УДК 004.56
DOI: 10.32626/2308-5916.2022-23.116-129

А. Ю. Прокофьєв, аспірант

Національний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

МЕТОД ТОЧНІСТНОГО ТАРИРУВАННЯ ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ

Одним з основних якісних показників обчислювальних засобів є точність результатів розв'язування ними прикладних задач, зокрема, задач моделювання та управління динамічними системами. Одначе, не дивлячись на широке використання засобів обчислювальної техніки (ОТ), проблему оцінки точності обчислень не можна вважати розв'язаною, а її актуальність зростає у зв'язку зі швидким розвитком та поширенням кібернетичних засобів різного призначення. Гострота проблеми полягає у складності аналізу похибок обчислень, яка призводить до громіздкості аналітичних обґрунтувань та до великого обсягу обчислень, необхідних для отримання конкретних числових даних.

Для рішення багатьох технічних та науково-дослідницьких задач широко застосовуються як універсальні, так і спеціалізовані засоби ОТ. Характерною відмінністю останніх від універсальних засобів ОТ є навмисно вузький клас алгоритмів, які реалізуються, орієнтований (клас) на розв'язування обмеженого кола прикладних задач. При цьому, природно, передбачається досягнення низки певних (у порівнянні з універсальними засобами ОТ) переваг, до яких, зазвичай, відносяться один або група факторів, таких, як: підвищена швидкодія, неаналітичний спосіб розв'язування задач (для аналогових спеціалізованих засобів ОТ), зменшені масо-габаритні характеристики та вартість, тощо. Слід зазначити, що проблема точності є актуальною як для універсальних, та і для спеціалізованих засобів ОТ, дещо трансформуючись, в залежності від типу засобу та принципу його дії, наприклад, своєрідність первинних похибок.

Ключові слова: *похибки обчислень, оцінки точності обчислень, теорія чутливості, точністне тарирування.*

Вступ. Практика розв'язування задач математичної фізики неухильно пов'язана з числовою реалізацією математичних моделей (ММ) досліджуваних динамічних систем із застосуванням засобів ОТ. Типовим прикладом таких задач для динамічних систем є задачі моделювання та управління. При цьому відповідні ММ у більшості прикладних задач можуть бути описані в рамках узагальненої ММ виду:

$$A_k y = x , \tag{1}$$

де A_k — оператор, який є елементом певного набору можливих операторів для конкретної задачі (або типу засобу ОТ); y, x — шуканий розв'язок та відома права частина (числа, вектори, функції), які мають свої обмежені області визначення.

Розглядаючи проблему точності реалізації ММ (1), слід зазначити, що *первинні похибки* у початкових даних призводять до необхідності розв'язувати наближену задачу

$$\tilde{A}_k \tilde{y} = \tilde{x} \,, \tag{2}$$

де $\tilde{A}_k = A_k + \Delta A_k$, $\tilde{x} + x + \Delta x$.

Машинний (*наближений*) розв'язок можна виразити у вигляді:

$$\tilde{y} = R_m \tilde{x} \,, \tag{3}$$

де R_m — машинний алгоритм, який являє собою систему операцій в універсальних або спеціалізованих засобах ОТ, а тому зосереджують в собі всю сукупність первинних інструментальних похибок, а також похибку метода розв'язування, який реалізується.

Похибка розв'язку, що очевидно, визначається як:

$$\Delta y = \tilde{y} - y \,, \tag{4}$$

може бути віднайдена лише при відомому *точному* розв'язку y , що обмежує прикладне застосування (4) в якості розрахункового виразу лише випадками розв'язування тестових (контрольних) задач. Одначе на практиці використовують метод аналізу похибки при більш точних контрольних розрахунках, що відповідає наступному виразу для похибки

$$\Delta y = \tilde{y} - \tilde{\tilde{y}} \,, \tag{5}$$

де $\tilde{\tilde{y}}$ — також машинний, але завідома більш «точний» розв'язок, який можна визначити як:

$$\tilde{\tilde{y}} = \bar{R}_m \tilde{\tilde{x}} \,, \tag{6}$$

де $\bar{R}_m$ — машинний алгоритм, який забезпечує підвищену точність розв'язку. Це, зазвичай, досягається за рахунок застосування більш «удосконаленого» обчислювача, хоча задля підвищення надійності контролю корисно реалізовувати інший, можливо, більш точний метод розв'язування.

