

УДК 519.6

DOI: 10.32626/2308-5916.2022-23.20-30

А. Я. Бомба*, д-р техн. наук, професор,

М. В. Бойчура*, канд. техн. наук,

О. М. Багнюк**,

А. А. Абдулалі*

*Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне,

**Відокремлений структурний підрозділ Рівненський

технічний фаховий коледж Національного університету

водного господарства та природокористування, м. Рівне

ІДЕНТИФІКАЦІЯ КООРДИНАТ ІМПУЛЬСНИХ ДЖЕРЕЛ ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Розглядається процес конвективного перенесення речовин при фільтрації в пористому середовищі (горизонтальному пласті). Запропоновано підхід до визначення координат та часу дії спеціального виду імпульсних джерел (забруднень, теплових, вибуху тощо), виходячи з припущення, що останні суттєво не впливають на фільтраційний фон. Для ідентифікації використовується інформація про траєкторії (які співпадають з лініями течії) руху домішкової речовини та проміжки часу протікання забруднень від їх джерел до відповідних місць (точок) спостереження (виявлення). Ідентифікацію координат точкових джерел пропонується здійснювати за допомогою характеристичних (стосовно рівняння конвекції) функцій, апріорної інформації про рух забруднень та даних координат вузлів побудованої гідродинамічної сітки. Значні спрощення для процесу побудови алгоритму розв'язання досягаються шляхом заміни сформованої модельної задачі на знаходження в комплексі функцій квазіпотенціалу і течії відповідною оберненою задачею (яка, окрім іншого, забезпечує можливість ефективної побудови гідродинамічної сітки руху), в основі розв'язку якої лежить процедура квазіконформного відображення відповідної чотирикутної області комплексного квазіпотенціалу на задану фізичну область. Наведено числові експерименти та здійснено їх аналіз. Зокрема, встановлено, що точність ідентифікації джерел забруднень суттєво залежить від наявних величин нев'язок квазіконформності. Найбільші їх значення досягаються на тих лініях течії, які проходять через характерні (так звані, «ключові») точки чи біля застійних зон. Знизити похибки, які генерують останні можливо, зокрема, при великій кількості вузлів розбиття. Розроблений алгоритм забезпечує можливості

для подальшого його перенесення на складніші випадки руху рідини, зокрема, із додатковим врахуванням дифузійної складової, узагальнення на простір тощо.

Ключові слова: *математичне моделювання, квазіконформні відображення, нелінійні задачі, числові методи, точкове джерело.*

Вступ. Загальна постановка задачі. Виявлення наявних різного роду наслідків дії джерел (забруднень, теплових, вибухів тощо) часто призводить до необхідності розв'язання задачі на ідентифікацію їх джерел [1, 2]. Це надає можливості для вирішення ряду важливих практичних задач охорони навколишнього середовища. Так, в [1], отримано розв'язок задачі на визначення координати миттєвого джерела забруднень на основі розв'язку відповідної оберненої задачі для одновимірного нестационарного рівняння конвективної дифузії на відрізьку. Тоді як в [2] отримано аналітичний розв'язок модельної задачі про ідентифікацію місцеположення джерела забруднень в одновимірному стаціонарному випадку з нульовими граничними умовами. Встановлена оцінка залежності похибки розміщення джерела від похибки вимірювань концентрації в даній точці.

Вибір доцільних методів для виявлення наявних забруднень суттєво залежить від виду апріорної інформації, якою ми володіємо. У даній роботі вважаємо, що в межах досліджуваної території (рис. 1, *a*) мають місце імпульсні джерела забруднень, які суттєво не впливають на фільтраційний фон (зокрема, за рахунок превалювання дифузійної складової руху над конвекційною) та які зручно моделювати криволінійними «відрізьками». Також вважаємо відомими моменти часу «прояву джерел» у певних точках заданих «ділянок спостереження» (зокрема «появи» їх на виході із даної території (області G_z)). При цьому, замість фіксації частини моментів часу «прояву джерел» в різних точках певної лінії течії можемо оперувати відповідними проміжками часу «досягання координат», де фіксуються забруднення. У такому випадку, вихідну задачу на виявлення джерел домішкових речовин доцільно розв'язувати за умови побудови гідродинамічної сітки і за її даними та апріорною інформацією про рух забруднень ідентифікувати координати їх виникнення. Останнє можна здійснювати за умови розв'язання задачі на конвективне перенесення [3]. Проте у даному конкретному випадку достатнім виявляється застосування відповідного характеристичного рівняння. Тоді як моделювання картини руху рідини зручно реалізовувати числовими методами квазіконформних відображень [4]. Його переваги, зокрема, наступні: відповідна «фільтраційна пряма задача» зводиться до так званої оберненої задачі (на квазіконформне відображення відповідної каноніч-

