в багатьох випадках швидкість збіжності може виявитися низькою [1]. Метод Ньютона-Канторовича є одним із ефективних методів, що дає змогу подолати зазначені труднощі. Дослідження свідчать про те, що він є ефективним і при розв’язуванні багатьох задач для рівнянь Вольтерри, дозволяючи значно прискорити збіжність порівняно з методом простої ітерації або навіть порівняно з більш складними, зокрема спеціалізованими ітераційними методами [1, 6].

Виклад основного матеріалу. Використовуючи метод Ньютона-Канторовича для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду [1] отримуємо ітераційний процес:

$$y_k = y_{k-1} + \psi_{k-1}(x),\ \ k = 1, 2, 3, \dots,\ \ x \in [a, b], \tag{1}$$

$$\psi_{k-1}(x) = \beta_{k-1}(x) + \int_a^b K'_y(x, s, y_{k-1}(s))\psi_{k-1}(s)ds\ , \tag{2}$$

$$\beta_{k-1}(x) = \int_a^b K(x, s, y_{k-1}(s))ds - y_{k-1}(x)\ . \tag{3}$$

На кожному кроці алгоритму розв'язується лінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду відносно $\psi_{k-1}(x)$. Для розв'язання (1) використовується один з обчислювальних методів розв'язування рівнянь Фредгольма II роду методом квадратур [2].

Ітераційний процес має швидку збіжність (за певних умов), але є досить складним у зв'язку з тим, що на кожному кроці ітераційного процесу необхідно знаходити нове ядро $K'_y(x, s, y_{k-1}(s))$ рівняння.

Алгоритм спрощується шляхом використання рівняння

$$\psi_{k-1}(x) = \beta_{k-1}(x) + \int_a^b K'_y(x, s, y_0(s))\psi_{k-1}(s)ds\ . \tag{4}$$

При цьому ядро у процесі розв'язування залишається незмінним, в результаті чого отримуємо менш складний обчислювальний процес.

Модифікований метод збігається повільніше у порівнянні з базовим методом, але вимагає виконання менш складних обчислень і тому часто виявляється кращим.

Модифікований метод Ньютона-Канторовича необхідно використовувати при успішно вибраному початковому наближенні. В протилежному випадку можна зупинитися на деякому l-му наближенні та починаючи з нього використовувати процес (1), (2), (3).

Приклад 1. Нехай задано нелінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду вигляду

$$0,01y(t) = \frac{1}{100}\sin(\pi t) + \frac{1}{500}\int_0^1 \cos(\pi t)\sin(\pi t)(y(t))^3 dt, \quad 0 \le t \le 1, \tag{5}$$

яке має точний розв'язок

$$y(t) = \sin(\pi t) + \frac{1}{3}(20 - \sqrt{391})\cos(\pi t)\,.$$

Розв'яжемо (5) за допомогою методу Ньютона-Канторовича на відрізку [0,1] з постійним кроком h = 0,01. Результати точного і наближеного розв'язування представлено на рис. 1, абсолютна похибка розв'язку на рис. 2.

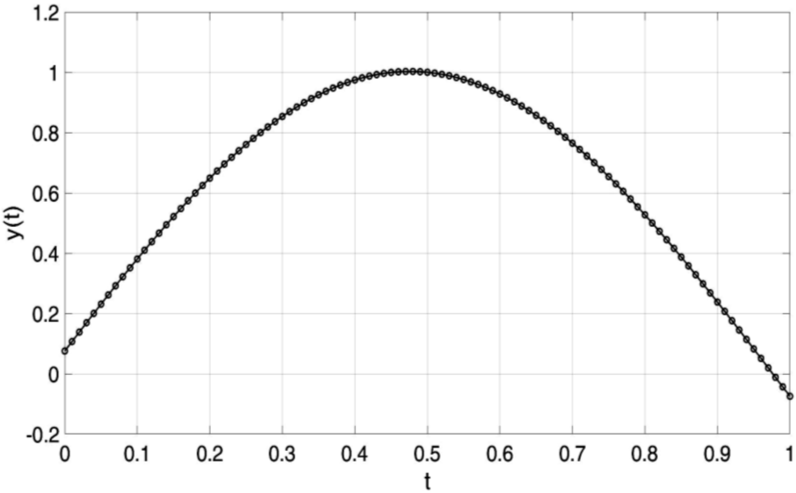

Рис. 1*. Графіки розв'язків нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма II роду (5) методом Ньютона-Канторовича (▬ — точний розв’язок, ● — наближений розв’язок)*

