

ефективності та адекватності комп'ютерного моделювання електромагнітних процесів у реальних схемах енергетичних пристроїв з необхідною точністю. Використовуючи відомі методи побудови схем заміщення, можна отримати схеми заміщення силових енергетичних установок. Однак велика кількість вузлів еквівалентних схем (отже, високий порядок систем диференціальних рівнянь) часто не забезпечує вирішення задач аналізу з необхідною точністю та часовими обмеженнями, що вимагає нових, більш ефективних підходів до моделювання періодичних режимів силових енергетичних установок.

**Ключові слова:** силові енергетичні установки, періодичні режими, метод інтегральних рівнянь, моделювання динаміки енергетичних об'єктів.

Отримано: 19.10.2023

УДК 62-366.1:531.7:822

DOI: 10.32626/2308-5916.2023-24.15-25

**Я. В. Іванчук**, д-р техн. наук, професор,

**Р. Д. Іскович-Лотоцький**, д-р техн. наук, професор,

**Р. С. Белзецький**, канд. техн. наук,

**В. С. Озеранський**, канд. техн. наук

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

## **МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ**

З метою підвищення ефективності методів і засобів математичного моделювання віброударних систем розроблено узагальнену функцію періодичного режиму руху виконавчого органу у формі залежності ударного імпульсу від співвідношення кутових швидкостей лінійної консервативної системи та власної. При отриманні даної функції було використано інтегральну функцію одиничного стрибка Хевісайда та періодичну функцію Гріна. Функція залежності частоти коливань від ударного імпульсу визначена із умов співударяння для функції реакції системи на періодичну послідовність імпульсів. Розглянута розрахункова модель віброударної системи, як з одним ударним елементом та обмежувачем руху, так із двосторонньою ударною парою при почергових ударних взаємодіях з обмежувачами із лінійною силовою взаємодією в проміжках між ударами. При розробці математичної моделі було використано стереомеханічну модель удару, яка характеризується коефіцієнтом відновлення швидкості після удару. Аналіз функції залежності частоти коливань від ударного імпульсу дозволив отримати скелетні діаграми резонансних та квазірезонансних

коливань віброударних систем з однією і багатьма степенями вільності. На основі отриманих фазових діаграм стану віброударних систем визначено, що у системі із зазором збільшення швидкості удару збільшує частоту коливань і віброударна нелінійність є «жорсткою», а в системі із натягом, при збільшенні значення ударного імпульсу, частота коливань зменшується тобто нелінійність є «м'якою». При відсутності зазору система є ізохронною. У залежності від початкового запасу енергії і розміщення обмежувачів в несиметричній коливальній системі, з однією степеню вільності, можуть існувати віброударні режими як з одним (ближче розміщений), так і з обома обмежувачами. У лінійній консервативній системі із декількома степенями вільності реалізується одноударний  $T$ -періодичний режим. Якщо дисипація при русі і при ударі дуже мала, тоді в системі може існувати режим, який близький до резонансного. При цьому періодичні коливання підтримуються слабкою зовнішньою періодичною силою. Розроблена математична модель також дозволяє повністю описати процес зміни відносної координати переміщення робочого органу, як в перехідних, так і у встановлених режимах руху системи.

**Ключові слова:** *математична модель, удар, частота, імпульс, резонанс, вібрації.*

**Вступ.** Використання віброударного обладнання у різних галузях промисловості дозволяють значно інтенсифікувати протікання ряду технологічних процесів [1], забезпечити оптимальність параметрів навантаження і одержати результат технологічної обробки з високими якісними параметрами [2].

Основним засобом дослідження віброударних систем (ВС) є метод точкових відображень [3], який базується на припасуванні безударних розв'язків, що розділені моментами ударного контакту. Проте метод припасовування придатний насамперед для аналітичного дослідження лінійних систем низької розмірності. Якщо система нелінійна, то не вдається збудувати аналітичного рішення в проміжках між співударяннями; якщо ж система лінійна, але має високий порядок, тоді виникають проблеми обчислювального характеру, пов'язані із необхідністю визначення великої кількості постійних інтегрування, що входять до умов припасовування.