Перетворення (4) призводить до виразу

$$\Delta y = R_m \tilde{x} - A_k^{-1} x \,, \tag{7}$$

який може бути прийнято за вихідне рівняння похибки.

Представляючи похибку розв'язку як результат перетворення первинних похибок q_s $\left(s = 1, 2, \ldots, n \right)$

$$\Delta y = F\left[q_s \right], \tag{8}$$

можна стверджувати, що перетворення F визначається двома основними факторами: властивостями задачі, яка розв’язується та властивостями точності засобу ОТ, що являє собою відоме положення, яке є джерелом багаточисельних ускладнень при аналізі точності обчислень [1]. В точному вигляді залежність (8) побудувати, як правило, не вдається [2-4] а з різноманіття наближень для F вдається віднайти лише деякі придатні для практичного застосування перетворення [4]. Одним з прикладів таких наближень може слугувати представлення похибки у вигляді усіченого ряду Тейлора, яке можна записати у вигляді

$$\Delta y \approx \varphi\left[q_s\right],$$

де $\varphi[\cdot]$ — оператор, який визначається незмінними для даної задачі параметрами (*коефіцієнтами впливу*).

В якості шляху, який дає змогу спростити наступний за процесом розв’язування задачі не менш трудомісткий процес *аналізу точності результату* (або підвищити його *оперативність*), можна представити перенесення, що найменше частини цього (останнього) процесу на період, що передує розв’язуванню. Цей шлях полягає у попередньому обчисленні залежностей похибки Δy (а, практично, її характеристик) від характеристик первинних похибок за допомогою послідовного перебору можливої множини цих первинних похибок.

Отриманих таким чином залежностей достатньо, щоб по них *оперативно* оцінювати точність засобу ОТ, що розв’язує яку-небудь задачу з характером похибок вихідних даних, які змінюються.

Мета та задачі дослідження. *Метою* роботи є розробка методу оцінки точності розв’язку задач реалізації ММ при моделюванні та управлінні динамічними системами, в основу якого покладено принцип *точністного тарирування* задач та засобів ОТ.

Для досягнення поставленої мети в роботі розв’язуються наступні *задачі*:

- оцінити похибки розв’язків за допомогою асоціативних залежностей між показниками точності, які цікавлять, та первинними похибками, отриманими в результаті попереднього процесу розв’язування задачі реалізації ММ динамічних систем;
- виконати класифікацію за точністю задач реалізації ММ динамічних систем за допомогою упорядкованої сукупності еталонних прикладів.

Викладення основного матеріалу дослідження. В літературі відомі методи аналізу точності [5] при числовому розв’язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\,, \tag{9}$$

де $\mathbf{A}$ — неособлива матриця n-го порядку; $\mathbf{b}$ та $\mathbf{x}$ — n-мірні вектори правої частини та шуканого розв’язку, серед яких, зокрема, найбільшого поширення набули: методи класичної теорії точності (*теорії чутливості* [6-8]); проведення завідома більш точних обчислень при розв'язуванні задачі; застосування аналітичних оцінок типу нерівності [9].

Розглянемо можливість теоретичного створення, а також запропонуємо процедуру *методу точністного тарирування* при реалізації ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління. При цьому зауважимо, що застосування методів теорії чутливості та проведення завідома більш точних обчислень при розв'язуванні задачі необхідні громіздкі розрахунки, які можна порівняти за обсягом обчислень з розв'язком поставленої задачі або, навіть такі, що перевищують цей обсяг. Застосування аналітичних оцінок типу нерівностей є більш економічним (в смислі трудомісткості обчислень), одначе результати аналізу, що можна отримати, як правило, занадто грубі.

Принцип тарирування надає певні можливості щодо усунення вказаних вище ускладнень. Ці можливості полягають в тому, що основна частина обчислень при аналізі точності виконуються завчасно, результатом чого є таблиці (або графіки), що відбивають залежність показників точності від первинних похибок для різних класів задач. Підготовлені у такий спосіб дані дозволяють достатньо оперативно, з невеликими обчисленнями, отримати числові характеристики похибок, якщо вдається «успішно» встановити приналежність конкретної задачі, яка розв'язується, до одного з «протарируваних» класів.