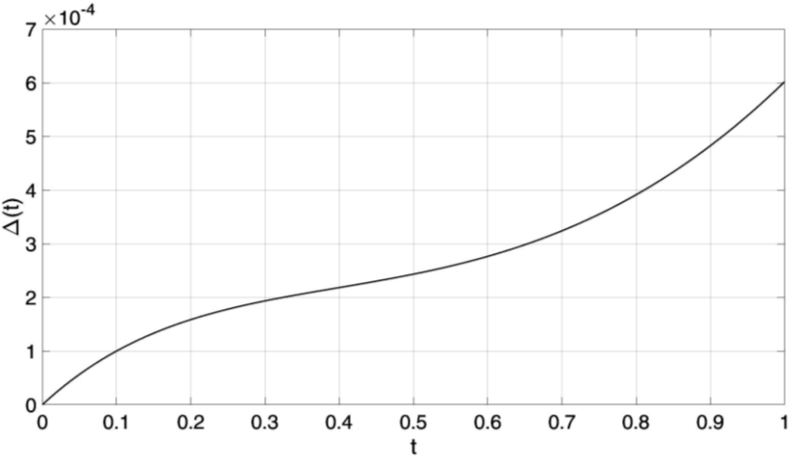

***Рис. 2.** Графік абсолютної похибки розв’язку нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма II роду (5) методом Ньютона-Канторовича*

Розв'язок тестового прикладу засвідчує, що метод Ньютона-Канторовича є ефективним, високоточним методом розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма II роду.

Алгоритм розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь на основі методу послідовних наближень при інтерполяції ядра кубічним сплайном. Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння в загальному вигляді

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s, y(s))ds, \quad a \le s \le b .$$

Розіб'ємо $[a, b]$ на $(N-1)$ відрізків з кроком h, тобто

$$\Delta = \left\{ x_i : x_i = a + (i-1)h, \; h = (b-a)/(N-1), \; i = \overline{1, N} \right\}.$$

Нехай $S_\Delta(\beta; x)$ — інтерполяційний кубічний сплайн для функції $\beta(x)$, побудований на сітці із застосуванням умов на кінцях відрізка [3]:

$$p_1 = \frac{1}{6h}(-11\beta_1 + 18\beta_2 - 9\beta_3 + 2\beta_4),$$

$$p_N = \frac{1}{6h}(-2\beta_{N-3} + 9\beta_{N-2} - 18\beta_{N-1} + 11\beta_N), \; \beta_i = \beta(x_i).$$

Застосуємо формулу

$$\int_a^b S_\Delta(\beta; x)dx = \frac{h}{2}(\beta_1 + \beta_N) + h\sum_{i=2}^{N-1}\beta_i + \frac{h^2}{12}(p_1 - p_N).$$

При інтерполяції ядра кубічним сплайном алгоритм отримання наближеного розв'язку на основі методу послідовних наближень має вигляд

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^b S_\Delta(K(x,\cdot,y_{n-1});s)ds\ ,$$

$$y_0(x) = x\ ,\ n = 1, 2, \ldots,$$

де $S_\Delta(K(x,\cdot,y_{n-1});s)$ є інтерполяційним кубічним сплайном зі змінною s, який побудований для функції $K(x,s,y_{n-1}(s))$.

Модифікований метод простих ітерацій з попередньою оптимізацією початкового наближення. Комп'ютерна реалізація методу простих ітерацій передбачає використання квадратурних формул, що вносить похибку в отриманий результат. Тому важливим питанням є вибір «кращого» початкового наближення, що прискорює збіжність методу і тим самим зменшує накопичення похибки. Основна увага приділяється побудові початкового наближення.

Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$y(t) = f(t) + \int_{T_1}^{T_2} K(t,x,y(x))dx, \tag{6}$$

де $K(t,x,y(x))$ — функція, що визначається при $-\infty < y(x) < \infty$, $t, x \in [T_1, T_2]$. Крім цього передбачається, що функція $K(t,x,y(x))$ підсумовується по x при всіх $t \in [T_1, T_2]$.