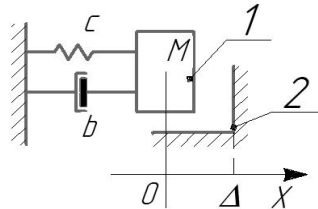
Загальноприйнятим підходом до моделювання ВС є підхід асимптотичного представлення розв'язків по степеням малого параметру [4] при аналізі основних гармонійних складових коливань. Він базується на виділенні із їх загального математичного опису більш простих співвідношень при переході до спектральних представлень [5] і ідеям еквівалентної лінеаризації [6], але не дозволяє знайти прийнятну математичну модель для вібраційних систем.

Більш ефективним є підхід, що базується на описі періодичного руху ВС за допомогою інтегральних рівнянь. Основними характеристиками ВС є імпульс і частота ударів, що залежать, у свою чергу, від руху ударного органу. Метод інтегральних рівнянь дозволяє виділити одне рівняння, що описує рух ударного елемента. Структура системи визначає вид ядра – періодичної функції Гріна. Основними обмеженнями математичної моделі є розміри ВУС і потужність джерела енергії. У найбільш розповсюджених конструкціях ці вимоги можуть бути зведеними або до обмеження керування по модулю (обмеження габаритів у пневматичних або гідравлічних системах); або до середньоквадратичного обмеження (зменшення ваги установки тощо).

**Метою дослідження** – є підвищення ефективності методів і засобів математичного моделювання ВС за допомогою розробки узагальненої функції періодичного руху виконавчого органу, яка дозволяє повністю описати процес зміни відносної координати переміщення, як в перехідних, так і у встановлених режимах руху системи.

**Резонансні та квазірезонансні коливання віброударних систем.** Для ефективного дослідження коливальних процесів віброударних систем (ВС) доцільно розглянути моделювання консервативних систем як з однією так і з декількома степенями вільності [7].

Зокрема, для лінійної консервативної системи з одним ступенем свободи і одностороннім обмежувачем при абсолютно пружному ударі ( $R = 1$  – коефіцієнт відновлення швидкості після удару) розрахункова схема вільних коливань представлена на рисунку 1, а.



**Рис. 1.** Розрахункова схема ВС із одностороннім обмежувачем

Рівняння вільних коливань ВС за умовою початку відліку часу в момент удару [2, 5]:

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0 \quad (0 < t < T), \quad (1)$$

де  $\Omega^2 = c / M$  – частота вільних коливань консервативної системи, а для полегшення обчислень доцільно прийняти значення маси коливального тіла 1 рівним  $M = 1,0$  кг;  $c$  – жорсткість пружного елемента.

Також рівняння вільних коливань (1) необхідно доповнити умовами співударяння і періодичності:

$$x(0) = x(T) = \Delta; \quad \dot{x}(0_+) = -\dot{x}(T_-) = -v_0, \quad (2)$$

де  $T = 2\pi / \omega_0$  – період вільних коливань ударного осцилятора [3];  $\omega_0$  – частота коливань;  $v_0$  – швидкість тіла 1 в момент удару по обмежувачу 2;  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  – поточні координати положення і швидкості тіла 1.

У проміжку між ударами закон руху тіла відповідає реакції системи на періодичну послідовність імпульсів:

$$x = -J \chi_1(t), \quad (3)$$

де  $J = 2v_0$  – ударний імпульс [4];  $\chi_1(t) = \frac{1}{2\Omega} \frac{\cos \Omega(t-T/2)}{\sin(\Omega(T/2))}$  –

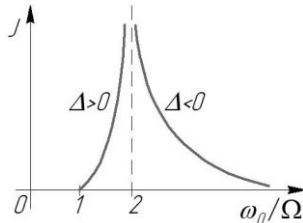
періодична функція Гріна першого роду для системи (1) для  $0 < t < T$ .