Щоб подолати труднощі, пов'язані з недостатнім обсягом відомостей щодо отримуваних показників, будемо пропонувати враховувати *статистичний характер первинних похибок* для отримання *ефективних* (близьких до істинної похибки) оцінок повної похибки.

Можна зауважити, що для застосування принципу тарирування по відношенню до системи (9), необхідно розв'язати низку задач, зокрема: задачу *класифікації* ММ, які реалізуються; віднаходження реальних процедур обчислення ймовірністних показників точності; складання програм обчислень ефективних оцінок похибок, тощо.

Для розробки методу тарирування при реалізації ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління виконаємо аналіз *неусувної* похибки розв'язку системи (9), яка виникає при розгляді останньої у стані збудження:

$$\left(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\right)=\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}\ , \tag{10}$$

де $\Delta\mathbf{A}=\left\{\Delta a_{ij}\right\}$; $i,\,j=\overline{1,n}$ — матриця первинних похибок завдання коефіцієнтів матриці $\mathbf{A}$; $\Delta\mathbf{b}=\left\{\Delta b_i\right\}$; $i=\overline{1,n}$ — вектор похибок (збуджень) правих частин; $\Delta\mathbf{x}$ — вектор похибок розв'язку.

В якості вихідної оцінки неусувної похибки оберемо оцінку норми вектора похибок [10]

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \le \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}\|, \tag{11}$$

де $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\right) - \mathbf{b}$ — вектор нев'язок.

Застосування оцінки (11) обмежено випадком, коли «точно» відомі матриця $\mathbf{A}$ та вектор $\mathbf{b}$.Тим не менш, вона найліпше підходить до побудови тарирувального процесу, оскільки дозволяє [11-12] отримувати розподіли для величини $\|\Delta\mathbf{x}\|$, виходячи з функції розподілу норми вектора нев'язок $\boldsymbol{\varepsilon}$, що, у свою чергу, дає можливість визначити границю довірливості для похибки, яка аналізується.

Компоненти вектора нев'язок $\boldsymbol{\varepsilon}$ як правило є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами з параметрами

$$m_{\varepsilon_i} \approx m_{\Delta b_i} - \sum_{j=1}^{n} m_{\Delta a_i} x_j \ ; \ i = \overline{1, n} \ , \tag{12}$$

$$\sigma_{\varepsilon_i} \approx \left(\sigma_{\Delta b_i}^2 + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{\Delta a_{ij}}^2 x_j^2 \right)^{1/2} , \ i = \overline{1, n} \ , \tag{13}$$

$m_{\Delta b_i}$, $m_{\Delta a_i}$, $\sigma_{\Delta b_i}^2$, $\sigma_{\Delta a_{ij}}^2$ — математичні очікування та дисперсії відповідних випадкових величин; x_j — компоненти розв'язку (9).

Внаслідок використання представлення вектора нев'язок $\boldsymbol{\varepsilon}$ у вигляді

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{m}_{\varepsilon} ,$$

де $\mathbf{D}$ — діагональна матриця, елементи якої визначаються за виразом (13); $\mathbf{m}_{\varepsilon}$ — вектор, компоненти якого визначаються за виразом (12); $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ — випадковий нормальний вектор з нульовим середнім та одиничною кореляційною матрицею, можна отримати наступну оцінку

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \le \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \left(\|\mathbf{D}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\| + \|\mathbf{m}_{\varepsilon}\| \right), \tag{14}$$

яку, як і відповідну оцінку для *відносної* похибки, вже можна використовувати для парирування СЛАУ за точністю, причому критерієм класу є порядок системи n , *точністним параметром класу* — функція розподілу $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|$, точністними параметрами задачі — величини $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|$, $\|\mathbf{D}\|$ та $\|\mathbf{m}_{\varepsilon}\|$.