ної області комплексного квазіпотенціалу на криволінійну область фільтрації), а у процесі розв'язання останньої автоматично вирішується проблема побудови гідродинамічної сітки з одночасним визначенням повної фільтраційної витрати тощо.

Метою роботи є розроблення (на основі числових методів квазіконформних відображень та характеристик) комбінованого підходу ідентифікації координат точкових імпульсних джерел (забруднень, теплових, вибухів тощо) за даними їх спостережень на певних проміжках часу у характерних точках.

Математична модель. Нехай в однозв'язній криволінійній області G_z (рис. 1, *a*) відбуваються квазіідеальні фільтраційні процеси руху рідини, які задовольняють закону Дарсі $\vec{v} = \kappa \text{grad } \varphi$ та умові нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$ [3, 4]. Тут $\partial G_z = \{z = x + i y :$

$$x = \tilde{x}(\tau) = \sum_{\xi=0}^{\tilde{m}-1} \tilde{x}_\xi b_{\xi,3}(\tau), \quad y = \tilde{y}(\tau) = \sum_{\xi=0}^{\tilde{m}-1} \tilde{y}_\xi b_{\xi,3}(\tau), \quad \text{де } \tau \in [0, 1],$$

$$\tilde{x}(1) = \tilde{x}(0), \quad \tilde{y}(1) = \tilde{y}(0), \quad b_{\xi,0}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau \in [\tau_\xi, \tau_{\xi+1}), \\ 0, & \text{при } \tau \notin [\tau_\xi, \tau_{\xi+1}) \end{cases}, \quad \tau_\xi = 0$$

$$(\xi = \overline{0,3}), \quad \tau_\xi = \tau_{\xi-1} + \frac{1}{\tilde{m}-3} \quad (\xi = \overline{4,\tilde{m}}), \quad \tau_{\tilde{m}+\xi} = 1 \quad (\xi = \overline{1,4}),$$

$$b_{\xi,r}(\tau) = \frac{\tau - \tau_\xi}{\tau_{\xi+r} - \tau_\xi} b_{\xi,r-1}(\tau) + \frac{\tau_{\xi+r+1} - \tau}{\tau_{\xi+r+1} - \tau_{\xi+1}} b_{\xi+1,r-1}(\tau), \quad (\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi) \text{ — опорні}$$

точки, $\tilde{m} > 3$ — їх кількість} [5], $\varphi = \varphi(x, y)$ — квазіпотенціал, $\vec{v} = (v_x, v_y)$ — швидкість, $\kappa = \kappa(x, y)$ — коефіцієнт фільтрації. Тоді, ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$, згідно [4] отримаємо наступну постановку задачі на знаходження невідомих $\varphi = \varphi(x, y)$ та $\psi = \psi(x, y)$, а також фільтраційної витрати Q в G_z :

$$\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*; \quad (2)$$

$$\psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q = \int_{AB} -\kappa \varphi'_y dx + \kappa \varphi'_x dy, \quad (3)$$

де значення квазіпотенціалів φ_* , φ^* ($\varphi_* < \varphi^*$) вздовж еквіпотенціалей відповідно AB і CD (AD і BC — граничні лінії течії) та функцію $\kappa = \kappa(x, y)$ вважаємо заданими.

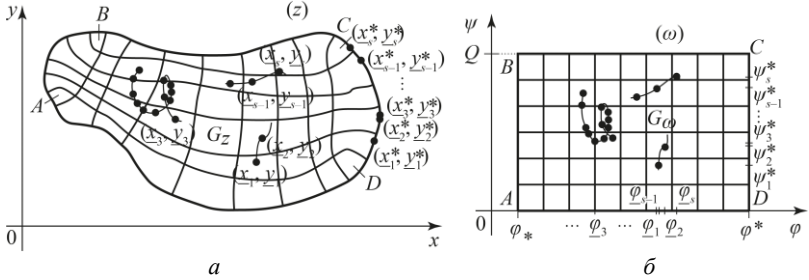


Рис. 1. Фізична область G_z (а) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω (б)