Ударний імпульс визначається початковим запасом енергії системи. Функція залежності частоти коливань від ударного імпульсу  $\omega_0(J)$  визначається, із умов співударяння (2) для функції реакції системи на періодичну послідовність імпульсів (3):

$$-J \chi_1(0) = \Delta. \quad (4)$$

Використовуючи періодичну функцію Гріна першого роду для системи (1) при  $0 < t < T$ , отримаємо:

$$J = -2\Omega \Delta t g \left( \frac{\pi \Omega}{\omega_0} \right). \quad (5)$$



**Рис. 2.** Скелетна діаграма зміни значення ударного імпульсу

На основі залежності (5) будується скелетна діаграма залежності

$J = f\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)$  на рисунку 2, де за допомогою умови  $J \geq 0$  можуть бути

виділені частотні області, а саме:

$$\begin{cases} 1 < \omega_0 / \Omega < 2 & (\Delta > 0); \\ \omega_0 / \Omega > 2 & (\Delta < 0). \end{cases} \quad (6)$$

На рисунку 3 показані фазові діаграми досліджуваної системи, які інтерпретують залежність (5). Досліджувана точка  $A$  рухається по усиченому колу із постійною кутовою швидкістю  $\Omega$ . Радіус кола  $\rho = (\Delta^2 + v_0^2 / \Omega^2)^{1/2}$  фіксується початковими умовами (2). Оскільки

удар є миттєвим, тоді значенням часу переходу від точки  $A$  до точки  $B$  можна знехтувати, і тоді тривалість циклу дорівнює значенню часу пробігу по дузі й відповідає значенню періоду коливань  $T = 2\pi / \omega_0$ .

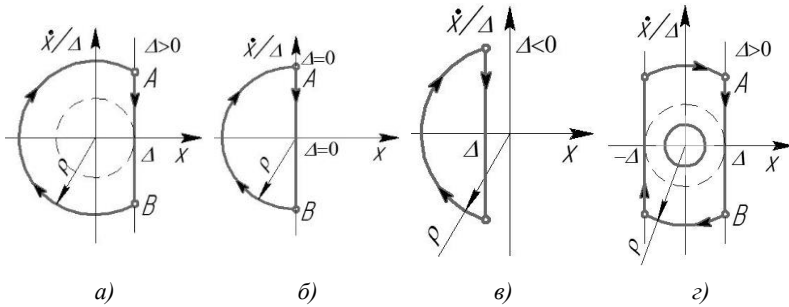


Рис. 3. Фазові діаграми стану  $BC$ : а)  $\Delta > 0$ ; б)  $\Delta = 0$ ; в)  $\Delta < 0$ ; г)  $x = -\Delta$

У консервативній системі без обмежувача, із початковими умовами руху (2), точка  $A$  (див. рис. 3) за період  $T = 2\pi / \Omega$  проходить з такою ж частотою  $\Omega$  повне коло із таким же радіусом  $\rho$ . Відповідно, період  $T > T_0$  і частота коливань  $\omega_0 > \Omega$ , тобто введення обмежувача робить систему більш «жорсткішою». Більше того, аналізуючи фазові діаграми на рисунку 3, можна зробити висновок, що узгоджується із умовою значення ударного імпульсу  $J \geq 0$ , а саме:

$$\begin{cases} 1 < \omega_0 / \Omega < 2, & \Delta > 0; \\ \omega_0 / \Omega = 2, & \Delta = 0; \\ \omega_0 / \Omega > 2, & \Delta < 0. \end{cases} \quad (7)$$

У системі із зазором збільшення швидкості удару  $v_0$  збільшує частоту коливань, і віброударна нелінійність є «жорсткою», а в системі із натягом ( $\Delta > 0$ ), при збільшенні значення ударного імпульсу, частота коливань зменшується тобто нелінійність є «м'якою». При  $\Delta = 0$  система є ізохронною ( $\omega_0 = 2\Omega$ ). При співпадінні частот ( $\omega_0 = \Omega$ ) відбувається дотик коливальної маси 1 із обмежувачем 2 ( $J = 0$ ).

Для визначення рівняння коливань  $BC$  із двома симетричними обмежувачами необхідно зв'язати початок відліку часу руху маси 1 із моментом після удару об правий обмежувач 2.