Аналіз умов існування хоча б одного розв'язку та умов однозначного розв'язування рівняння (6) заснований в більшості випадків на принципі стислих відображень Банаха [4] і принципу рухомих точок Шаудера [5].

Виходячи із принципу стислих відображень, рівняння (6) має єдиний неперервний розв'язок за умови обмеженості похідною

$$\frac{\partial K(t,x,y)}{\partial y} \le C\ ,\ C(T_2 - T_1) < 1,$$

і припущеннях, що $|y| \le \rho$ та $\max\limits_{x\in[T_1,T_2]} \int_{T_1}^{T_2} \max\limits_{|y|\le\rho} \left|K(t,x,y)\right| dx \le \rho.$

Якщо ці умови виконані, то розв'язок рівняння (6) може бути отримано методом простих ітерацій

$$y_{n+1}(t) = f(t) + \int_{T_1}^{T_2} K(t,x,y_n(x))dx, \tag{7}$$

який при $|y_0(x)| \le \rho$, де $y_0(x)$ — довільна неперервна функція, буде збігатися до розв'язку на $[T_1, T_2]$.

Щоб визначити оптимальне початкове наближення, будуємо функціонал

$$\Phi = \int_{T_1}^{T_2} \left[y - f(t) - \int_{T_1}^{T_2} K(t, x, y(x)) dx \right]^2 dt , \tag{8}$$

і знаходимо його мінімум для деякого, попередньо визначеного числа NQ параметрів, якими є значення шуканої функції у вузлах t_i, $i = \overline{1, NQ}$. При цьому функціонал матиме вигляд

$$\Phi = \sum_{i=1}^{NQ} hB_i \left[y_i - f(t_i) - \sum_{k=1}^{NQ} A_k hK(t_i, x_k, y_k) \right]^2 , \tag{9}$$

де $y_i = y(t_i)$; A_i, $i = \overline{1, NQ}$ і B_k, $k = \overline{1, NQ}$ характеризують вибрану квадратурну формулу для зовнішнього і внутрішнього інтегралів у (8), h — крок дискретизації.

Для визначення мінімуму функціоналу Φ застосовуємо метод координатного спуску в комбінації з методом золотого перетину [6].

Число параметрів мінімізації NQ в одному випадку не повинно бути занадто великим (зі збільшенням числа NQ миттєво зростає час роботи програми мінімізації), в іншому випадку число NQ визначає точність представлення внутрішнього інтегралу у виразі (8) квадратурної формули і не повинно бути занадто малим [6].

Після знаходження значень параметрів, при яких досягається мінімум функціоналу, будується початкове наближення розв'язку вихідного інтегрального рівняння $y^{(0)}(x)$ шляхом використання інтерполяційної формули Лагранжа [6]. Значення функцій y_i відповідають координатам x_i, $i = \overline{1, n}$. Далі, використовуючи вираз (7), знаходиться наступне наближення $y^{(1)}(x)$ розв'язку нелінійного інтегрального рівняння, при цьому число точок розбиття інтервалу $[T_1, T_2]$ збільшується. Ітераційний процес закінчується при виконанні визначеної кількості ітерацій I, або при досягненні нев'язки (9) попередньо отриманого значення. Якщо число ітерацій досягло числа I, а нев'язка недостатньо мала, необхідно спочатку задати більшу кількість параметрів оптимізації або інші початкові значення параметрів.

Алгоритм методу складається з наступних етапів:

1. Отримання вхідних даних алгоритму: ядро, права частина, межі інтегрування, параметри NQ, I, δ.

2. Побудова функціоналу, що мінімізується, для визначення початкового наближення методу простих ітерацій за формулою:

$$\Phi = \int_{T_1}^{T_2} \left[y - f(t) - \int_{T_1}^{T_2} K(t, x, y(x)) dx \right]^2 dt \; .$$

3. Дискретизація функціоналу, що мінімізується за формулою:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{NQ} hB_i \left[y_i - f(t_i) - \sum_{k=1}^{NQ} A_k hK(t_i, x_k, y_k) \right]^2 .$$

4. Знаходження функціоналу, що мінімізується, відносно параметрів методом координатного спуску в комбінації з методом золотого перетину для функції однієї змінної.
5. Побудова початкового наближення нелінійного інтегрального рівняння, як результат застосування формули Лагранжа для знайдених значень параметрів y_i .
6. Виконання методу простих ітерацій за формулою

$$y_{n+1}(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{NQ} A_k \cdot H \cdot K(t_i, x_k, y_{nk}) \; ,$$

доки не буде досягнута нев’язка

$$\Phi = \sum_{i=1}^{NQ} hB_i \left[y_i - f(t_i) - \sum_{k=1}^{NQ} A_k hK(t_i, x_k, y_k) \right]^2 < \delta \; ,$$

або не виконана буде задана кількість ітерацій.