Питання щодо обчислення функції розподілу деяких норм вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ розглядався в роботі [13] з позицій використання наявних табульованих функцій (нормальна функція розподілу, розподіл χ^2). Для мети ж тарирування представляється доцільним табулювання функцій розподілу різних норм вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ для різних СЛАУ. При цьому значення функцій розподілу $\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_1$ можна обчислити за формулою

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|1,n}\left(\tau\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\tau}e^{-\left(t/2\right)^2}dt\right)^n, \tag{15}$$

значення функції розподілу $\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_2$ — за формулою

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|2,n}\left(\tau\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\tau}\left[F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|2,n-1}\left(t\right)e^{-\left(\tau-t/2\right)^2}\right]dt, \tag{16}$$

причому

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|2,2}\left(\tau\right)=F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|1,2}\left(\tau/\sqrt{2}\right). \tag{17}$$

Наявність цих функцій розподілу дозволяє легко будувати оцінку знизу для функцій розподілу $\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|$ $\left(\frac{\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|}{\left\|\mathbf{x}\right\|}\right)$ (або оцінку границі довірливості для похибки) шляхом зміни масштабу незалежної змінної відповідної функції розподілу величини $\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|$ в $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\cdot\left\|\mathbf{D}\right\|$ $\left(\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\cdot\left\|\mathbf{D}\right\|}{\left\|\mathbf{x}\right\|}\right)$ раз і зсув початку координат вліво на $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\cdot\left\|\mathbf{m}_{\varepsilon}\right\|$ $\left(\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\cdot\left\|\mathbf{m}_{\varepsilon}\right\|}{\left\|\mathbf{x}\right\|}\right)$.

Наявність знаку нерівності у виразі (11) призводить до *завищення* відповідних оцінок точності. Уведемо випадкову величину $T_i\left(\mathbf{A}\right)$ (де $\left(i=1,2,3,\ldots\right)$ — індекс норми), яку будемо називати у подальшому *коефіцієнтом корекції 1 роду*, причому таку, що

$$\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|_i=T_i\left(\mathbf{A}\right)\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_i\cdot\left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_i. \tag{18}$$

Тоді, на підставі (11) та (18) витікає очевидне співвідношення

$$\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|_i\geq\frac{\left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_i}{\left\|\mathbf{A}\right\|_i}, \tag{19}$$

яке можна використовувати для побудови *оцінок зверху* функції розподілу $\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|_i$ (або *нижньої границі довірливості похибки*).

Уведемо також випадкову величину $q_i\left(\mathbf{A}\right)$ (де $\left(i=1,2,3,\ldots,n\right)$ — індекс норми), яку, відповідно, будемо називати *коефіцієнтом корекції 2 роду*, таку, що визначається виразом

$$\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|_i = \frac{\left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_i}{q_i\left(\mathbf{A}\right)\left\|\mathbf{A}\right\|_i}. \qquad (20)$$

З (18) та (20) витікає (за умови, що Θ — внутрішня точка області Ω можливих значень елементів $\boldsymbol{\varepsilon}$):

$$T_i\left(\mathbf{A}\right)q_i\left(\mathbf{A}\right) = \frac{1}{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_i\left\|\mathbf{A}\right\|_i};\ i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (21)$$

та

$$\max_{\varepsilon_i \neq 0} T_i\left(\mathbf{A}\right) = \max_{\varepsilon_i \neq 0} q_i\left(\mathbf{A}\right) = 1;\ i = 1, 2, 3, \ldots, n, \qquad (22)$$

а з (21) та (22)

$$\min_{\varepsilon_i \neq 0} T_i\left(\mathbf{A}\right) = \min_{\varepsilon_i \neq 0} q_i\left(\mathbf{A}\right) = \frac{1}{\left\|\mathbf{A}\right\|_i\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_i};\ i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (23)$$

Таким чином, нижня границя випадкових величин $T_i\left(\mathbf{A}\right)$ та $q_i\left(\mathbf{A}\right)$ залежить тільки від міри обумовленості матриці $\mathbf{A}$. Функції розподілу $F_{T_i}\left(\tau\right)$ і $F_{q_i}\left(\tau\right)$ величин $T_i\left(\mathbf{A}\right)$ та $q_i\left(\mathbf{A}\right)$ залежать як від обумовленості матриці $\mathbf{A}$, так і від розподілу вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ по області Ω. Покладемо, що вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ можна представити у вигляді:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma\boldsymbol{\varepsilon}_0,$$