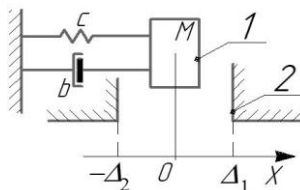


Рис. 4. Розрахункова схема  $BC$  із симетричними обмежувачами

Тоді умова співударяння і періодичності для розрахункової схеми на рисунку 4:

$$\begin{cases} t = 0, \quad x = \Delta, \quad t = T/2, \quad x = -\Delta; \\ \dot{x}(0_+) = -\dot{x}(T/2) = -v_0. \end{cases} \quad (8)$$

Таким чином, рух ВС відповідає реакції системи на потік ударних імпульсів, що змінюють знак через напівперіод [8], в інтервалах між співударяннями:

$$x(t) = -J \chi_2(t) \quad (0 < t < T/2, \quad T = 2\pi / \omega_0), \quad (9)$$

де  $\chi_2(t) = \frac{1}{2\Omega} \frac{\sin \Omega(t - T/\Delta)}{\cos(\Omega T/4)}$  – періодична функція Гріна другого роду [1, 4] при  $0 < t < T/2$ .

Залежність частоти коливань  $\omega_0$  від ударного імпульсу задається умовою співударяння:

$$-J \chi_2(0) = \Delta. \quad (10)$$

Використовуючи рівняння (9) і (10) буде отримано:

$$J \operatorname{tg} \left( \frac{\pi \Omega}{2\omega_0} \right) = 2\Omega \Delta. \quad (11)$$

Умова  $J \geq 0$  виділяє область існування частот вільних коливань:

$$\omega_0 / \Omega \geq 1, \quad (12)$$

яку можна отримати аналізуючи фазову діаграму (див. рис. 3, г).

На основі залежності (11) будуватиметься скелетна діаграма залежності  $J = f\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)$  на рисунку 5, де гранична точка  $\omega_0 = \Omega$  відповідає випадку співударяння при значенні ударного імпульсу  $J = 0$ .

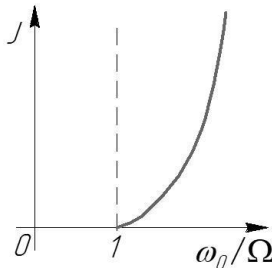


Рис. 5. Скелетна діаграма зміни значення ударного імпульсу

Для визначення рівняння коливань ВС із двома несиметричними обмежувачами необхідно також зв'язати початок відліку часу руху маси 1 із моментом після удару об правий обмежувач 2 (див. рис. 4).

Тоді умова співударяння і періодичності для розрахункової схеми на рисунку 4:

$$\begin{cases} t = 0, & x = \Delta_1, \dot{x}_+ = -v_0; \\ t = T/2, & x = -\Delta_2. \end{cases} \quad (13)$$

Значення швидкості в момент  $t = T/2$  визначається співвідношенням [2, 5] (при  $\theta_1 = 0$ ):

$$\begin{cases} -J_1 \chi_1(0) + J_2 \chi_1(T/2) = \Delta_1; \\ -J_1 \chi_1(T/2) + J_2 \chi_1(0) = -\Delta_2, \end{cases} \quad (14)$$

де  $J_1 = 2v_0$ , а значення ударного імпульсу  $J_2 = -2\dot{x}_-(T/2)$  визначається із розв'язку системи (14) і виражається через аргумент  $J_1$ .