Ефективність застосування алгоритму на основі методу простих ітерацій із попередньою оптимізацією початкового наближення продемонстровано на наступному тестовому прикладі.

Приклад 2. Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$y(t) = t^2 - (arctg \frac{b + 2tT_2}{\sqrt{4ct - b^2}} - arctg \frac{b + 2tT_1}{\sqrt{4ct - b^2}}) \times \\ \times \frac{2}{\sqrt{4ct - b^2}} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{c + bx + ty(x)} dx, \quad (10)$$

де

$$b = 2 \; , \; c = 2 \; , \; T_1 = 1 \; , \; T_2 = 10 \; ;$$

з точним розв’язком

$$y(t) = t^2 \; .$$

Графіки точного і наближеного розв'язків рівняння (10) представлені на рис. 3. Графік абсолютної похибки розв’язку інтегрального рівняння (10), отриманого модифікованим методом простих ітерацій, представлений на рис. 4.

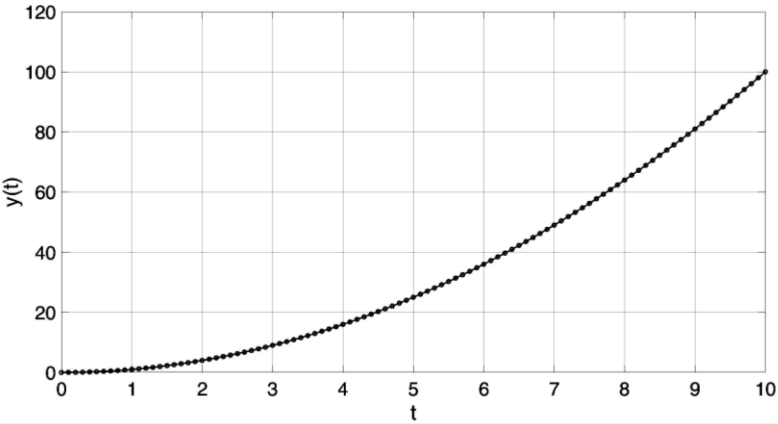

Рис. 3. *Графік чисельного розв'язку інтегрального рівняння (10) модифікованим методом простих ітерацій (▬ — точний розв’язок, ● — наближений розв’язок)*

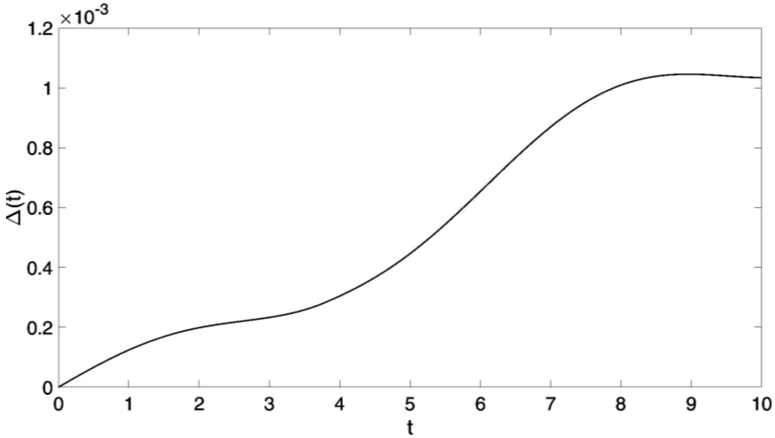

Рис. 4. *Графік абсолютної похибки розв’язку інтегрального рівняння*

Результати розв'язування тестового прикладу на основі модифікованого методу простих ітерацій з попередньою оптимізацією початкового наближення показали, що окрім високої точності, також досягається висока швидкодія алгоритму.