де σ — скаляр; $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ — випадковий нормальний вектор з нульовим середнім та одиничною кореляційною матрицею. Таке представлення буде мати місце при виконанні наступних умов:

$$\left.\begin{aligned} M\left[\Delta b_i\right] = M\left[\Delta a_{ij}\right] = 0,\ i,\ j = \overline{1, n};\\ D\left[\Delta b_i\right] = \sigma\,\Delta b,\ i = \overline{1, n};\\ D\left[\Delta a_{ij}\right] = \sigma\,\Delta a,\ i,\ j = \overline{1, n}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

При цьому

$$\sigma = \left(\sigma_{\Delta b}^2 + \sigma_{\Delta a}^2\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|\right)^{1/2}. \qquad (25)$$

Між $F_{T_i}\left(\tau\right)$ і $F_{q_i}\left(\tau\right)$ існує зв'язок:

$$F_{q_i}\left(\tau\right) = \int\limits_{\left[(1/\tau)\left\|\mathbf{A}\right\|_i\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_i\right]}^{1} d\,F_{T_i}\left(t\right), \qquad (26)$$

тобто, у подальшому, будемо розглядати лише $T_i\left(\mathbf{A}\right)$, причому, за необхідності, з (26) легко отримати $q_i\left(\mathbf{A}\right)$.

Можна показати, що при розподілі вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, який розглядається (розподіл), випадкові величини $T_i\left(\mathbf{A}\right)$ та $\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i$ є *незалежними* при $i=n$ та *залежні* при $i=\overline{1,\left(n-1\right)}$. Одначе залежність в останньому випадку має слабкий характер, а тому у практичних розрахунках нею можна знехтувати. Таким чином, знаючи функції розподілу величин $T_i\left(\mathbf{A}\right)$ та $\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i$, враховуючи (18) можна визначити функцію розподілу величини $\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|_i$.

Визначимо можливість використання введених коефіцієнтів корекції $T_i\left(\mathbf{A}\right)$ для побудови придатних для тарирування *оцінок точності*.

Визначення. Матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ будемо називати T_i-подібними, якщо $F_{T_i(\mathbf{A})}\left(\tau\right)=F_{T_i(\mathbf{B})}\left(\tau\right)$, а $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ — випадковий n-мірний вектор з незалежними N розподіленими компонентами, причому значення цих компонент перебувають на відрізку $\left[0,1\right]$.

Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $\mathbf{A}$ — $\left(n\times n\right)$-неособлива матриця; $\mathbf{B}=\mathbf{\Pi}_1\mathbf{A}\mathbf{\Pi}_2$, де $\mathbf{\Pi}_1$ — ортогональна, а $\mathbf{\Pi}_2$ — неособлива матриця, такі, що $T_i\left(\mathbf{\Pi}_1\right)=T_i\left(\mathbf{\Pi}_2\right)=1$ для будь-якого вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$. Тоді матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ — T_i-подібні.

Доведення. За визначенням, коефіцієнт корекції 1-го роду для матриці $\mathbf{B}$ дорівнює:

$$T_i\left(\mathbf{B}\right)=\frac{\left\|\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i}{\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|_i\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i}=\frac{\left\|\mathbf{\Pi}_2^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Pi}_1^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i\left\|\mathbf{\Pi}_1^{-1}\right\|_i}{\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|_i\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i\left\|\mathbf{\Pi}_1^{-1}\right\|_i}=$$

$$=\frac{\left\|\mathbf{\Pi}_2^{-1}\right\|_i\left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Pi}_1^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i}{\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|_i\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i\left\|\mathbf{\Pi}_1^{-1}\right\|_i}=\alpha_b^{(i)}\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\varphi_0\right\|_i}{\left\|\varphi_0\right\|_i},$$

де $\alpha_b^{(i)}=\left\|\mathbf{\Pi}_2^{-1}\right\|_i\Big/\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|_i$, $\varphi_0=\mathbf{\Pi}_1^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0$.

Тоді очевидно можна записати:

$$T_i\left(\mathbf{A}\right)=\alpha_a^{(i)}\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i}{\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i},$$

де $\alpha_a^{(i)}=1\Big/\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_i$.

В силу ортогональності матриці $\mathbf{\Pi}_1$ та розподілу вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, що розглядається, вектор φ_0 має такий саме розподіл, як і вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, а тому величини

$$\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\varphi_0\right\|_i}{\left\|\varphi_0\right\|_i} \text{ та } \alpha_a^{(i)}\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i}{\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i}$$

мають однакові закони розподілу. Враховуючи (22), отримуємо $\alpha_a^{(i)} = \alpha_b^{(i)}$ та, таким чином, $F_{T_i(\mathbf{A})}(\tau) = F_{T_i(\mathbf{B})}(\tau)$, що і вимагалося довести.