Тоді із (14):

$$\begin{cases} J_1 = -\frac{1}{2}[(\Delta_1 + \Delta_2)\chi_2^{-1}(0) + (\Delta_1 - \Delta_2)\chi_3^{-1}(0)] = j_1 - j_2; \\ J_2 = -\frac{1}{2}[(\Delta_1 + \Delta_2)\chi_2^{-1}(0) - (\Delta_1 - \Delta_2)\chi_3^{-1}(0)] = j_1 + j_2, \end{cases} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} \chi_2(t) &= \chi_1(t) - \chi_1\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad \chi_2(0) = -(2\Omega)^{-1} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\Omega}{2\omega_0}\right), \\ \chi_3(t) &= \chi_1(t) + \chi_1\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad \chi_3(0) = (2\Omega)^{-1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\Omega}{2\omega_0}\right). \end{aligned}$$

Функція  $\chi_3(t)$  є періодичною функцією Гріна першого роду із періодом  $T/2$ . У формулах (15) перший доданок  $J_1$  відповідає ударному імпульсу в консервативній системі із симетрично розташованими обмежувачами при  $x = \pm(\Delta_1 + \Delta_2)/2$ , а другий доданок  $J_2$  характеризує зміну значення ударного імпульсу, викликане несиметричним розташуванням обмежувачів руху 2 (див. рис. 4).

Із формули (15):

$$\begin{cases} J_1 = \Omega(\Delta_1 + \Delta_2) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\Omega}{2\omega_0}\right) - \Omega(\Delta_1 - \Delta_2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\Omega}{2\omega_0}\right); \\ J_2 = \Omega(\Delta_1 + \Delta_2) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\Omega}{2\omega_0}\right) + \Omega(\Delta_1 - \Delta_2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\Omega}{2\omega_0}\right). \end{cases} \quad (16)$$

Умова існування двоударного несиметричного режиму руху при  $J_1 \geq 0$  і  $J_2 \geq 0$  виділяє наступну область:

- а) для випадку  $\Delta_1 > \Delta_2$  із системи рівнянь (16) маємо, що  $J_2 > 0$  при  $\omega_0/\Omega > 1$ , а удар об правий обмежувач 2 (див. рис. 4) існує тільки

при умові  $tg^2 \frac{\pi\Omega}{2\omega_0} \leq \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2} = \mu^2$  і границя двоударного режиму

визначається співвідношенням  $\lambda = \frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{\pi}{2 \arctg \mu}$  ( $1 \leq \lambda \leq 2$ ). Зна-

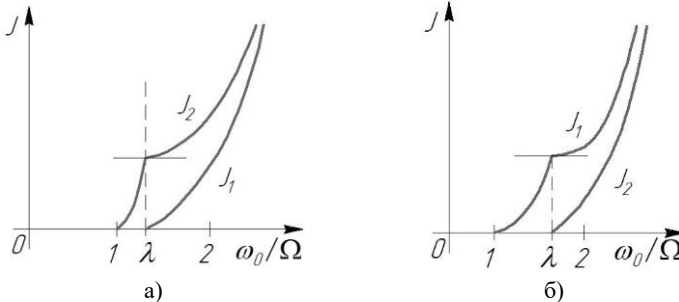
чення  $\lambda=1$  відповідає наявності симетричного обмежувача (див. рис. 4), а значення для випадку  $\Delta_2 = 0$ ,  $J_1 = 0$  (квазісинхронна система). Скелетна діаграма зміни значення ударного імпульсу при несиметричному розташуванні обмежувача ( $\Delta_1 > \Delta_2$ ) представлена

на рисунку 6, а. При умові  $1 < \frac{\omega_0}{\Omega} < \lambda$  може існувати віброударний режим тільки по лівому обмежувачу.

- б) для випадку  $\Delta_1 < \Delta_2$  із системи рівнянь (16) маємо, що  $J_1 > 0$  при  $\frac{\omega_0}{\Omega} \geq 1$ , а умова  $J_2 \geq 0$  виконується, якщо  $tg^2 \frac{\pi\Omega}{2\omega_0} \leq \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{|\Delta_1 - \Delta_2|} = \mu^2$ .

Умова існування двоударного режиму визначається відношенням  $\lambda = \frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{\pi}{2 \arctg \mu}$ . Скелетна діаграма зміни значення ударного

імпульсу при несиметричному розташуванні обмежувача ( $\Delta_1 < \Delta_2$ ) представлена на рисунку 6, б. При  $1 < \frac{\omega_0}{\Omega} < \lambda$  може існувати віброударний режим тільки по правому обмежувачу.