Як відомо [4], від задачі (1)-(3) зручно перейти до оберненої при шуканих функціях $x = x(\varphi, \psi)$ і $y = y(\varphi, \psi)$ та за невідомої витрати Q в області комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ (рис. 1, б):

$$(x'_\varphi / \kappa)'_\varphi + (\kappa x'_\psi)'_\psi = 0, \quad (y'_\varphi / \kappa)'_\varphi + (\kappa y'_\psi)'_\psi = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(\tau)y'_\varphi(\varphi_*, \psi) + \tilde{y}'(\tau)x'_\varphi(\varphi_*, \psi) = 0, \quad \tilde{x}'(\tau)y'_\varphi(\varphi^*, \psi) + \\ + \tilde{y}'(\tau)x'_\varphi(\varphi^*, \psi) = 0, \quad \tilde{x}'(\tau)y'_\psi(\varphi, 0) + \tilde{y}'(\tau)x'_\psi(\varphi, 0) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tilde{x}'(\tau)y'_\psi(\varphi, Q) + \tilde{y}'(\tau)x'_\psi(\varphi, Q) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q;$$

$$\begin{aligned} x(\varphi_*, \psi) = \tilde{x}(\tau_*(\psi)), \quad y(\varphi_*, \psi) = \tilde{y}(\tau_*(\psi)), \quad x(\varphi, Q) = \tilde{x}(\bar{\tau}(\varphi)), \\ y(\varphi, Q) = \tilde{y}(\bar{\tau}(\varphi)), \quad x(\varphi^*, \psi) = \tilde{x}(\tau^*(\psi)), \quad y(\varphi^*, \psi) = \tilde{y}(\tau^*(\psi)), \end{aligned} \quad (6)$$

$$x(\varphi, 0) = \tilde{x}(\underline{\tau}(\varphi)), \quad y(\varphi, 0) = \tilde{y}(\underline{\tau}(\varphi)), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q.$$

Тут $\tau = \tau_*(\psi)$, $\tau = \tau^*(\psi)$, $\tau = \underline{\tau}(\varphi)$, $\tau = \bar{\tau}(\varphi)$ — розрахункові залежності параметрів задання границі фізичної області від значень функцій течії та квазіпотенціалу.

У припущенні, що дифузійною складовою можна знехтувати, рівняння конвекції в G_z запишемо у вигляді [3]:

$$-v_x(x, y)u'_x - v_y(x, y)u'_y = u'_t, \quad (7)$$

або в області комплексного квазіпотенціалу:

$$-v^2(\varphi, \psi)c'_\varphi = c'_t, \quad (7^*)$$

де $u = u(x, y, t)$ — концентрація домішкової речовини в точці (x, y) у момент часу t , компоненти вектора швидкості обчислюються у вузлах побудованої гідродинамічної сітки згідно формул [4]:

$$v_x = \frac{\kappa}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\kappa}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \quad (J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}), \quad (8)$$

$$v^2(\varphi, \psi) = v_x^2(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) + v_y^2(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)),$$

$$c(\varphi, \psi, t) = u(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t).$$

Припустимо, що окремі криволінійні ділянки (зокрема точки) в $\overline{G_z}$ виступають у якості імпульсних джерел, що суттєво не впливають на фільтраційних фон та які зручно моделювати криволінійними «відрізками», що породжені шуканими функціями $(\tilde{x}_k(\underline{\tau}), \tilde{y}_k(\underline{\tau}))$ (де $\underline{k} = \overline{1, \underline{s}}$, \underline{s} — задане, $0 \leq \underline{\tau} < 1$). Якщо відомими є проміжки часу $t = t_k^*$ ($k > 0$), за які дані забруднення, тепло, імпульси тощо досягають певних точок $(x_k^*, y_k^*) \in \overline{G_z}$ у вздовж ліній течії, то неважко записати підхід до ідентифікації точок $(x_k, y_k) \in \left\{ (\tilde{x}_k(\underline{\tau}), \tilde{y}_k(\underline{\tau})), 0 \leq \underline{\tau} < 1 \right\}$ ($k = \overline{1, s}$) при заданій кількості s замірів. А саме: будемо гідродинамічну сітку руху (за допомогою функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$) [4], звідки визначаємо відповідні лінії течії $\psi = \psi_k^*$, і на цій основі знаходимо шукані джерела. Останнє, у зручному для практики випадку $(x_k^*, y_k^*) \in CD$, доцільно робити за допомогою характеристичних для (7) функцій [3], а саме: із використанням інтегрального рівняння з невідомою нижньою межею інтегрування (квазіпотенціал φ_k у шуканій точці (x_k, y_k))