Прикладами матриць $\mathbf{\Pi}_1$ та $\mathbf{\Pi}_2$, що задовольняють умовам теореми 1, можуть слугувати *матриці перестановки* $\left(i = \overline{1,n}\right)$ та *матриці обертання* $\left(i = n\right)$. Таким чином, доведено існування множини матриць, які мають однакові ймовірнісні характеристики коефіцієнтів корекції, що, в свою чергу, важливо для практичних застосувань.

З іншого боку, нехай $\overline{T}_{ij}$ — випадкова величина на відрізку $[0,1]$, а $F_{\overline{T}_{ij}}(\tau)$ — її функція розподілу, причому

$$F_{\overline{T}_{ij}}(\tau) \le F_{T_i}(\tau) \text{ при } \mathbf{A} \in \mathbf{Q}_j, \tag{27}$$

де $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1,m}$ — підмножина (яка не перетинається) деякої (вихідної) множини матриць $\mathbf{\Xi}$. Тоді з (18) та (27) випливає наступний вираз для ймовірностей:

$$p\left\{\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|_i \le \tau\right\} \ge p\left\{\overline{T}_{ij}\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_i\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i \le \tau\right\}, \tag{28}$$

який означає, що функції розподілу величини $\overline{T}_{ij}\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_i\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\right\|_i$ є *оцінкою знизу* функції розподілу величини $\left\|\Delta\mathbf{x}\right\|_i$ для будь-якої матриці з множини матриць $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1,m}$.

Викладене вище вказує на *метод* використання коефіцієнтів корекції для *тарирування по точності* при реалізації ММ динамічних систем шляхом побудови множин (класів) матриць $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1,m}$ та визначення $F_{\overline{T}_{ij}}(\tau)$, $j = \overline{1,m}$. При цьому необхідно виконання наступних умов (*умов класу*):

1. Умова якості класу — функція розподілу коефіцієнтів корекції матриць з фіксованої множини $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1,m}$ мають бути в певному

сенсі близькі одна до іншої, причому ступінь близькості (або міра розсіювання) є характеристикою якості даного класу $\mathbf{Q}_j$.

2. Умова розрізняння класу — наявність критерію приналежності конкретної задачі до певного класу, який реально може бути обчисленим (критерій класу).

При цьому практичний алгоритм розв'язування задачі щодо побудови множини матриць Ξ з наступним її розбиттям на класи $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1, m}$ може бути представлений наступним чином:

1. Апріорі формується критерій класу. Іншими словами, на першому етапі розв'язку необхідно апріорі (умовно) розбити початкову множину матриць Ξ на m класів $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1, m}$. При цьому не слід вибирати m надто малим, оскільки ясно, що чим більше класів буде апріорі визначено вибраним критерієм (тобто, чим менше буде ступінь варіації матриць з одного класу), тим вища можливість отримати класи з «хорошою» якістю. З іншого боку, число m не повинно бути занадто великим, оскільки значна кількість класів, отриманих апріорі, призводить до значного обсягу обчислювальної роботи. Розв'язок практичних задач показав, що доцільно приймати $m \approx 10$.

2. Визначаються $F_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$ та оцінка якості C_{ij} кожного класу $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1, m}$ для обраних норм i ($i = \overline{1, n}$). Щодо обчислення $F_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$ та C_{ij} слід зазначити наступне. Аналітичне обчислення цих характеристик досить ускладнене, тому при розрахунках доцільно використовувати числові методи аналізу, що призводить до необхідності заміни множини матриць $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1, m}$ на деяку кінцеву підмножину $\mathbf{Q}_{j_N}$, яка складається з N матриць-представниць множини $\mathbf{Q}_j$. Також має сенс замість $F_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$, що визначається виразом (27). визначати таку функцію розподілу $F^*_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$ (тобто оцінку $F_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$), що $p\left\{F^*_{\bar{T}_{ij}}(\tau) \le F_{T_i(\mathbf{A})}(\tau), \mathbf{A} \in \mathbf{Q}_j\right\}$ достатньо велика. Практично $F^*_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$ можна визначати наступним чином:

$$P^*_{rij} = \bar{\mu}_{P_{rij}} + 3\bar{\sigma}^2_{P_{rij}}, \tag{29}$$

де P^*_{rij} — P_r-квантиль ($P_r = r\Delta p$, $r = \overline{0, R-1}$, R — число обчислених квантилів) функції розподілу $F^*_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$; $\bar{\mu}_{P_{rij}}$, $\bar{\sigma}^2_{P_{rij}}$ — оцінки внутрішньокласних математичного очікування та дисперсії, відповідно;

P_r-квантилі, які обчислюються за звичайними формулами для незміщених оцінок, а саме:

$$\bar{\mu}_{P_{rij}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} P_{rij}\left(\mathbf{A}_k\right), \tag{30}$$

$$\bar{\sigma}^2_{P_{rij}} = \frac{1}{N-1}\sum_{k}^{N}\left[P_{rij}\left(\mathbf{A}_k\right) - \bar{\mu}_{P_{rij}}\right]^2, \tag{31}$$

де $\left(\mathbf{A}_k\right)$ $k = \overline{1, N}$ — матриць-представниць множини $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1, m}$.

Для визначення $F_{T_i(\mathbf{A}_k)}(\tau)$, а точніше — оцінок P_r-квантилів $P_{rij}\left(\mathbf{A}_k\right)$, доцільно скористатися методом статистичних випробувань [14], щоб побудувати статистичну функцію розподілу величини $T_i\left(\mathbf{A}\right)_k$ по виборці N.

Оцінку якості класу C_{ij} можна обчислити, припускаючи

$$C_{ij} = \frac{6}{R}\sum_{r=0}^{R-1} \bar{\sigma}_{P_{rij}} . \tag{32}$$

Прийнятий спосіб побудови $F^*_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$ (вираз (29)) дозволяє вважати *критичними* похибки визначення оцінок $\bar{\mu}_{P_{rij}}$ та $\bar{\sigma}^2_{P_{rij}}$ ті, які призводять до занижених значень цих похибок, що дає змогу обирати N, виходячи з верхніх границь довірливості оцінок $\bar{\mu}_{P_{rij}}$ та $\bar{\sigma}^2_{P_{rij}}$.

3. Визначення класів $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1, m}$, для яких $C_{ij} < C_{i0}$, де C_{i0} — мінімальна оцінка якості класу.

Будемо виходити з припущення, що таких класів m_1. Далі, шляхом відповідної зміни критерію класу, розділимо множину $\bigcup_s \mathbf{Q}_s$ на m_{s_1} підмножин $\mathbf{Q}_{s_1}$, $s_1 = \overline{1, m_{s_1}}$, причому так, щоб виконувалося $m_{s_1} > m_1$. Після цього проводяться розрахунки для етапу 2, тоді — етапу 3, тощо, поки оцінки якості класів, що формуються, виявляться не гірше мінімальної. Такий ітераційний процес побудови класів із заданою якістю може збігатися в сенсі $m_l \to 0$ при великих l (l — число повертань до 2-го етапу).

4. Використовуючи методи кластер-аналізу, наприклад, метод «k-середніх» [11], проводиться групування m класів по заданій функції відстані між класами та критерію об'єднання класів (*порогу від-*

стані). Отримані в результаті такого групування класи утворюють *субкласи*. Оцінкою якості субкласу може слугувати мінімальна оцінка якості серед класів, які входять у субклас. Розв'язування тестових задач показує, що проведення такої класифікації матриць $\mathbf{Q}_j$, $j = \overline{1,m}$ дозволяє отримати більш ефективні (у порівнянні з [12, 14]) оцінки функції розподілу $\|\Delta\mathbf{x}\|_i$ шляхом визначення класу $\mathbf{Q}_j$, якому належить конкретна матриця $\mathbf{A}$, і побудови функції розподілу величин $\bar{T}_{ij}\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{i\sigma}\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$, для чого необхідно мати функцію розподілу $F_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$ величини $\bar{T}_{ij}\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$. Вважаючи величини $\bar{T}_{ij}$ та $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$ незалежними, функцію розподілу їх добутку порівняно легко оцінити, використовуючи кубатурну формулу:

$$F_{T_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) = p\left\{\bar{T}_{ij}\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i \le \tau\right\} > \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|}\left(\frac{\tau}{P_r}\right) = F^{*}_{T_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau), \qquad (33)$$

де R — число інтервалів, на яке розбивається відрізок $[0,1]$; P_r — r/R-квантіль.