**Рис. 6.** Скелетні діаграми зміни значення ударного імпульсу при несиметричному розташуванні обмежувача: а)  $\Delta_1 > \Delta_2$ ; б)  $\Delta_1 < \Delta_2$

Таким чином, в залежності від початкового запасу енергії і розміщення обмежувачів в несиметричній системі можуть існувати віброударні режими як з одним (ближче розміщений), так і з обома обмежувачами.

Для лінійної консервативної системи із декількома степенями вільності динаміка коливального руху консервативної системи описується рівняннями загального виду [4, 7]:



$$D_0(p)x = 0, \quad (17)$$

де  $D_0(p)$  – оператор динамічної жорсткості системи, зведений до точки удару;  $\text{Im } D_0(ki\omega) \equiv 0$ .

Використавши при розв'язку рівняння (17) додатково умови удару (2) і розглядаючи коливальний рух як реакцію системи на періодичну послідовність імпульсів, буде отримано:

$$x(t) = -J\chi_1(t), \quad (18)$$

де  $\chi_1(t)$  – періодична функція Гріна першого роду, що відповідає

$$\text{системі (17), при чому } \chi_1(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} l_0(ki\omega) \cos k\omega t,$$

$$l_0(ki\omega) = D_0^{-1}(ki\omega), \quad \text{Im } l_0(ki\omega) = 0.$$

Період коливань та ударний імпульс зв'язані співвідношенням:

$$\begin{cases} x(0) = -J\chi_1(0) = \Delta; \\ J = -\Delta[\chi_1(0)]^{-1}. \end{cases} \quad (19)$$

Аналогічно для системи із двосторонніми симетричними обмежувачами:

$$x(t) = -J\chi_2(t), \quad (20)$$

де  $\chi_2(t)$  – періодична функція Гріна, яка відповідає системі рівнянь (17):

$$\chi_2(t) = \frac{4}{t} \sum_{k=1}^{\infty} l_0[(2k+1)i\omega] \cos(2k+1)\omega t. \quad (21)$$

Так як ударний імпульс визначається початковим запасом енергії в системі, тому період коливань зв'язаний з ударним імпульсом залежностями типу (4):

$$\begin{cases} x(0) = -J\chi_2(0) = \Delta; \\ J = -\Delta[\chi_2(0)]^{-1}. \end{cases} \quad (22)$$

Таким чином, в консервативній віброударній системі реалізується одноударний  $T$ -періодичний режим, параметри якого визначаються співвідношеннями (19) або (22).

Якщо дисипація при русі і при ударі дуже мала, тоді в системі може існувати режим, який близький до резонансного. При цьому періодичні коливання підтримуються слабкою зовнішньою періодичною силою.

Умова існування періодичного режиму, близького до резонансного зводяться до вимоги балансу енергії зовнішніх і дисипативних сил за період на отриманому розв'язку консервативної системи.

**Висновки.** Специфіка періодичного руху механічних ВС найбільш повно проявляється при аналізі режимів руху близьких до ре-

зонансних. В області резонансу інтенсивні коливання ВС підтримуються збуджуючою силою і рух можна вважати подібним вільного, при умові, що дисипативні сили в системі малі. У зв'язку з цим особлива увага приділяється дослідженню вільних коливань консервативної системи, динамічна модель якої дозволяє визначити основні властивості системи коливань в одноударному періодичному режимі.

Таким чином розроблено математичну модель у формі функції залежності частоти коливань від ударного імпульсу, яка дозволяє повністю описати резонансні та квазірезонансні коливання ВС з однією або декількома степенями вільності.