$$t_k^* = \int_{\varphi_k}^{\varphi_k^*} \frac{\kappa(x(\varphi, \psi_k^*), y(\varphi, \psi_k^*)) d\varphi}{v^2(\varphi, \psi_k^*)}. \quad (9)$$

Наближене представлення задачі та алгоритм її розв'язання.

Здійснимо розбиття області G_ω деякою рівномірною сіткою $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \overline{\varphi_* + i \Delta\varphi}, \psi_j = j \Delta\psi; \Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / (m + 1), \Delta\psi = Q / (n + 1); i = \overline{0, m + 1}, j = \overline{0, n + 1}; \gamma = \Delta\varphi / \Delta\psi; m, n \in \mathbb{N}\}$ [4]. Тут γ — квазіконформний інваріант, $m \times n$ — кількості вузлів розбиття. Різницеві аналоги задачі (4)-(6) одержуються аналогічно до [4, 6]. При цьому, наближене представлення модуля швидкості (див. вираз (8)) у смугах між лініями течій $\psi = \psi_{[\psi_k^* / \Delta\psi]}$ та $\psi = \psi_{[\psi_k^* / \Delta\psi] + 1}$, де є відомим, що розміщуються шукані джерела забруднень, представимо наступним чином:

$$v_{i,k} = \frac{\kappa(x_{i,k}, y_{i,k}) \sqrt{(x_{i,k+1} - x_{i,k})^2 + (y_{i,k+1} - y_{i,k})^2} \Delta\varphi}{(x_{i+1,k} - x_{i,k})(y_{i,k+1} - y_{i,k}) - (x_{i,k+1} - x_{i,k})(y_{i+1,k} - y_{i,k})}. \quad (10)$$

Тут $x_{i,k} = x(\varphi_i, \psi_{[\varphi_k^*/\Delta\psi]})$, $y_{i,k} = y(\varphi_i, \psi_{[\varphi_k^*/\Delta\psi]})$ ($k = \overline{1, s}$). Наближене ж представлення виразу (9) запишемо із, наприклад, застосуванням формули лівих прямокутників:

$$t_k^* = \sum_{i=\underline{m}_k}^{m+1} \kappa(x_{i,k}, y_{i,k}) \Delta\varphi / v_{i,k}^2 \quad (k = \overline{1, s}), \quad (11)$$

де $\varphi_{\underline{m}_k} \approx \varphi_k$ — квазіпотенціал у точці $(\underline{x}_k, \underline{y}_k)$, \underline{m}_k — наперед невідоме. Підставивши (10) у (11) та виконавши низку перетворень, отримаємо (тут $k = \overline{1, s}$):

$$t_k^* = \sum_{i=\underline{m}_k}^{m+1} \frac{(x_{i+1,k} - x_{i,k})(y_{i,k+1} - y_{i,k}) - (x_{i,k+1} - x_{i,k})(y_{i+1,k} - y_{i,k})}{\Delta\psi}. \quad (12)$$

Алгоритм розв'язання задачі (4)-(6), (9) складається з наступних кроків. Задаємо границю області G_z (функціями $x = \tilde{x}(\tau)$, $y = \tilde{y}(\tau)$), кількості еквіпотенціалей m та ліній течії n , параметри задання «ключових» точок τ_A , τ_B , τ_C , τ_D , квазіпотенціали φ_* , φ^* , коефіцієнт фільтрації $\kappa = \kappa(x, y)$. Обчислюємо крок $\Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1)$ та координати «ключових» точок на ∂G_z : $A = (\tilde{x}(\tau_A), \tilde{y}(\tau_A))$, $B = (\tilde{x}(\tau_B), \tilde{y}(\tau_B))$, $C = (\tilde{x}(\tau_C), \tilde{y}(\tau_C))$, $D = (\tilde{x}(\tau_D), \tilde{y}(\tau_D))$. Аналогічно до [4], розв'язуємо задачу (4)-(6), звідки, зокрема, знаходимо необхідні для подальшої ідентифікації координати вузлів $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ ($i = \overline{0, m+1}$, $k = \overline{1, s}$) та кроки $\Delta\psi$. У випадку порівняно густого розбиття сітки доцільним тут є застосування розпаралелення обчислень типу [7].