Зазначимо, що запропоновані оцінки справедливі в рамках *лінійної теорії точності*.

Висновки. В роботі розроблено теоретичні засади методу точністного тарирування при числовій реалізації засобами ОТ ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління.

Метод дозволяє дати оцінку точності одержаного розв'язку, виходячи з первинних похибок, що обумовлено початковими даними, та ґрунтується на аналізі неусувної похибки розв'язку СЛАР (суть формалізованого представлення моделей динамічних систем), яка виникає при розгляді перехідних (динамічних) режимів функціонування досліджуваних систем.

На відміну від поширеної теорії чутливості, апарат якої застосовується для аналізу точності розв'язку, зокрема СЛАР, запропонований метод точністного тарирування дозволяє не вдаватися до громіздких розрахунків (які можна порівняти за обсягом обчислень при розв'язуванні поставленої задачі моделювання або управління), а отримати досить чіткі інтервальні оцінки у вигляді нерівностей. Останні визначають «протарирувані» класи точності, що задають гарантовану точність реалізації (розв'язку) ММ у вигляді сформованої СЛАР.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф., Ефимов И. Е., Латышев А. В. Вычислительные процессы в системах управления и моделирования. Ленинград: Судостроение, 1989. 244 с.

2. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця: ВНТУ, 2010. 260 с.
3. Евланов Л. Г. Контроль динамических систем. Москва: Наука, 2009. 431 с.
4. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. Москва: Мир, 1989. 494 с.
5. Киндерлерер Д., Стампакья Г. М. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир. 1983. 256 с.
6. Згуровский М. З., Новиков А. Н. Анализ и управление односторонними физическими процессами. Киев: Наукова думка, 1996. 326 с.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Москва: Наука, 1989. 608 с.
8. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1990. 368 с.
9. Положаенко С. А. Математические модели процессов течения аномальных жидкостей *Моделювання та інформаційні технології*: *зб. наук. праць*. Київ: ІПМЕ, 2001. Вип. 9. С. 14-21.
10. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. Москва: Наука, 1979. 428 с.
11. Корн Г., Котрн Т. Справочник по математике. Москва: Наука, 1990. 831 с.
12. Положаенко С. А. Метод оптимизационного решения одного класса вариационных неравенств. *Тр. Одес. политехн. ун-та*. Одесса, 2001. Вып. 1 (13). С. 175-181.
13. Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. Київ: Наукова думка, 2002. 458 с.
14. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1990. 352 с.

THE METHOD OF PRECISION CALIBRATION IN THE IMPLEMENTATION OF MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMIC SYSTEMS IN MODELING AND CONTROL PROBLEMS

One of the main qualitative indicators of computing tools is the accuracy of the results of solving applied problems by them, in particular, problems of modeling and control of dynamic systems. However, despite the widespread use of computer technology (CT), the problem of assessing the accuracy of calculations cannot be considered solved, and its relevance is growing due to the rapid development and spread of cybernetic tools for various purposes. The severity of the problem lies in the complexity of the analysis of calculation errors, which leads to the cumbersomeness of analytical justifications and the large volume of calculations required to obtain specific numerical data.

To solve many technical and research problems, both universal and specialized OT tools are widely used. The characteristic difference of the latter from universal tools of OT is a deliberately narrow class of algorithms that are implemented, oriented (class) to solving a limited range of

applied problems. At the same time, it is naturally expected to achieve a number of certain (compared to universal OT tools) advantages, which usually include one or a group of factors, such as: increased speed, a non-analytical method of solving problems (for analog specialized OT tools), reduced mass-dimensional characteristics and cost, etc. It should be noted that the problem of accuracy is relevant for both universal and specialized OT tools, being somewhat transformed, depending on the type of tool and the principle of its action, for example, the originality of primary errors.

Key words: *calculation errors, calculation accuracy estimates, sensitivity theory, precision calibration.*

Отримано: 19.10.2022