### Список використаних джерел:

1. Іскович-Лотоцький Р. Д., Іванчук Я. В., Веселовський Я. П. Основи резонансно-структурної теорії віброударного розвантаження транспортних засобів. *Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна*. 2014. № 5 (53). С. 109-118. DOI: 10.15802/stp2014/30458.
2. Іскович-Лотоцький Р. Д., Іванчук Я. В., Веселовський Я. П. Оптимізація конструктивних параметрів інерційного вібропрес-молота. *Вісник машинобудування та транспорту*. 2016. № 2. С. 43-50.
3. Іскович-Лотоцький Р. Д., Іванчук Я. В., Веселовський Я. П. Моделювання робочих процесів гідроімпульсного привода з однокаскадним клапаном пульсатором. *Вібрації в техніці та технологіях*. Вінниця, 2017. № 3 (86). С. 10-19.
4. Іскович-Лотоцький Р. Д., Коц І. В., Іванчук Я. В., Івашко Є. І. Моделювання руху двомасового вібраційного живильника на базі гідроімпульсного привода. *Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету. Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація*. Кропивницький: КНТУ, 2018. Вип. 31. С. 3-9.
5. Іванчук Я. В. Математичний метод визначення стійкості коливальних систем під дією зовнішнього вібраційного навантаження. *Технічні науки та технології: науковий журнал*. Чернігів: ЧНТУ, 2018. № 2 (12). С. 25-33. DOI: 10.25140/2411-5363-2018-2(12)-25-33.
6. Іскович-Лотоцький Р. Д., Іванчук Я. В., Івашко Є. І. Математичне моделювання зусилля на робочому органі вібромолота з гідроімпульсним приводом. *Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини*: зб. наук. пр. Київ, 2018. № 91 (2018). С. 5-12. DOI: 10.26884/gbmm1891.0101.
7. Ivanchuk Y. V. Mathematical modeling for the technological process of surface soil compaction by the inertial vibratory rammer. *Academic journal. Series: Industrial Machine Building, Civil Engineering*. Poltava, PoltNTU, 2019. Vol. 1 (52). P. 15-24. DOI: 10.26906/znp.2019.52.1666.
8. Іванчук Я. В., Іскович-Лотоцький Р. Д., Севостьянов І. В. та ін. Математичне моделювання робочих процесів в керуючій апаратурі гідроімпульсного привода. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2021. Т. 5. № 2. С. 47-56. DOI: <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2021.5.2.243661>.

## MODELING OF OSCILLATORY PROCESSES OF VIBRO-IMPACT SYSTEMS

In order to improve the efficiency of methods and means of mathematical modeling of vibro-impact systems, a generalized function of the periodic mode of movement of the executive body has been developed. It is presented in the form of the dependence of the shock impulse on the ratio of the angular velocities of the linear conservative system and its own. When obtaining this function, the Heaviside integral jump function and the periodic Green's function were used. The function of the dependence of the oscillation frequency on the impact impulse is determined from the impact conditions for the function of the system's response to a periodic sequence of impulses. The design model of a vibroimpact system is considered, both with one impact element and a motion limiter, and with a double-sided impact pair with alternate impact interactions with the limiters. In the intervals between impacts, there is a linear force interaction. When developing the mathematical model, a stereomechanical impact model was used, which is characterized by the velocity recovery coefficient after the impact. The analysis of the dependence function of the oscillation frequency on the shock impulse made it possible to obtain skeletal diagrams of resonant and quasi-resonant oscillations of vibro-impact systems with one and many degrees of freedom. Based on the obtained phase diagrams of the state of vibro-impact systems, it was determined: in a system with a gap, an increase in the impact speed increases the oscillation frequency, and the vibro-impact nonlinearity is «hard»; in a system with tension, with an increase in the value of the shock impulse, the oscillation frequency decreases (nonlinearity is «soft»). In the absence of a gap, the system is isochronous. Depending on the initial energy reserve and the location of the limiters in an asymmetric oscillatory system, with one degree of freedom, there can be vibro-impact modes with both one (closer located) and both limiters. In a linear conservative system with several degrees of freedom, a single-impact T-periodic regime is realized. If the dissipation during motion and impact is very small, then a regime close to resonant can exist in the system. In this case, periodic oscillations are supported by a weak external periodic force. The developed mathematical model makes it possible to fully describe the process of changing the relative coordinate of the movement of the working body, both in transient and in the established modes of movement of the system.

**Key words:** *mathematical model, impact, frequency, impulse, resonance, vibration.*

Отримано: 20.06.2023