Задаємо кількість s джерел забруднень та проміжки часу t_k^* , необхідні для протікання речовин через точки $(x_k^*, y_k^*) \in CD$ ($k = \overline{1, s}$). Виражаємо τ_k^* із бісплайнових функцій $x_k^* = \tilde{x}(\tau_k^*)$, $y_k^* = \tilde{y}(\tau_k^*)$, такі щоб $\tau^*(\psi_j) \leq \tau_k^* < \tau^*(\psi_{j+1})$; обчислюємо значення функції течії у точках (x_k^*, y_k^*) за формулою

$$\psi_k^* = j\Delta\psi + \sqrt{(x_{m+1,j} - x_k^*)^2 + (y_{m+1,j} - y_k^*)^2} / \left(\sqrt{(x_{m+1,j} - x_k^*)^2 + (y_{m+1,j} - y_k^*)^2} + \sqrt{(x_{m+1,j+1} - x_k^*)^2 + (y_{m+1,j+1} - y_k^*)^2} \right).$$

Покладаємо $l = 0$ ($l = 0, 1, 2, \dots$ — номери наближення відповідних величин, що не містять даний індекс) та $\underline{m}_k^{(l)} = m + 1$. Ітераційно підставляємо $\underline{m}_k^{(l)} = \underline{m}_k^{(l-1)} - 1$ ($k = \overline{1, s}$, $l > 0$) у формулу (12) до тих пір, поки не виконається умова $t_k^{*(l-1)} \leq t_k^* < t_k^{*(l)}$. Точки з координатами $(x_{\underline{m}_k^{(l)}, k}, y_{\underline{m}_k^{(l)}, k})$ вважаємо l -ми наближеннями $(\underline{x}_k^{(l)}, \underline{y}_k^{(l)})$ шуканих $(\underline{x}_k, \underline{y}_k)$ ($k = \overline{1, s}$). Наступне уточнення здійснюємо у межах елементарних чотирикутників області G_z^y наступним чином:

$$\begin{aligned} \underline{x}_k^{(l+1)} &= \left(x_{i,k} + \frac{t_k^{*(l)} - t_k^*}{t_k^{*(l)} - t_k^{*(l-1)}} (x_{i+1,k} - x_{i,k}) \right) + \\ &+ \left\{ \frac{\Psi_k^*}{\Delta \Psi} \right\} \left(x_{i,k+1} - x_{i,k} + \frac{t_k^{*(l)} - t_k^*}{t_k^{*(l)} - t_k^{*(l-1)}} (x_{i,k} - x_{i,k+1} + x_{i+1,k+1} - x_{i+1,k}) \right), \\ \underline{y}_k^{(l+1)} &= \left(y_{i,k} + \frac{t_k^{*(l)} - t_k^*}{t_k^{*(l)} - t_k^{*(l-1)}} (y_{i+1,k} - y_{i,k}) \right) + \\ &+ \left\{ \frac{\Psi_k^*}{\Delta \Psi} \right\} \left(y_{i,k+1} - y_{i,k} + \frac{t_k^{*(l)} - t_k^*}{t_k^{*(l)} - t_k^{*(l-1)}} (y_{i,k} - y_{i,k+1} + y_{i+1,k+1} - y_{i+1,k}) \right). \end{aligned}$$

У випадку, якщо нас не задовольняє точність отриманих розв'язків доцільно збільшити кількість вузлів розбиття та (або) точок із апріорно відомими часовими даними про протікання забруднень і почати увесь процес розрахунків заново. Також рівень нев'язок можна знизити із використанням більш точних схем наближення виразів (8), (9), узагальнень рівнянь Лапласа (4) тощо [3, 4, 6].