Висновок. Наведені в роботі способи раціональної модифікації ітераційних алгоритмів чисельного розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь дозволяють підвищити ефективність відповідних обчислювальних процесів. Зокрема, використання комбінації методу Ньютона-Канторовича і квадратурного методу, дає змогу отримати високоточний обчислювальний алгоритм для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду. Також застосування модифікованого методу простих ітерацій, дозволяє визначити «краще» початкове наближення, що дає змогу збільшити швидкість збіжності ітераційного процесу вихідного методу.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справоч. пособ. / Отв. ред. Г. Е. Пухов. Київ: Наук. думка, 1986. 544 с.
2. Арушарян И. О. Численное решение интегральных уравнений методом квадратур. Москва: МГУ, 2000. 67 с.
3. Довгий Б. П., Ловейкін А. В., Вакал Є. С., Вакал Ю. Є. Сплайн-функції та їх застосування. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. 117 с.
4. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: навчальний посібник. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. 430 с.
5. Баскаков А. Г. Сжимающие отображения и решения нелинейных уравнений СОЖ. 1997. № 5. С. 118-121.
6. Peter D. Lax. Functional Analysis. *Wiley-Interscience.* 2002. 608 с.

METHOD OF RATIONAL MODIFICATION OF ITERATIVE ALGORITHMS OF NUMERICAL SOLUTION IN NONLINEARY INTEGRAL EQUATIONS

Iterative methods for solving integral equations are a powerful tool for theoretical research and practical calculations. The peculiarity of iterative methods lies in the simplicity of computational algorithms that is essential in the process of computer realization. The disadvantages of this class of methods underlie in the problem of convergence, namely, the iterative process should be convergent, and the convergence rate should be high, which is inherent in the numerical solution of nonlinear integral equations.

The article discusses the use of a combination of the Newton-Kantorovich method and quadratic formulas, that allows to obtain a high-precision numerical algorithm for solving nonlinear integral equations as Fredholm equation of the second kind. The results of test example solution are provided, which testify to the effectiveness and high accuracy of the method. The possibility of using the algorithm of solving nonlinear integral equations based on the method of sequential approximation during interpolation of the nucleus by cubic spline is analyzed. The disadvantage of these methods in computer implementation is the task of choosing the "best" initial approximation, which in turn accelerates the convergence of the method and thereby reduces the accumulation of error.

The considered method of modernization of iterative algorithms of numerical solution in nonlinear integral equations allows to determine the "better" initial approximation, which makes it possible to increase the convergence of the iterative process in the initial method. The results of computational experiments in the solution of the Fredholm integral equations of the second kind confirm the use effectiveness of the modernized algorithm based on the method of simple iterations with preliminary optimization of the initial approximation.

Keywords: *nonlinear integral equation, iterative method, splines, quadrature formulas.*

Отримано: 18.10.2021

УДК 621.37:621.391
DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.106-118

Д. О. Смірнов,
Д. А. Вєдєрніков,
О. А. Палагіна, канд. техн. наук,
В. В. Палагін, д-р техн. наук

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СИГНАЛУ НА ФОНІ НЕГАУСОВИХ КОРЕЛЬОВАНИХ ЗАВАД

Класичний підхід для побудови систем оцінювання параметрів сигналів, які приймаються на фоні негаусових завад, характеризується складністю алгоритмічної та обчислювальної реалізації, що не дозволяє синтезувати якісні програмні та апаратні засоби статистичної обробки. Окрім того, наявність кореляційних зв'язків досліджуваних вибіркових значень суттєво ускладнює алгоритмічну реалізацію. Аналіз досліджень, які проводяться останнім часом засвідчив, що для знаходження оцінок невідомих параметрів сигналів, які приймаються на фоні негаусових завад, можливо використовувати інший перспективний підхід. Такий підхід базується на використанні чисельних характеристик опису випадкових процесів, а саме моментних і кумулянтних функцій вищих порядків, що дозволяє з заданим наближенням описувати статистичні властивості негаусових процесів.

У роботі запропоновані нові математичні моделі адитивної взаємодії корисного постійного сигналу та корельованої негаусової завади при застосуванні одномоментних та двохмоментних кумулянтних функцій вищих порядків. Таке представлення надає додаткові можливості не тільки описати параметри та характеристики досліджуваного негаусового процесу, але і врахувати статистичні зв'язки вибіркових значень для побудови якісних алгоритмів оцінювання невідомих параметрів сигналу.