Числові експерименти. Розв'язання задачі ідентифікації здійснювалось за наведеним вище алгоритмом при різних розбиттях (табл. 1) сітки та наступних вхідних даних:

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= 13, \quad (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (\tilde{x}_{12}, \tilde{y}_{12}) = (218, 368), \quad (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (179, 293), \\ (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) &= (256, 277), \quad (\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) = (364, 208), \quad (\tilde{x}_4, \tilde{y}_4) = (422, 130), \\ (\tilde{x}_5, \tilde{y}_5) &= (591, 240), \quad (\tilde{x}_6, \tilde{y}_6) = (583, 430), \quad (\tilde{x}_7, \tilde{y}_7) = (494, 447), \\ (\tilde{x}_8, \tilde{y}_8) &= (439, 433), \quad (\tilde{x}_9, \tilde{y}_9) = (383, 454), \quad (\tilde{x}_{10}, \tilde{y}_{10}) = (309, 519), \\ (\tilde{x}_{11}, \tilde{y}_{11}) &= (247, 437), \quad \tau_A = 0, \quad \tau_B = 0.902, \\ \tau_C &= 0.4267, \quad \tau_D = 0.3376, \quad \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1, \\ \underline{x}_{k+1}^* &= \tilde{x}_1(k \Delta \tau_1) = 24k \Delta \tau_1 \sin(12k \Delta \tau_1) + 300, \quad k = \overline{0, 29}, \end{aligned}$$

$$\underline{x}_{k+31}^* = \tilde{x}_2(k\Delta\tau_2) = 8\cos(10k\Delta\tau_2) + 400, \quad k = \overline{0,9},$$

$$\underline{x}_{k+41}^* = \tilde{x}_3(k\Delta\tau_3) = 8\cos(10k\Delta\tau_3) + 400, \quad k = \overline{0,13},$$

$$\underline{x}_{k+55}^* = \tilde{x}_4(k\Delta\tau_4) = 500, \quad k = \overline{0,6},$$

$$\underline{y}_{k+1}^* = \tilde{y}_1(k\Delta\tau_1) = 20\cos(12k\Delta\tau_1) + 24k\Delta\tau_1 + 300, \quad k = \overline{0,29},$$

$$\underline{y}_{k+31}^* = \tilde{y}_2(k\Delta\tau_2) = 32(k\Delta\tau_2)^2 + 200, \quad k = \overline{0,9},$$

$$\underline{y}_{k+41}^* = \tilde{y}_3(k\Delta\tau_3) = -32(k\Delta\tau_3)^2 + 400, \quad k = \overline{0,13},$$

$$\underline{y}_{k+55}^* = \tilde{y}_4(k\Delta\tau_4) = -60k\Delta\tau_4 + 250, \quad k = \overline{0,6},$$

$$\begin{aligned} t_1^* &= 45711.322, & t_2^* &= 45568.322, & t_3^* &= 45163.628, & t_4^* &= 44540.19, \\ t_5^* &= 43931.968, & t_6^* &= 43529.242, & t_7^* &= 43575.493, & t_8^* &= 43906.014, \\ t_9^* &= 44636.289, & t_{10}^* &= 45286.666, & t_{11}^* &= 45959.566, & t_{12}^* &= 46580.592, \\ t_{13}^* &= 47153.583, & t_{14}^* &= 47573.271, & t_{15}^* &= 47576.504, & t_{16}^* &= 47220.451, \\ t_{17}^* &= 46465.332, & t_{18}^* &= 45451.645, & t_{19}^* &= 44226.515, & t_{20}^* &= 43074.878, \\ t_{21}^* &= 42204.833, & t_{22}^* &= 41885.295, & t_{23}^* &= 42355.751, & t_{24}^* &= 43520.353, \\ t_{25}^* &= 45319.177, & t_{26}^* &= 47227.502, & t_{27}^* &= 48999.863, & t_{28}^* &= 50306.502, \\ t_{29}^* &= 50775.856, & t_{30}^* &= 50533.569, & t_{31}^* &= 17117.97, & t_{32}^* &= 18329.773, \\ t_{33}^* &= 20977.535, & t_{34}^* &= 22682.9, & t_{35}^* &= 21141.878, & t_{36}^* &= 18391.864, \\ t_{37}^* &= 16876.795, & t_{38}^* &= 17293.869, & t_{39}^* &= 19190.96, & t_{40}^* &= 20908.478, \\ t_{41}^* &= 36269.398, & t_{42}^* &= 36451.218, & t_{43}^* &= 36819.537, & t_{44}^* &= 37375.826, \\ t_{45}^* &= 37609.499, & t_{46}^* &= 37416.442, & t_{47}^* &= 36718.24, & t_{48}^* &= 35787.785, \\ t_{49}^* &= 34912.351, & t_{50}^* &= 34470.596, & t_{51}^* &= 34539.669, & t_{52}^* &= 35030.156, \\ t_{53}^* &= 35569.494, & t_{54}^* &= 35734.292, & t_{55}^* &= 8081.9, & t_{56}^* &= 7017.246, \\ t_{57}^* &= 5904.935, & t_{58}^* &= 4706.089, & t_{59}^* &= 3495.946, & t_{60}^* &= 2322.875, \\ t_{61}^* &= 1238.391, & \Delta\tau_1 &= 1/30, & \Delta\tau_2 &= 0.1, & \Delta\tau_3 &= 14, & \Delta\tau_4 &= 7, & s &= 61, \\ \kappa(x, y) &= 1 + 0.006x - 0.0008y - 2 \cdot 10^{-5}x^2 + 2.7 \cdot 10^{-5}xy - 9 \cdot 10^{-6}y^2. \end{aligned}$$

При цьому, $(\underline{x}_k, \underline{y}_k)$ та t_k^* отримано за допомогою спеціально розробленої програми імітації фізичного експерименту при порівняно густому розбитті сітки ($m = 200$, $n = 262$).

У результаті побудовано гідродинамічні сітки руху, відповідні області комплексного квазіпотенціалу та ідентифіковано координати

шуканих джерел забруднень при різних параметрах кількості вузлів розбиття. Значення середніх $\bar{\varepsilon}$ та максимальних ε_{\max} нев'язок координат розрахованих та апріорно відомих джерел забруднень наведено у табл. 1. Графічні зображення отриманих розв'язків, наприклад, при $m = 40$, $n = 53$ представлено на рис. 2, а та рис. 2, б.

Таблиця 1

Середні та максимальні нев'язки між розрахунковими та апріорно відомими координатами джерел забруднень при різних кількостях вузлів розбиття

m	n	Q	$\bar{\varepsilon}$	ε_{\max}
200	262	1.3039	0	0
80	104	1.3057	0.8026	1.9156
40	53	1.3085	2.766	11.6701
20	27	1.3136	7.7684	33.64
10	14	1.3235	16.9307	39.3374

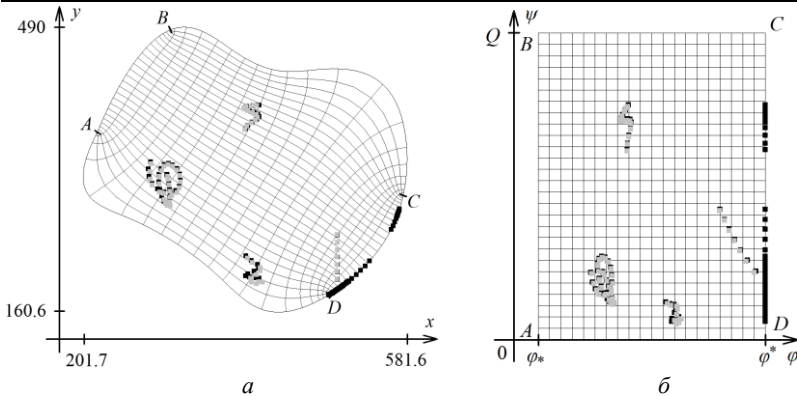


Рис. 2. Гідродинамічна сітка у фізичній області (а) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (б) при $m = 40$, $n = 53$; чорними крапками позначено точні дані, а сірими — розрахункові

Найнижча точність при ідентифікації джерел забруднень, очікувано [4, 8, 9], досягається на тих лініях течії, які проходять біля «ключових» точок ділянок прикладання квазіпотенціалів і застійних зон.

Висновки. Запропоновано підхід до визначення координат імпульсних джерел забруднень в однозв'язній криволінійній області для випадку руху рідини, при якому дифузійною складовою можна знехтувати. Відповідний алгоритм розв'язання загалом складатиметься з двох етапів: побудова гідродинамічної сітки руху та безпосередня ідентифікація. Здійснюється це відповідно із застосуванням числового методу квазіконформних відображень та характеристичних для рівняння кон-

векції функцій. У якості вхідних даних для задачі ідентифікації виступають інформація про траєкторії (які співпадають з лініями течії) руху домішкової речовини та проміжки часу, за які забруднення переміщались від їх джерел до деяких наперед заданих ліній.

Проведено ідентифікацію точкових джерел забруднень за допомогою розробленого у роботі алгоритму при різних кількостях вузлів розбиття. Очікувано, що найнижча точність досягається на тих лініях течії, які проходять біля «ключових» точок ділянок прикладання квазіпотенціалів і застійних зон.

У перспективі: перенесення розробленого алгоритму на конвективно-дифузійний випадок, узагальнення на більш масштабні, ніж точкові забруднення, простір [10], задачі томографії [8, 11]; врахування наявності тонких прошарків [12] на ділянках ліній течії.

Список використаних джерел:

1. Власюк А. П., Багнюк О. М. Знаходження невідомих параметрів джерела забруднення в одновимірних нестационарних задачах масопереносу. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 11. С. 29-36.
2. Власюк А. П., Багнюк О. М. Ідентифікація місцеположення джерела забруднення в стаціонарній одновимірній задачі масоперенесення. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 40-48.
3. Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах: монографія. Рівне: НУВГП, 2017. 292 с.
4. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу: монографія. Рівне: НУВГП, 2013. 415 с.
5. Prautzsch H., Boehm W., Paluszny M. *Bézier and B-Spline Techniques*. Heidelberg: Springer, 2002. 304 p.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.
7. Bohaienko V., Gladky A. Parameters identification for fractional-fractal model of filtration-consolidation using GPU. *Proceedings of The Fourth International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2021)*, 27 April 2021, Zaporizhzhia, Ukraine, CEUR Workshop Proc. 2021. Vol. 2864. P. 409-418. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2864/paper36.pdf>.
8. Bomba A. Ya., Boichura M. V. Identifying the structure of soil massifs by numerical quasiconformal mapping methods. *Cybernetics and System Analysis*. 2021. Vol. 57 (6). P. 927-937.
9. Бомба А.Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації: монографія. Рівне: НУВГП, 2020. 188 с.
10. Теребус А. В. Просторові модельні аналоги крайових задач на квазіконформні відображення. *Волинський математичний вісник. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Рівне: РДГУ, 2011. Вип. 8 (17). С. 191-205.

11. Loke M. H. Tutorial: 2-D and 3-D electrical imaging surveys. URL: <https://www.geotomosoft.com/coursenotes.zip> (Last accessed: 08.02.2022).
12. Michuta O., Ivanchuk N., Martyniuk P., Ostapchuk O. A finite-element study of elastic filtration in soils with thin inclusions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5 (5). P. 41-48.

IDENTIFICATION OF COORDINATES OF IMPULSE SOURCES USING NUMERICAL QUASICONFORMAL MAPPING METHODS

The process of convective transfer of substances during filtration in a porous medium (horizontal layer) is considered. An approach to determining the coordinates and action time of a special type of impulse sources (pollution, heat, explosion, etc.) is proposed, based on the assumption that the latter have no significant effect on the filtration background. For identification, information about the trajectories (which coincide with the flow lines) of the movement of the impurity substance and the time intervals of the flow of pollution from their sources to the corresponding places (points) of observation (detection) is used. It is proposed to identify the coordinates of point sources using characteristic (in relation to the convection equation) functions, a priori information about the movement of pollution, and given coordinates of the nodes of the constructed hydrodynamic mesh. Significant simplifications for the process of constructing the solving algorithm are achieved by replacing the existing model problem of finding the functions of the quasipotential and the flow in complex by the corresponding inverse problem (which, among other things, provides the possibility of effectively constructing a hydrodynamic motion mesh). Its solution is based on the procedure of quasiconformal mapping of the corresponding quadrangular complex quasipotential domain into a given physical domain. Numerical experiments are presented and analyzed. In particular, it was found that the accuracy of identification of pollution sources depends significantly on the available values of quasiconformity residuals. Their greatest values are achieved on those flow lines that pass through characteristic points (so-called «key points») or near stagnant zones. It is possible to reduce the errors generated by the latter, in particular, with a large number of partition nodes. The developed algorithm provides opportunities for its further transfer to more complex cases of fluid motion, in particular, with additional consideration of the diffusion component, generalization to space, etc.

Key words: *mathematical modeling, quasiconformal mappings, nonlinear problems, numerical methods, point source.*

Отримано: 9.06.2022